

יסודות

שלושה עשר ספרי היסודות לאוקלידס

אוקלידס

תרגום עברי מלא של שלושה־עשר הספרים, שנבדק לשונית ומתמטית מול הטקסט
היווני של הייברג.

מקור

-Heiberg, Perseus Digital Library (urn:cts:greekLit:tlg1799.tlg001.perseus
(grc2

מהדורה

פרויקט אבן תיבון

תאריך

2026-09-16

זכויות

רישיון קריאייטיב קומונס ייחוס (CC BY 4.0)

מזהה

urn:uuid:5b3d4ad5-3a12-5c91-88f9-0ed7132f2b58

פתח דבר למהדורה העברית

הספר ותכניתו

יסודות הוא חיבור מתמטי ערוך בשלושה־עשר ספרים, שנוצר ככל הנראה באלכסנדריה סביב שנת 300 לפנה"ס. על חייו של אוקלידס אין בידינו כמעט ידיעות בטוחות; עיקר דמותו ההיסטורית עולה מן החיבור שנמסר בשמו ומעדויות מאוחרות. אף שהספר מרכז הישגים שקדמו למחברו, חשיבותו אינה באיסוף בלבד. הגדרות, בקשות, מושכלים משותפים ומשפטים סודרו בו במהלך מצטבר, שבו הבניות וההוכחות אמורות להישען על מה שקדם להן.

ספרים א–ד עוסקים בעיקר בגאומטריית המישור; ספר ה מעמיד תורה כללית של יחסים בין גדלים, וספר ו מחיל אותה על צורות דומות. ספרים ז–ט מוקדשים לאריתמטיקה ולתורת המספרים. ספר י ממיין גדלים בני־מידה וחסרי־מידה. ספרים יא–יג עוברים לגאומטריה במרחב ומגיעים לבניית חמשת הגופים המשוכללים. החלוקה הזאת מועילה להתמצאות, אך היא אינה הופכת את הספרים למסות עצמאיות: מונחים וטענות עוברים מספר לספר, ולעתים משמעותו המדויקת של משפט תלויה בתורה שנבנתה זמן רב לפניו.

כיצד לקרוא את אוקלידס

היחידה האוקלידית הטיפוסית אינה רק משפט במובנו המודרני. היא עשויה לכלול ניסוח של המבוקש, הצבת עצמים ואותיות, בניית קווי־עזר, הוכחה וסיום החזרה אל המבוקש. משום כך נשמרו בתרגום נוסחאות הפעולה וההיסק — כגון „יהי”, „נחבר”, „מאחר ש־” ו„לפיכך” — גם במקום שעברית מודרנית

קצרה יותר הייתה נשמעת טבעית. חזרות אלה הן סימני הדרך של ההוכחה, ולא קישוט סגנוני.

אין לקרוא את יסודות כאילו נכתב בלשון האלגברה או תורת הקבוצות. „מלבן המוכלל” בשני קטעים, „יחס” בין גדלים ו„מספר” הם מונחים בתוך מערכת מושגית עתיקה. נוסחה מודרנית יכולה לבאר את התוצאה, אך אם מכניסים אותה לגוף התרגום היא עלולה למחוק הבחנות שעליהן הטיעון עצמו בנוי. המהדורה מעדיפה אפוא עברית בהירה, אך אינה ממירה בשתיקה את המתמטיקה של אוקלידס במתמטיקה מאוחרת.

מסירת החיבור

הטקסט הגיע אלינו במסורת יוונית ארוכה שנערכה, הועתקה ונלמדה שוב ושוב; נוסח תאון מאלכסנדריה השפיע עמוקות על רוב כתבי־היד היווניים. בימי הביניים עבר יסודות גם דרך מסורות ערביות עשירות של תרגום, עיבוד ופירוש. מן הערבית הגיע החיבור אל קוראים יהודים ואל מתרגמים לעברית, ובמקביל הזין גם את מסירתו הלטינית. אין אפוא „שרשרת” יחידה ופשוטה מן היוונית אל העברית, אלא כמה ענפים שביניהם מגעים, תיקונים והלוואות.

מחקרו ההשוואתי של עופר אליאור מונה חמישה תרגומים עבריים של יסודות מימי הביניים. בתוכם מצויים הנוסח המיוחס למשה אבן תיבון, המתוארך לשנת 1270, והתרגום הידוע בשם תרגומו של ר' יעקב. מחקר נפרד של אליאור הראה כי תרגום ר' יעקב משמר עדויות חשובות לענף ערבי של החיבור, שיש לו זיקה גם לתרגומו הלטיני של אדלארד מבאת'. עובדה זו חשובה לעורך: תרגום עברי קדום אינו רק שלב מקומי בתולדות הלשון

העברית, אלא לעתים עד טקסטואלי למסורת שאינה שמורה במישרין במקום אחר.

תרגומים עבריים קודמים וחלקיים

המהדורה הנוכחית אינה הראשונה המביאה את אוקלידס לעברית. לצד חמשת התרגומים מימי הביניים ראוי להזכיר את מפעלו של ר' ברוך שיק משקלוב, שהדפיס בהאג בשנת תק"ם (1780) תרגום של ששת הספרים הראשונים. זהו ציון דרך בתולדות ספרות המדע העברית המודפסת, אך הוא תרגום חלקי השייך למסורת טקסטואלית ולתקופה לשונית שונות מאלה של מהדורה זו.

גם בעת החדשה נעשו ניסיונות חלקיים. באתר „אקסיומת השלמות” מתפרסם תרגום עברי חדש על יסוד תרגומו האנגלי של ריצ'רד פיצפטרק. בעת בדיקת המקורות למהדורה זו, ב־8 בספטמבר 2026, היה זמין שם הספר הראשון בלבד; הוא מתפרסם ברשיון CC BY-NC-SA 4.0. אזכורו כאן הוא ביבליוגרפי. נוסחו לא שימש מקור לתרגום שלפנינו.

הרשימה הזאת אינה קטלוג מלא של כל כתי־היד, הקטעים, העיבודים והציטוטים העבריים של אוקלידס. מטרתה להעמיד את המהדורה במקומה: היא מצטרפת למסורת עברית בת מאות שנים, אך אינה מהדירה אחד מתרגומיה הקדומים ואינה משלימה תרגום חלקי קיים. זוהי יצירה של נוסח עברי חדש על יסוד הטקסט היווני שנבחר.

טקסט־האב ועדי העזר

טקסט־האב הוא נוסח היוונית שקבע יוהן לודוויג הייברג בכרכים א–ה של *Euclidis Opera Omnia* (לייפציג, 1883–1888), לפי הקידוד הדיגיטלי של ספריית פרסאוס. היחידות, סדרן ומזהיהן נגזרים מן הנוסח היווני. תרגומו האנגלי של תומס ליטל הית' משנת 1908 נכלל בקורא כעד עזר בלבד: הוא מסייע בבדיקה ובהתמצאות, אך אינו קובע את חלוקת הקורפוס ואינו מקור לניסוח העברי.

קידוד פרסאוס אינו תחליף לעיון בכל דפוס הייברג ובכתבי־היד שעליהם נשענה מהדורתו. הקורא גם אינו משחזר את מלוא האפרט הביקורתי של הייברג, ולכן אין לראות בו מהדורה ביקורתית חדשה של היוונית. החלוקה לפסקאות וסימני הפיסוק שייכים למסירת הטקסט ולעריכתו, ולא למחבר העתיק לבדו. במקומות מעטים שבהם מבנה הקידוד או תוויות השרטוט נפגמו, נעשו תיקונים מקומיים ומתועדים. תיקונים אלה משחזרים גבולות או סימנים שהראיות להם נמצאות בתוך המהדורה עצמה; אין הם ניסיון לכונן מחדש את כל נוסח יסודות.

דרכה של המהדורה

התרגום נעשה ביחידות פסקה המיושרות ישירות ליוונית. לכל יחידה מזהה קבוע וסכום ביקורת של טקסט־המקור, כדי ששינוי עתידי במקור לא יעבור בלא גילוי. ההפרדה בין הטקסט היווני, התרגום העברי ותרגום הית' נשמרת גם בקבצים וגם בממשק. כך אפשר לבקר כל פסקה בלי לשטש את מעמדו של כל עד.

במונחים חוזרים הועדפה עקיבות על פני גיוון סגנוני. עם זאת, התאמה של מילה יוונית למילה עברית יחידה אינה תמיד אפשרית: משמעות נקבעת גם לפי סוג הגודל, תפקיד המשפט והמסורת המתמטית של הספר. המונחון המצורף הוא אפוא כלי עריכה מחייב, אך אינו טענה שכל מונח מתקיים מחוץ להקשרו באותה משמעות בדיוק.

אותיות השרטוט נשמרות בנתוני התרגום כאותיות יווניות. בתצוגה העברית הן מוצגות כאותיות לטיניות מקבילות ומבודדות מכיוון הכתיבה, כדי שרצף כגון ABΓ לא יתהפך בתוך שורה מימין לשמאל. זוהי מוסכמת תצוגה בלבד. קידוד פרסאוס שעליו מבוססת מהדורה זו כולל מציניי מקום ריקים במקום השרטוטים עצמם; לפיכך הקורא הנוכחי מוסר את הרובד המילולי ואינו עדיין מהדורה מאוירת. במשפטים התלויים בבנייה יש לעיין לצד הטקסט בשרטוט מתאים.

מעמד הנוסח

התרגום העברי של כל שלושה־עשר הספרים הושלם ואושר למהדורה. כל 2,373 יחידותיו עברו ביקורת סדורה מול היוונית של הייברג, ובה נבדקו הלשון, הדיוק המתמטי, תוויות השרטוט והעקיבות עם המונחון; כולן מסומנות כ־`final`. מספר המהדורה `0.9.0` מציין שהטקסט העברי שלם ומאושר אך המהדורה עדיין אינה מאוירת, והיא מופצת לבדיקת קוראים נוספת לפני קביעת מהדורת `1.0.0`. השלמת הביקורת על התרגום אינה הופכת את הטקסט היווני למהדורה ביקורתית חדשה, והשרטוטים עצמם עדיין אינם כלולים, כמסבר לעיל.

המהדורה מבקשת לשרת שני קוראים בעת ובעונה אחת: את המבקש לקרוא הוכחה עברית רצופה, ואת המבקש לבדוק כיצד היא עומדת מול היוונית. משום כך היא פתוחה, ניתנת לחיפוש ומאפשרת מעבר מיידי בין הלשונות. התרגום העברי מתפרסם ברישיון CC BY 4.0; הטקסט היווני הדיגיטלי של פרסאוס נמסר ברישיון CC BY-SA 4.0, וכל רובד שומר על ייחוסו.

מקורות וקיצורים ביבליוגרפיים

,vols. 1–5. Leipzig: Teubner, *Euclidis Opera Omnia*. Heiberg, J. L., ed
1888–1883.

3. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Heath, Thomas L., trans
.vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1908

אליאור, עופר. „התרגומים העבריים של ‘ספר היסודות’ מאת אוקלידס מימי הביניים”. *מדעי היהדות* 57.1 (2022), עמ' 41–63. JSTOR 27218454.

Preserved in *Elements* Elior, Ofer. “The Arabic Tradition of Euclid's the Latin Translation by Adelard of Bath and the Hebrew Translation :DOI. 130–111 : (2018) 45.2 *Historia Mathematica* ”.by Rabbi Jacob
.j.hm.2018.01.001/10.1016

„ה'יסודות' לאוקלידס”, אתר „אקסיומת השלמות”,
/math.srayaa.com/elements (נבדק ב־8 בספטמבר 2026).

תוכן העניינים

3.....	פתח דבר למהדורה העברית
10.....	ספר א
49.....	ספר ב
65.....	ספר ג
101.....	ספר ד
118.....	ספר ה
144.....	ספר ו
181.....	ספר ז
210.....	ספר ח
232.....	ספר ט
257.....	ספר י
389.....	ספר יא
431.....	ספר יב
466.....	ספר יג

ספר א

נקודה היא מה שאין לו חלק.

קו הוא אורך שאין לו רוחב.

קצותיו של קו הם נקודות.

קו ישר הוא קו המונח באופן אחיד ביחס לנקודות שעליו.

משטח הוא מה שיש לו אורך ורוחב בלבד.

גבולותיו של משטח הם קווים.

משטח מישורי הוא משטח המונח באופן אחיד ביחס לקווים הישרים שעליו.

זווית מישורית היא הנטייה ההדדית של שני קווים במישור, הנפגשים זה בזה ואינם מונחים בקו ישר אחד.

וכאשר הקווים המכילים את הזווית ישרים, הזווית נקראת קווית.

כאשר קו ישר העומד על קו ישר יוצר זוויות סמוכות השוות זו לזו, כל אחת מן הזוויות השוות היא זווית ישרה, והקו הישר העומד על האחר נקרא אנך לקו שעליו הוא עומד.

זווית קהה היא זווית הגדולה מזווית ישרה.

זווית חדה היא זווית הקטנה מזווית ישרה.

גבול הוא מה שהוא קצהו של דבר כלשהו.

צורה היא מה שמוכל בגבול אחד או בגבולות אחדים.

מעגל הוא צורה מישורית המוכלת בקו אחד, אשר כל הקווים הישרים המגיעים אליו מנקודה אחת מבין הנקודות שבתוך הצורה שווים זה לזה.

והנקודה נקראת מרכז המעגל.

קוטר המעגל הוא כל קו ישר העובר דרך המרכז ומסתיים בשני כיוונו בהיקף המעגל; וקו ישר כזה גם חוצה את המעגל לשניים.

חצי־מעגל הוא הצורה המוכלת בקוטר ובקשת הנחתכת על ידו. ומרכז חצי־המעגל זהה למרכז המעגל.

צורות קוויות הן הצורות המוכלות בקווים ישרים: המוכלות בשלושה הן תלת־צלעיות, המוכלות בארבעה הן מרובעים, והמוכלות ביותר מארבעה קווים ישרים הן רב־צלעיות.

מבין הצורות התלת־צלעיות, משולש שווה־צלעות הוא זה ששלוש צלעותיו שוות; משולש שווה־שוקיים הוא זה שרק שתיים מצלעותיו שוות; ומשולש שונה־צלעות הוא זה ששלוש צלעותיו אינן שוות.

ועוד, מבין הצורות התלת־צלעיות, משולש ישר־זווית הוא זה שיש בו זווית ישרה; משולש קהה־זווית הוא זה שיש בו זווית קהה; ומשולש חד־זווית הוא זה ששלוש זוויותיו חדות.

מבין המרובעים, ריבוע הוא צורה שצלעותיה שוות וזוויותיה ישרות; מלבן הוא צורה שזוויותיה ישרות אך צלעותיה אינן כולן שוות; מעוין הוא צורה שצלעותיה שוות אך זוויותיה אינן ישרות; ומקבילית היא צורה שצלעותיה

הנגדיות וזוויותיה הנגדיות שוות זו לזו, אך לא כל צלעותיה שוות ולא זוויותיה ישרות. שאר המרובעים ייקראו טרפזים.

קווים ישרים מקבילים הם קווים ישרים המצויים באותו מישור, וכאשר מאריכים אותם ללא גבול בשני הכיוונים אין הם נפגשים זה בזה באף אחד מן הכיוונים.

נדרש להעביר קו ישר מכל נקודה אל כל נקודה.

וכן להאריך קו ישר סופי ברציפות בקו ישר.

וכן לתאר מעגל בכל מרכז ובכל מרחק.

וכן שכל הזוויות הישרות שוות זו לזו.

וכן שאם קו ישר הנופל על שני קווים ישרים יוצר בצד אחד זוויות פנימיות שסכומן קטן משתי זוויות ישרות, שני הקווים הישרים, אם יוארכו ללא גבול, ייפגשו באותו צד שבו נמצאות הזוויות שסכומן קטן משתי זוויות ישרות.

דברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה.

אם מוסיפים שווים לשווים, השלמים שווים.

אם מחסרים שווים משווים, השאריות שוות.

אם מוסיפים שווים לבלתי־שווים, השלמים בלתי־שווים.

דברים שהם כפולים של אותו דבר שווים זה לזה.

דברים שהם חצאים של אותו דבר שווים זה לזה.

דברים החופפים זה לזה שווים זה לזה.

השלם גדול מן החלק.

ושני קווים ישרים אינם מקיפים שטח.

לבנות משולש שווה־צלעות על קו ישר סופי נתון.

יהי הקו הישר הסופי הנתון AB .

נדרש אפוא לבנות משולש שווה־צלעות על הקו הישר AB .

במרכז A ובמרחק AB יתואר המעגל $B\Gamma A$; ושוב, במרכז B ובמרחק BA יתואר המעגל $A\Gamma E$; ומן הנקודה Γ , שבה חותכים המעגלים זה את זה, יחוברו אל הנקודות A, B הקווים הישרים $\Gamma A, \Gamma B$.

ומאחר שהנקודה A היא מרכז המעגל $A\Gamma$, ΓA שווה ל־ AB . ושוב, מאחר שהנקודה B היא מרכז המעגל $B\Gamma$, ΓB שווה ל־ BA . והוכח גם כי ΓA שווה ל־ AB ; לכן כל אחד מן הקווים $\Gamma A, \Gamma B$ שווה ל־ AB . ודברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה; לכן גם ΓA שווה ל־ ΓB . מכאן ששלושת הקווים $\Gamma A, \Gamma B, AB$ שווים זה לזה.

לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה־צלעות, והוא נבנה על הקו הישר הסופי הנתון AB .

כנדרש לעשות.

להניח בנקודה נתונה קו ישר השווה לקו ישר נתון.

תהי A הנקודה הנתונה, ויהי $B\Gamma$ הקו הישר הנתון. נדרש אפוא להניח בנקודה A קו ישר השווה לקו הישר הנתון $B\Gamma$.

יחובר מן הנקודה A אל הנקודה B הקו הישר AB; ועליו ייבנה המשולש שווה־הצלעות ΔAB . יוארכו בקו ישר עם ΔB , ΔA הקווים הישרים AE, BZ; במרכז B ובמרחק $B\Gamma$ יתואר המעגל $\Gamma H\Theta$; ושוב, במרכז Δ ובמרחק ΔH יתואר המעגל HKL.

ומאחר שהנקודה B היא מרכז המעגל $B\Gamma$, $\Gamma H\Theta$ שווה ל־ BH . ושוב, מאחר שהנקודה Δ היא מרכז המעגל ΔA , $K\Lambda H$ שווה ל־ ΔH ; ומהם ΔA שווה ל־ ΔB . לכן השארית AL שווה לשארית BH. והוכח גם כי $B\Gamma$ שווה ל־ BH ; לכן כל אחד מן הקווים $B\Gamma$, AL שווה ל־ BH . ודברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה; לכן גם AL שווה ל־ $B\Gamma$.

לפיכך בנקודה הנתונה A מונח הקו הישר AL, השווה לקו הישר הנתון $B\Gamma$; כנדרש לעשות.

בהינתן שני קווים ישרים בלתי־שווים, לחתוך מן הגדול קו ישר השווה לקטן.

יהיו AB, Γ שני הקווים הישרים הנתונים והבלתי־שווים, ויהי AB הגדול שבהם. נדרש אפוא לחתוך מן הגדול, AB, קו ישר השווה לקטן, Γ .

בנקודה A יונח ΔA השווה לקו הישר Γ ; ובמרכז A ובמרחק ΔA יתואר המעגל ΔEZ .

ומאחר שהנקודה A היא מרכז המעגל AE, ΔEZ שווה ל־ ΔA ; אך גם Γ שווה ל־ ΔA . לכן כל אחד מן הקווים Γ , AE, שווה ל־ ΔA , ולפיכך גם AE שווה ל־ Γ .

לפיכך, בהינתן שני הקווים הישרים הבלתי־שווים AB, Γ , נחתך מן הגדול AB הקו AE השווה לקטן Γ ; כנדרש לעשות.

אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, והזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים שווה לזווית הכלולה ביניהם במשולש האחר, אז גם הבסיס יהיה שווה לבסיס, המשולש יהיה שווה למשולש, והזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות.

יהיו $AB\Gamma, \Delta EZ$ שני משולשים ששתי צלעותיהם $AB, A\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $AB, \Delta Z$ — $\Delta E, \Delta Z$ — AB שווה ל־ ΔE ו־ $A\Gamma$ ל־ ΔZ — והזווית BAG שווה לזווית EAZ . אומר אני שגם הבסיס $B\Gamma$ שווה לבסיס EZ , שהמשולש $AB\Gamma$ יהיה שווה למשולש ΔEZ , ושהזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות: הזווית $AB\Gamma$ לזווית ΔEZ , והזווית $A\Gamma B$ לזווית ΔZE .

שהרי אם נתאים את המשולש $AB\Gamma$ למשולש ΔEZ ונניח את הנקודה A על הנקודה Δ ואת הקו הישר AB על ΔE , תתאים גם הנקודה B אל E , מפני ש־ AB שווה ל־ ΔE . ולאחר שהותאם AB אל ΔE , יתאים גם הקו הישר $A\Gamma$ אל ΔZ , מפני שהזווית BAG שווה לזווית EAZ ; ולפיכך תתאים גם הנקודה Γ אל הנקודה Z , מפני ששוב $A\Gamma$ שווה ל־ ΔZ . אך גם B כבר הותאמה אל E ; לכן הבסיס $B\Gamma$ יתאים לבסיס EZ . כי אילו, לאחר ש־ B הותאמה אל E ו־ Γ אל Z , לא היה הבסיס $B\Gamma$ מתאים ל־ EZ , היו שני קווים ישרים מקיפים שטח, וזה בלתי־אפשרי. לכן הבסיס $B\Gamma$ יתאים ל־ EZ ויהיה שווה לו; ולפיכך גם המשולש השלם $AB\Gamma$ יתאים למשולש השלם ΔEZ ויהיה שווה לו. גם הזוויות

הנתרות יתאימו לזוויות הנתרות ויהיו שוות להן: הזווית $AB\Gamma$ לזווית ΔEZ , והזווית AGB לזווית ΔZE .

לפיכך, אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, והזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים שווה לזווית הכלולה ביניהם במשולש האחר, אז גם הבסיס יהיה שווה לבסיס, המשולש יהיה שווה למשולש, והזוויות הנתרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנתרות שמולן מונחות הצלעות השוות; מש"ל.

במשולשים שווי-שוקיים הזוויות שליד הבסיס שוות זו לזו; ואם מארכים הלאה את הקווים הישרים השווים, גם הזוויות שמתחת לבסיס יהיו שוות זו לזו.

יהי $AB\Gamma$ משולש שווה-שוקיים שצלעו AB שווה לצלעו AG , ויורכו בקו ישר עם AG , AB הקווים הישרים ΓE , BA . אומר אני שהזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית AGB , והזווית ΓBA שווה לזווית $B\Gamma E$.

תילקח על BA נקודה כלשהי Z ; ומן הקו הגדול AE ייחתך AH השווה לקו הקטן AZ ; ויחברו הקווים הישרים $Z\Gamma$, HB .

ומאחר ש- AZ שווה ל- AH ו- AB שווה ל- AG , שתי הצלעות ZA , AG שוות בהתאמה לשתי הצלעות HA , AB ; והן כוללות זווית משותפת, ZAH . לכן הבסיס $Z\Gamma$ שווה לבסיס HB , והמשולש $AZ\Gamma$ יהיה שווה למשולש AHB ; והזוויות הנתרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנתרות שמולן מונחות הצלעות השוות: הזווית AGZ לזווית ABH , והזווית $AZ\Gamma$ לזווית AHB . ומאחר שהקו השלם AZ שווה לקו השלם AH , ומהם AB שווה ל- AG , השארית BZ שווה

לשארית ΓH . והוכח גם כי $Z\Gamma$ שווה ל- HB ; לכן שתי הצלעות BZ , $Z\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות HB , ΓH . והזווית $BZ\Gamma$ שווה לזווית ΓHB , ובסיס $B\Gamma$ משותף; לכן גם המשולש $BZ\Gamma$ יהיה שווה למשולש ΓHB , והזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית $ZB\Gamma$ שווה לזווית $H\Gamma B$, והזווית $B\Gamma Z$ שווה לזווית $\Gamma B H$. ומאחר שהוכח כי הזווית השלמה ABH שווה לזווית השלמה $A\Gamma Z$, ומהן $\Gamma B H$ שווה ל- $B\Gamma Z$, השארית $AB\Gamma$ שווה לשארית $A\Gamma B$; ואלה הזוויות שליד בסיס המשולש $AB\Gamma$. והוכח גם כי $ZB\Gamma$ שווה ל- $H\Gamma B$; ואלה הזוויות שמתחת לבסיס.

לפיכך, במשולשים שווי-שוקיים הזוויות שליד הבסיס שוות זו לזו; ואם מאריכים הלאה את הקווים הישרים השווים, גם הזוויות שמתחת לבסיס יהיו שוות זו לזו; מש"ל.

אם במשולש שתי זוויות שוות זו לזו, גם הצלעות המונחות מול הזוויות השוות יהיו שוות זו לזו.

יהי $AB\Gamma$ משולש שהזווית $AB\Gamma$ בו שווה לזווית $A\Gamma B$. אומר אני שגם הצלע AB שווה לצלע $A\Gamma$.

כי אם AB אינה שווה ל- $A\Gamma$, אחת מהן גדולה מן האחרת. תהי AB הגדולה; ומן הגדולה AB ייחתך ΔB השווה לקטנה $A\Gamma$; ויחובר $\Delta\Gamma$.

ומאחר ש- ΔB שווה ל- $A\Gamma$ ו- $B\Gamma$ משותפת, שתי הצלעות ΔB , $B\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $A\Gamma$, ΓB ; והזווית $\Delta B\Gamma$ שווה לזווית $A\Gamma B$. לכן הבסיס

$\Delta\Gamma$ שווה לבסיס AB , והמשולש $\Delta B\Gamma$ יהיה שווה למשולש $A\Gamma B$ — הקטן לגדול — וזה אבסורד. לכן AB אינה בלתי־שווה ל־ $A\Gamma$; מכאן שהיא שווה לה.

לפיכך, אם במשולש שתי זוויות שוות זו לזו, גם הצלעות המונחות מול הזוויות השוות יהיו שוות זו לזו; מש"ל.

על אותו קו ישר אי־אפשר לבנות, אל נקודה אחרת ובאותו צד, עוד שני קווים ישרים השווים בהתאמה לשני הקווים הישרים המקוריים ובעלי אותם קצוות כמותם.

כי אילו היה הדבר אפשרי, על אותו קו ישר AB ייבנו שני הקווים הישרים ΔA , ΔB השווים בהתאמה לשני הקווים הישרים $A\Gamma$, ΓB , כששני הזוגות נפגשים בנקודות שונות, Γ ו־ Δ , באותו צד ובעלי אותם קצוות; כך ש־ ΓA שווה ל־ ΔA , ששתיהן בעלות אותו קצה A , ו־ ΓB שווה ל־ ΔB , ששתיהן בעלות אותו קצה B . ויחובר $\Gamma\Delta$.

ומאחר ש־ $A\Gamma$ שווה ל־ ΔA , גם הזווית $A\Gamma\Delta$ שווה לזווית $A\Delta\Gamma$; לכן הזווית $A\Delta\Gamma$ גדולה מן הזווית $\Delta\Gamma B$, ועל אחת כמה וכמה הזווית $\Gamma\Delta B$ גדולה מן הזווית $\Delta\Gamma B$. ושוב, מאחר ש־ ΓB שווה ל־ ΔB , גם הזווית $\Gamma\Delta B$ שווה לזווית $\Delta\Gamma B$. אך הוכח שהיא אף גדולה ממנה בהרבה; וזה בלתי־אפשרי.

לפיכך, על אותו קו ישר אי־אפשר לבנות, אל נקודה אחרת ובאותו צד, עוד שני קווים ישרים השווים בהתאמה לשני הקווים הישרים המקוריים ובעלי אותם קצוות כמותם; מש"ל.

אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, וגם הבסיס שווה לבסיס, אז גם הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים תהיה שווה לזווית הכלולה ביניהם במשולש האחר.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ שני משולשים ששתי צלעותיהם AB , $A\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות AB — ΔZ , ΔE ל־ ΔE ו־ $A\Gamma$ ל־ ΔZ — וגם בסיסם $B\Gamma$ שווה לבסיס EZ . אומר אני שגם הזווית $B\Gamma$ שווה לזווית $E\Delta Z$.

שהרי אם נתאים את המשולש $AB\Gamma$ למשולש ΔEZ ונניח את הנקודה B על הנקודה E ואת הקו הישר $B\Gamma$ על EZ , תתאים גם הנקודה Γ אל Z , מפני ש־ $B\Gamma$ שווה ל־ EZ . ולאחר שהותאם $B\Gamma$ אל EZ , יתאימו גם BA , ΓA אל $E\Delta$, ΔZ . כי אילו הבסיס $B\Gamma$ היה מתאים לבסיס EZ אך הצלעות BA , $A\Gamma$ לא היו מתאימות ל־ ΔZ , $E\Delta$ אלא סוטות מהן, כגון EH , HZ , היו נבנים על אותו קו ישר, באותו צד ובנקודה אחרת, שני קווים ישרים אחרים השווים בהתאמה לשני קווים ישרים נתונים ובעלי אותם קצוות עמם. אך אי־אפשר לבנותם. לכן כאשר הבסיס $B\Gamma$ מותאם לבסיס EZ , לא ייתכן שהצלעות BA , $A\Gamma$ לא יתאימו ל־ ΔZ , $E\Delta$. מכאן שהן יתאימו; ולכן גם הזווית $B\Gamma$ תתאים לזווית $E\Delta Z$ ותהיה שווה לה.

לפיכך, אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות וגם הבסיס שווה לבסיס, אז גם הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים תהיה שווה לזווית הכלולה ביניהם במשולש האחר; מש״ל.

לחצות זווית קווית נתונה.

תהי $B\Gamma$ הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לחצותה.

תילקח על AB נקודה כלשהי Δ ; ומן $A\Gamma$ ייחתך AE השווה ל- $A\Delta$; יחובר ΔE ; על AE ייבנה המשולש שווה-הצלעות ΔEZ ; ויחובר AZ . אומר אני שהזווית $B\Delta\Gamma$ נחצתה על ידי הקו הישר AZ .

כי מאחר ש- $A\Delta$ שווה ל- AE ו- AZ משותף, שתי הצלעות ΔA , AZ שוות בהתאמה לשתי הצלעות EA , AZ ; והבסיס ΔZ שווה לבסיס EZ . לכן הזווית ΔAZ שווה לזווית EAZ .

לפיכך הזווית הקווית הנתונה $B\Delta\Gamma$ נחצתה על ידי הקו הישר AZ ; כנדרש לעשות.

לחצות קו ישר סופי נתון.

יהי AB הקו הישר הסופי הנתון. נדרש אפוא לחצות את הקו הישר הסופי AB . ייבנה עליו המשולש שווה-הצלעות $AB\Gamma$, והזווית $A\Gamma B$ תיחצה על ידי הקו הישר $\Gamma\Delta$. אומר אני שהקו הישר AB נחצה בנקודה Δ .

כי מאחר ש- $A\Gamma$ שווה ל- ΓB ו- $\Gamma\Delta$ משותף, שתי הצלעות $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$; והזווית $A\Gamma\Delta$ שווה לזווית $B\Gamma\Delta$. לכן הבסיס $A\Delta$ שווה לבסיס $B\Delta$.

לפיכך הקו הישר הסופי הנתון AB נחצה בנקודה Δ ; כנדרש לעשות.

להעביר מן הנקודה הנתונה שעל קו ישר נתון קו ישר בזוויות ישרות אליו.

יהי AB הקו הישר הנתון, ותהי Γ הנקודה הנתונה שעליו. נדרש אפוא להעביר מן הנקודה Γ קו ישר בזוויות ישרות אל הקו הישר AB .

תילקח על AF נקודה כלשהי Δ ; יונח ΓE השווה ל- $\Gamma\Delta$; על ΔE ייבנה המשולש שווה-הצלעות $Z\Delta E$; ויחובר ZF . אומר אני כי מן הנקודה הנתונה Γ שעל הקו הישר הנתון AB הועבר הקו הישר ZF בזוויות ישרות אל AB .

כי מאחר ש- $\Delta\Gamma$ שווה ל- ΓE ו- ΓZ משותף, שתי הצלעות $\Delta\Gamma$, ΓZ שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΓE , ΓZ ; והבסיס ΔZ שווה לבסיס ZE . לכן הזווית $\Delta\Gamma Z$ שווה לזווית $E\Gamma Z$; והן זוויות סמוכות. וכאשר קו ישר העומד על קו ישר יוצר זוויות סמוכות השוות זו לזו, כל אחת מן הזוויות השוות היא זווית ישרה. לפיכך כל אחת מן הזוויות $\Delta\Gamma Z$, $Z\Gamma E$ היא זווית ישרה.

לפיכך מן הנקודה הנתונה Γ שעל הקו הישר הנתון AB הועבר הקו הישר ΓZ בזוויות ישרות אל AB ; כנדרש לעשות.

להעביר מנקודה נתונה שאינה על קו ישר אינסופי נתון קו ישר המאונך לו.

יהי AB הקו הישר האינסופי הנתון, ותהי Γ הנקודה הנתונה שאינה עליו. נדרש אפוא להעביר מן הנקודה הנתונה Γ , שאינה על הקו הישר האינסופי הנתון AB , קו ישר המאונך ל- AB .

תילקח בצדו האחר של הקו הישר AB נקודה כלשהי Δ ; במרכז Γ ובמרחק $\Gamma\Delta$ יתואר המעגל EZH ; הקו הישר EH ייחצה בנקודה Θ ; ויחברו הקווים הישרים ΓH , $\Gamma\Theta$, ΓE . אומר אני כי מן הנקודה הנתונה Γ , שאינה על הקו הישר האינסופי הנתון AB , הועבר האנך $\Gamma\Theta$ אל AB .

כי מאחר ש- $H\Theta$ שווה ל- $E\Theta$ ו- $\Theta\Gamma$ משותף, שתי הצלעות $\Theta\Gamma$, ΘH שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Theta\Gamma$, ΘE ; והבסיס ΓH שווה לבסיס ΓE . לכן הזווית $\Gamma\Theta H$ שווה לזווית $E\Theta\Gamma$; והן זוויות סמוכות. וכאשר קו ישר העומד על קו ישר

יוצר זוויות סמוכות השוות זו לזו, כל אחת מן הזוויות השוות היא זווית ישרה, והקו הישר העומד נקרא אנך לקו שעליו הוא עומד.

לפיכך מן הנקודה הנתונה Γ , שאינה על הקו הישר האינסופי הנתון AB , הועבר האנך $\Gamma\Theta$ אל AB ; כנדרש לעשות.

אם קו ישר העומד על קו ישר יוצר זוויות, הוא ייצור שתי זוויות ישרות או זוויות שסכומן שווה לשתי זוויות ישרות.

יהי הקו הישר AB עומד על הקו הישר $\Gamma\Delta$ ויוצר את הזוויות ΓBA , $AB\Delta$. אומר אני שהזוויות ΓBA , $AB\Delta$ הן שתי זוויות ישרות או שסכומן שווה לשתי זוויות ישרות.

אם הזווית ΓBA שווה לזווית $AB\Delta$, הרי הן שתי זוויות ישרות. ואם לא, יועבר מן הנקודה B הקו BE בזוויות ישרות אל הקו הישר $\Gamma\Delta$; לכן הזוויות ΓBE , EBA הן שתי זוויות ישרות. ומאחר שהזווית ΓBE שווה לשתי הזוויות ΓBA , ABE , תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת EBA ; לכן הזוויות ΓBE , EBA שוות לשלוש הזוויות ΓBA , ABE , EBA . ושוב, מאחר שהזווית ΔBA שווה לשתי הזוויות ΔBE , EBA , תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת $AB\Gamma$; לכן הזוויות ΔBA , $AB\Gamma$ שוות לשלוש הזוויות ΔBE , EBA , $AB\Gamma$. אך הוכח שגם הזוויות ΓBE , EBA שוות לאותן שלוש זוויות; ודברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה. לכן הזוויות ΓBE , EBA שוות לזוויות ΔBA , $AB\Gamma$. אך ΓBE , EBA הן שתי זוויות ישרות; לפיכך גם הזוויות ΔBA , $AB\Gamma$ שוות לשתי זוויות ישרות.

לפיכך, אם קו ישר העומד על קו ישר יוצר זוויות, הוא ייצור שתי זוויות ישרות או זוויות שסכומן שווה לשתי זוויות ישרות; מש"ל.

אם בנקודה שעל קו ישר שני קווים ישרים, שאינם מונחים באותו צד, יוצרים זוויות סמוכות שסכומן שווה לשתי זוויות ישרות, שני הקווים הישרים יהיו בקו ישר זה עם זה.

בנקודה B שעל הקו הישר AB יהיו שני הקווים הישרים BF , BD , שאינם מונחים באותו צד, יוצרים את הזוויות הסמוכות ABF , ABD השוות יחד לשתי זוויות ישרות. אומר אני כי BD נמצא בקו ישר עם BF .

כי אם BD אינו בקו ישר עם BF , יהי BE בקו ישר עם BF .

ומאחר שהקו הישר AB עומד על הקו הישר BE , הזוויות ABE , ABF שוות יחד לשתי זוויות ישרות. אך גם הזוויות ABD , ABF שוות יחד לשתי זוויות ישרות. לכן הזוויות ABE , ABD שוות לזוויות ABF , ABD . תוחסר הזווית המשותפת ABD ; לכן השארית ABE שווה לשארית ABD — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך BE אינו בקו ישר עם BF . ובאותו אופן נראה שגם שום קו אחר אינו בקו ישר עמו מלבד BD . לכן BF נמצא בקו ישר עם BD .

לפיכך, אם בנקודה שעל קו ישר שני קווים ישרים, שאינם מונחים באותו צד, יוצרים זוויות סמוכות שסכומן שווה לשתי זוויות ישרות, שני הקווים הישרים יהיו בקו ישר זה עם זה; מש"ל.

אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה, הם יוצרים זוויות קודקודיות השוות זו לזו.

יהיו שני הקווים הישרים AB , AC חותכים זה את זה בנקודה E. אומר אני שהזווית AEF שווה לזווית DEB , והזווית CEB שווה לזווית AED .

כי מאחר שהקו הישר AE עומד על הקו הישר $\Gamma\Delta$ ויוצר את הזוויות ΓEA , $AE\Delta$, הזוויות ΓEA , $AE\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. ושוב, מאחר שהקו הישר ΔE עומד על הקו הישר AB ויוצר את הזוויות ΔEB , $AE\Delta$, הזוויות ΔEB , $AE\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. אך הוכח שגם הזוויות ΓEA , $AE\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן הזוויות ΓEA , $AE\Delta$ שוות לזוויות $AE\Delta$, $BE\Delta$. תוחסר הזווית המשותפת $AE\Delta$; לכן השארית ΓEA שווה לשארית $BE\Delta$. ובאותו אופן יוכח שגם הזוויות ΓEB , ΔEA שוות.

לפיכך, אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה, הם יוצרים זוויות קודקודיות השוות זו לזו; מש"ל.

בכל משולש, אם מאריכים אחת מצלעותיו, הזווית החיצונית גדולה מכל אחת משתי הזוויות הפנימיות שמולה.

יהי המשולש $AB\Gamma$, ותוארך צלעו $B\Gamma$ אל Δ . אומר אני שהזווית החיצונית $A\Gamma\Delta$ גדולה מכל אחת מן הזוויות הפנימיות שמולה, ΓBA ו- $BA\Gamma$.

תיחצה $A\Gamma$ בנקודה E ; יחובר BE ויוארך בקו ישר אל Z ; יונח EZ השווה ל- BE ; יחובר $Z\Gamma$ ויוארך $A\Gamma$ אל H .

ומאחר ש- AE שווה ל- $E\Gamma$ ו- BE שווה ל- EZ , שתי הצלעות AE , EB שוות בהתאמה לשתי הצלעות $E\Gamma$, EZ ; והזווית AEB שווה לזווית $ZE\Gamma$, שהרי הן קודקודיות. לכן הבסיס AB שווה לבסיס $Z\Gamma$, והמשולש ABE שווה למשולש $ZE\Gamma$; והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית BAE שווה לזווית $E\Gamma Z$. אך הזווית $E\Gamma\Delta$ גדולה מן

הזווית EFZ ; לפיכך הזווית $AG\Delta$ גדולה מן הזווית BAE . ובאותו אופן, אם $B\Gamma$ תיחצה, יוכח שגם הזווית $B\Gamma H$, כלומר $AG\Delta$, גדולה מן הזווית $AB\Gamma$.

לפיכך, בכל משולש, אם מאריכים אחת מצלעותיו, הזווית החיצונית גדולה מכל אחת משתי הזוויות הפנימיות שמולה; מש"ל.

בכל משולש, כל שתי זוויות הנלקחות יחד קטנות משתי זוויות ישרות. יהי המשולש $AB\Gamma$. אומר אני שכל שתי זוויות של המשולש $AB\Gamma$, בכל צירוף, קטנות משתי זוויות ישרות.

תוארך $B\Gamma$ אל Δ .

ומאחר שהזווית $AG\Delta$ חיצונית למשולש $AB\Gamma$, היא גדולה מן הזווית הפנימית שמולה $AB\Gamma$. תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת AGB ; לכן הזווית $AG\Delta$, AGB גדולות מן הזוויות $AB\Gamma$, $B\Gamma A$. אך הזוויות $AG\Delta$, AGB שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן הזוויות $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ קטנות משתי זוויות ישרות. ובאותו אופן נראה שגם הזוויות $BA\Gamma$, AGB קטנות משתי זוויות ישרות, וכן הזווית ΓAB , $AB\Gamma$.

לפיכך, בכל משולש, כל שתי זוויות הנלקחות יחד קטנות משתי זוויות ישרות; מש"ל.

בכל משולש, הצלע הגדולה מונחת מול הזווית הגדולה.

יהי המשולש $AB\Gamma$, שבו הצלע AG גדולה מן הצלע AB . אומר אני שגם הזווית $AB\Gamma$ גדולה מן הזווית $B\Gamma A$.

מאחר ש- $\angle A$ גדולה מן $\angle B$, יונח $\angle A$ השווה ל- $\angle B$; ויחובר $\angle A$.

ומאחר שהזווית $\angle ADB$ חיצונית למשולש $\triangle BDA$, היא גדולה מן הזווית הפנימית שמולה $\angle B$. אך הזווית $\angle ADB$ שווה לזווית $\angle B$, מפני שהצלע AB שווה ל- $\angle A$. לכן גם הזווית $\angle ADB$ גדולה מן הזווית $\angle B$; ועל אחת כמה וכמה הזווית $\angle B$ גדולה מן הזווית $\angle A$.

לפיכך, בכל משולש, הצלע הגדולה מונחת מול הזווית הגדולה; מש"ל.

בכל משולש, מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה.

יהי המשולש $\triangle ABC$, שבו הזווית $\angle B$ גדולה מן הזווית $\angle A$. אומר אני שגם הצלע $\angle B$ גדולה מן הצלע AB .

כי אם לא, $\angle B$ שווה ל- $\angle A$ או קטנה ממנה. $\angle A$ אינה שווה ל- $\angle B$, שכן אז גם הזווית $\angle B$ הייתה שווה לזווית $\angle A$; אך אין היא שווה לה. לכן $\angle A$ אינה שווה ל- $\angle B$. ואף $\angle A$ אינה קטנה מן $\angle B$, שכן אז גם הזווית $\angle B$ הייתה קטנה מן הזווית $\angle A$; אך אין היא קטנה ממנה. לכן $\angle A$ אינה קטנה מן $\angle B$. והוכח שגם אינה שווה לה; מכאן ש- $\angle B$ גדולה מן AB .

לפיכך, בכל משולש, מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה; מש"ל.

בכל משולש, כל שתי צלעות הנלקחות יחד גדולות מן הצלע הנותרת.

יהי המשולש $\triangle ABC$. אומר אני שכל שתי צלעות של המשולש $\triangle ABC$, בכל צירוף, גדולות מן הצלע הנותרת: $\angle A$, BA , גדולות מן $\angle B$; $\angle B$, AB , גדולות מן $\angle A$; $\angle C$, AC , גדולות מן $\angle C$.

תוארך BA אל הנקודה Δ ; יונח $A\Delta$ השווה ל- ΓA ; ויחובר $\Delta\Gamma$.

ומאחר ש- ΔA שווה ל- ΓA , גם הזווית $A\Delta\Gamma$ שווה לזווית $\Gamma A\Delta$; לכן הזווית $B\Gamma\Delta$ גדולה מן הזווית $A\Delta\Gamma$. ומאחר שבמשולש $\Delta\Gamma B$ הזווית $B\Gamma\Delta$ גדולה מן הזווית $A\Delta\Gamma$, ומול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה, הרי ΔB גדולה מן $B\Gamma$. אך ΔA שווה ל- ΓA ; לכן BA , ΓA יחד גדולות מן $B\Gamma$. ובאותו אופן נראה שגם AB , $B\Gamma$ יחד גדולות מן ΓA , וגם $B\Gamma$, ΓA יחד גדולות מן AB .

לפיכך, בכל משולש, כל שתי צלעות הנלקחות יחד גדולות מן הצלע הנותרת; מש"ל.

אם בתוך משולש נבנים מקצות אחת מצלעותיו שני קווים ישרים הנפגשים בתוכו, הקווים שנבנו יהיו יחד קטנים משתי הצלעות האחרות של המשולש, אך יכילו זווית גדולה יותר.

במשולש $AB\Gamma$, מקצות הצלע $B\Gamma$, הנקודות B , Γ , ייבנו בתוכו שני הקווים הישרים $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. אומר אני כי $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ יחד קטנים משתי הצלעות האחרות של המשולש, BA , ΓA , אך הם מכילים את הזווית $B\Delta\Gamma$ הגדולה מן הזווית $B\Delta\Gamma$.

תוארך $B\Delta$ אל E . ומאחר שבכל משולש שתי צלעות יחד גדולות מן הצלע הנותרת, במשולש ABE שתי הצלעות AB , AE גדולות מן BE . תתווסף לשתייהן $E\Gamma$; לכן BA , ΓA יחד גדולות מן BE , $E\Gamma$. ושוב, מאחר שבמשולש $\Gamma E\Delta$ שתי הצלעות ΓE , $E\Delta$ גדולות מן $\Gamma\Delta$, תתווסף לשתייהן AB ; לכן ΓE , $E\Delta$ יחד גדולות מן $\Gamma\Delta$, AB . אך הוכח כי BA , ΓA גדולות מן BE , $E\Gamma$; ועל אחת כמה וכמה BA , ΓA גדולות מן $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

ושוב, מאחר שבכל משולש הזווית החיצונית גדולה מן הזווית הפנימית שמולה, במשולש $\Gamma\Delta E$ הזווית החיצונית $B\Delta\Gamma$ גדולה מן הזווית $\Gamma E\Delta$. מאותם טעמים גם במשולש ABE הזווית החיצונית $\Gamma E B$ גדולה מן הזווית $B A \Gamma$. אך הוכח כי $B\Delta\Gamma$ גדולה מן $\Gamma E B$; ועל אחת כמה וכמה $B\Delta\Gamma$ גדולה מן $B A \Gamma$.

לפיכך, אם בתוך משולש נבנים מקצות אחת מצלעותיו שני קווים ישרים הנפגשים בתוכו, הקווים שנבנו יהיו יחד קטנים משתי הצלעות האחרות של המשולש, אך יכילו זווית גדולה יותר; מש"ל.

לבנות משלושה קווים ישרים השווים לשלושה קווים ישרים נתונים משולש. לשם כך צריכים כל שניים מהם, בכל צירוף, להיות גדולים מן הנותר.

יהיו A, B, Γ שלושת הקווים הישרים הנתונים, וכל שניים מהם בכל צירוף יהיו גדולים מן הנותר: A, B מן Γ ; A, Γ מן B ; וכן B, Γ מן A . נדרש אפוא לבנות משולש מקווים השווים ל- A, B, Γ .

יונח קו ישר ΔE , סופי ב- Δ ואינסופי לכיוון E ; יונח ΔZ השווה ל- A, ZH השווה ל- B , ו- $H\Theta$ השווה ל- Γ . במרכז Z ובמרחק $Z\Delta$ יתואר המעגל $\Delta K\Lambda$; ושוב, במרכז H ובמרחק $H\Theta$ יתואר המעגל $K\Lambda\Theta$; ויחברו KZ, KH . אומר אני כי המשולש KZH נבנה משלושה קווים ישרים השווים ל- A, B, Γ .

כי מאחר שהנקודה Z היא מרכז המעגל $\Delta K\Lambda$, שווה ל- ZK ; אך $Z\Delta$ שווה ל- A . לכן גם KZ שווה ל- A . ושוב, מאחר שהנקודה H היא מרכז המעגל $K\Lambda\Theta$, שווה ל- HK ; אך $H\Theta$ שווה ל- Γ . לכן גם KH שווה ל- Γ . וגם ZH שווה ל- B ; לפיכך שלושת הקווים הישרים KZ, ZH, HK שווים לשלושת הקווים A, B, Γ .

לפיכך משלושת הקווים הישרים KZ , ZH , HK , השווים לשלושת הקווים הישרים הנתונים A , B , Γ , נבנה המשולש KZH ; כנדרש לעשות.

לבנות בנקודה נתונה שעל קו ישר נתון זווית קווית השווה לזווית קווית נתונה.

יהי AB הקו הישר הנתון, תהי A הנקודה הנתונה שעליו, ותהי ΔFE הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לבנות בנקודה A שעל הקו הישר הנתון AB זווית קווית השווה לזווית הקווית הנתונה ΔFE .

על כל אחד מן הקווים $\Gamma\Delta$, ΓE יילקחו נקודות כלשהן Δ , E , ויחובר ΔE . משלושה קווים ישרים השווים לשלושת הקווים $\Gamma\Delta$, ΔE , ΓE ייבנה המשולש AZH , כך ש- $\Gamma\Delta$ שווה ל- ΓE , AZ שווה ל- AH , וגם ΔE שווה ל- ZH .

ומאחר ששתי הצלעות ΓE , $\Delta\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות AH , ZA , והבסיס ΔE שווה לבסיס ZH , הזווית ΔFE שווה לזווית ZAH .

לפיכך בנקודה הנתונה A שעל הקו הישר הנתון AB נבנתה הזווית הקווית ZAH השווה לזווית הקווית הנתונה ΔFE ; כנדרש לעשות.

אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, אך הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים באחד גדולה מן הזווית המתאימה באחר, גם בסיסו יהיה גדול מבסיס האחר.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ שני משולשים ששתי צלעותיהם AB , $A\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות AB , ΔZ — ΔE ל- ΔE ו- $A\Gamma$ ל- ΔZ — ותהי הזווית שב- A גדולה מן הזווית שב- Δ . אומר אני שגם הבסיס $B\Gamma$ גדול מן הבסיס EZ .

מאחר שהזווית $\angle BAF$ גדולה מן הזווית $\angle EAZ$, תיכנה בנקודה Δ שעל הקו הישר AE הזווית $\angle EAH$ השווה לזווית $\angle BAF$; יונח $\angle H$ השווה לאחד משני הקווים AF , ΔZ ; ויחברו ZH , EH .

ומאחר ש- $\angle AB$ שווה ל- $\angle AE$ ו- $\angle AF$ שווה ל- $\angle AH$, שתי הצלעות BA , AF שוות בהתאמה לשתי הצלעות EA , ΔH ; והזווית $\angle BAF$ שווה לזווית $\angle EAH$. לכן הבסיס BF שווה לבסיס EH . ושוב, מאחר ש- $\angle AZ$ שווה ל- $\angle AH$, גם הזווית $\angle \Delta HZ$ שווה לזווית $\angle \Delta ZH$; לכן הזווית $\angle \Delta ZH$ גדולה מן הזווית $\angle EHZ$, ועל אחת כמה וכמה הזווית $\angle EZH$ גדולה מן הזווית $\angle EHZ$. ומאחר שבמשולש $\angle EZH$ הזווית $\angle EZH$ גדולה מן הזווית $\angle EHZ$, ומול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה, גם הצלע EH גדולה מן EZ . אך EH שווה ל- BF ; לכן גם BF גדול מן EZ .

לפיכך, אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, אך הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים באחד גדולה מן הזווית המתאימה באחר, גם בסיסו יהיה גדול מבסיס האחר; מש"ל.

אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, אך בסיס האחד גדול מבסיס האחר, גם הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים באחד תהיה גדולה מן הזווית המתאימה באחר.

יהיו $\angle ABF$, $\angle \Delta EZ$ שני משולשים ששתי צלעותיהם AB , AF שוות בהתאמה לשתי הצלעות AB — ΔZ , $\angle AE$ ל- $\angle AF$ ל- $\angle \Delta Z$ — ויהי הבסיס BF גדול מן הבסיס EZ . אומר אני שגם הזווית $\angle BAF$ גדולה מן הזווית $\angle EAZ$.

כי אם לא, היא שווה לה או קטנה ממנה. הזווית $\angle BAF$ אינה שווה לזווית $\angle EAZ$, שכן אז גם הבסיס BF היה שווה לבסיס EZ ; אך אין הוא שווה לו. לכן הזווית

$BA\Gamma$ אינה שווה לזווית $E\Delta Z$. ואף הזווית $BA\Gamma$ אינה קטנה מן $E\Delta Z$, שכן אז גם הבסיס $B\Gamma$ היה קטן מן הבסיס EZ ; אך אין הוא קטן ממנו. לכן הזווית $BA\Gamma$ אינה קטנה מן $E\Delta Z$. והוכח שאף אינה שווה לה; מכאן שהזווית $BA\Gamma$ גדולה מן $E\Delta Z$.

לפיכך, אם לשני משולשים שתי צלעות השוות בהתאמה לשתי צלעות, אך בסיס האחד גדול מבסיס האחר, גם הזווית הכלולה בין הקווים הישרים השווים באחד תהיה גדולה מן הזווית המתאימה באחר; מש"ל.

אם לשני משולשים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע אחת השווה לצלע אחת — בין שהיא הצלע הסמוכה לזוויות השוות ובין שהיא הצלע המונחת מול אחת הזוויות השוות — גם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה, וכן הזווית הנותרת תהיה שווה לזווית הנותרת.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ שני משולשים ששתי זוויותיהם $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ שוות בהתאמה לשתי הזוויות $AB\Gamma$ — $E\Delta Z$, $E\Delta Z$ — $B\Gamma A$ ו- $E\Delta Z$ — ותהי תחילה הצלע הסמוכה לזוויות השוות $B\Gamma$ שווה לצלע EZ . אומר אני שגם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה: AB ל- ΔE ו- $A\Gamma$ ל- ΔZ ; וכן הזווית הנותרת $BA\Gamma$ תהיה שווה לזווית הנותרת $E\Delta Z$.

כי אם AB אינה שווה ל- ΔE , אחת מהן גדולה. תהי AB הגדולה; יונח BH השווה ל- ΔE ; ויחובר $H\Gamma$.

ומאחר ש- BH שווה ל- ΔE ו- $B\Gamma$ שווה ל- EZ , שתי הצלעות BH , $B\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΔE , EZ ; והזווית HBF שווה לזווית ΔEZ . לכן הבסיס $H\Gamma$ שווה לבסיס ΔZ , והמשולש HBF שווה למשולש ΔEZ ; והזוויות הנותרות

יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית HGB שווה לזווית ΔZE . אך הונח כי ΔZE שווה ל- BGA ; לכן גם BGH שווה ל- BGA — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך AB אינה בלתי־שווה ל- ΔE ; מכאן שהיא שווה לה. וגם BG שווה ל- EZ ; לכן שתי הצלעות AB, BG שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta E, EZ$, והזווית ABG שווה לזווית ΔEZ . מכאן שהבסיס AG שווה לבסיס ΔZ , והזווית הנותרת BAG שווה לזווית הנותרת ΔZ .

ועתה יהיו שוות הצלעות המונחות מול הזוויות השוות, כגון AB השווה ל- ΔE . אומר אני שוב שגם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה — AG ל- ΔZ ו- BG ל- EZ — וכן הזווית הנותרת BAG שווה לזווית הנותרת ΔZ .

כי אם BG אינה שווה ל- EZ , אחת מהן גדולה. תהי, אם אפשר, BG הגדולה; יונח $B\Theta$ השווה ל- EZ ; ויחובר $A\Theta$. ומאחר ש- $B\Theta$ שווה ל- EZ ו- AB שווה ל- ΔE , שתי הצלעות $AB, B\Theta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta E, EZ$; והן כוללות זוויות שוות. לכן הבסיס $A\Theta$ שווה לבסיס ΔZ , והמשולש $AB\Theta$ שווה למשולש ΔEZ ; והזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית $B\Theta A$ שווה לזווית EZA . אך EZA שווה ל- BGA ; מכאן שבמשולש $A\Theta G$ הזווית החיצונית $B\Theta A$ שווה לזווית הפנימית שמולה BGA , וזה בלתי־אפשרי. לפיכך BG אינה בלתי־שווה ל- EZ ; מכאן שהיא שווה לה. וגם AB שווה ל- ΔE ; לכן שתי הצלעות AB, BG שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta E, EZ$, והן כוללות זוויות שוות. מכאן שהבסיס AG שווה לבסיס ΔZ , המשולש ABG שווה למשולש ΔEZ , והזווית הנותרת BAG שווה לזווית הנותרת ΔZ .

לפיכך, אם לשני משולשים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע אחת השווה לצלע אחת — בין שהיא הצלע הסמוכה לזוויות השוות ובין שהיא הצלע המונחת מול אחת הזוויות השוות — גם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה, וכן הזווית הנותרת תהיה שווה לזווית הנותרת; מש"ל.

אם קו ישר הנופל על שני קווים ישרים יוצר זוויות מתחלפות השוות זו לזו, שני הקווים הישרים יהיו מקבילים זה לזה.

יהי הקו הישר EZ נופל על שני הקווים הישרים $AB, \Gamma\Delta$ ויוצר את הזוויות המתחלפות $AEZ, EZ\Delta$ השוות זו לזו. אומר אני כי AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

כי אם לא, כאשר יוארכו $AB, \Gamma\Delta$ הם ייפגשו בצד B, Δ או בצד A, Γ . יוארכו וייפגשו בצד B, Δ בנקודה H. אז במשולש HEZ הזווית החיצונית AEZ שווה לזווית הפנימית שמולה EZH, וזה בלתי אפשרי. לפיכך $AB, \Gamma\Delta$, כאשר יוארכו, לא ייפגשו בצד B, Δ . ובאותו אופן יוכח שלא ייפגשו גם בצד A, Γ . וקווים שאינם נפגשים באף אחד משני הצדדים הם מקבילים; לכן AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

לפיכך, אם קו ישר הנופל על שני קווים ישרים יוצר זוויות מתחלפות השוות זו לזו, שני הקווים הישרים יהיו מקבילים; מש"ל.

אם קו ישר הנופל על שני קווים ישרים יוצר זווית חיצונית השווה לזווית הפנימית שמולה באותו צד, או זווית פנימיות באותו צד השוות יחד לשתי זוויות ישרות, שני הקווים הישרים יהיו מקבילים זה לזה.

יהי הקו הישר EZ נופל על שני הקווים הישרים $AB, \Gamma\Delta$ ויוצר את הזווית החיצונית EHB השווה לזווית הפנימית שמולה באותו צד $H\Theta\Delta$, או את הזוויות

הפנימיות באותו צד $BH\theta$, $H\theta\Delta$ השוות יחד לשתי זוויות ישרות. אומר אני כי AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

כי מאחר שהזווית EHB שווה לזווית $H\theta\Delta$, והזווית EHB שווה לזווית $AH\theta$, גם $AH\theta$ שווה ל- $H\theta\Delta$; ואלה זוויות מתחלפות. לכן AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

ושוב, מאחר שהזוויות $BH\theta$, $H\theta\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות, וגם הזוויות $AH\theta$, $BH\theta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות, הזוויות $AH\theta$, $BH\theta$ שוות לזוויות $BH\theta$, $H\theta\Delta$. תוחסר הזווית המשותפת $BH\theta$; לכן השארית $AH\theta$ שווה לשארית $H\theta\Delta$. ואלה זוויות מתחלפות; לכן AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

לפיכך, אם קו ישר הנופל על שני קווים ישרים יוצר זווית חיצונית השווה לזווית הפנימית שמולה באותו צד, או זווית פנימיות באותו צד השוות יחד לשתי זוויות ישרות, שני הקווים הישרים יהיו מקבילים; מש"ל.

קו ישר הנופל על קווים ישרים מקבילים יוצר זוויות מתחלפות השוות זו לזו, זווית חיצונית השווה לזווית הפנימית שמולה, וזוויות פנימיות באותו צד השוות יחד לשתי זוויות ישרות.

יהי הקו הישר EZ נופל על הקווים הישרים המקבילים AB , $\Gamma\Delta$. אומר אני שהוא יוצר את הזוויות המתחלפות $AH\theta$, $H\theta\Delta$ שוות; את הזווית החיצונית EHB שווה לזווית הפנימית שמולה $H\theta\Delta$; ואת הזוויות הפנימיות באותו צד $BH\theta$, $H\theta\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

כי אם הזווית $AH\theta$ אינה שווה לזווית $H\theta\Delta$, אחת מהן גדולה. תהי $AH\theta$ הגדולה; תתוסף לשתיהן הזוויות המשותפת $BH\theta$. לכן הזוויות $AH\theta$, $BH\theta$ גדולות מן הזוויות $BH\theta$, $H\theta\Delta$. אך הזוויות $AH\theta$, $BH\theta$ שוות יחד לשתי

זוויות ישרות; לפיכך $BH\theta$, $H\theta\Delta$ קטנות משתי זוויות ישרות. ושני קווים המוארכים ללא גבול מן הצד שבו סכום הזוויות קטן משתי זוויות ישרות נפגשים. לכן AB , $\Gamma\Delta$, כאשר יוארכו ללא גבול, ייפגשו; אך אין הם נפגשים, מפני שהונח שהם מקבילים. לפיכך הזווית $AH\theta$ אינה בלתי־שווה לזווית $H\theta\Delta$; מכאן שהיא שווה לה. אך $AH\theta$ שווה ל־ EHB ; לכן גם EHB שווה ל־ $H\theta\Delta$. תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת $BH\theta$; לכן הזוויות EHB , $BH\theta$ שוות לזוויות $H\theta\Delta$, $BH\theta$. אך EHB , $BH\theta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך גם $BH\theta$, $H\theta\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

לפיכך, קו ישר הנופל על קווים ישרים מקבילים יוצר זוויות מתחלפות השוות זו לזו, זווית חיצונית השווה לזווית הפנימית שמולה, וזוויות פנימיות באותו צד השוות יחד לשתי זוויות ישרות; מש"ל.

קווים ישרים המקבילים לאותו קו ישר מקבילים גם זה לזה.

יהי כל אחד מן הקווים AB , $\Gamma\Delta$ מקביל ל־ EZ . אומר אני שגם AB מקביל ל־ $\Gamma\Delta$.

ייפול עליהם הקו הישר HK .

ומאחר שהקו הישר HK נופל על הקווים המקבילים AB , EZ , הזווית AHK שווה לזווית $H\theta Z$. ושוב, מאחר שהקו הישר HK נופל על הקווים המקבילים EZ , $\Gamma\Delta$, הזווית $H\theta Z$ שווה לזווית HKA . והוכח גם כי AHK שווה ל־ $H\theta Z$; לכן AHK שווה ל־ HKA . ואלה זוויות מתחלפות; לכן AB מקביל ל־ $\Gamma\Delta$.

מש"ל.

להעביר דרך נקודה נתונה קו ישר המקביל לקו ישר נתון.

תהי A הנקודה הנתונה, ויהי BF הקו הישר הנתון. נדרש אפוא להעביר דרך הנקודה A קו ישר המקביל לקו הישר BF .

תילקח על BF נקודה כלשהי Δ , ויחובר $A\Delta$. בנקודה A שעל הקו הישר ΔA תיבנה הזווית ΔAE השווה לזווית $A\Delta F$; והקו הישר AZ יוארך בקו ישר עם EA .

ומאחר שהקו הישר $A\Delta$, הנופל על שני הקווים הישרים BF , EZ , יצר את הזוויות המתחלפות $A\Delta F$, EAD שוות זו לזו, EAZ מקביל ל- BF .

לפיכך דרך הנקודה הנתונה A הועבר הקו הישר EAZ המקביל לקו הישר הנתון BF ; כנדרש לעשות.

בכל משולש, אם מאריכים אחת מצלעותיו, הזווית החיצונית שווה לשתי הזוויות הפנימיות שמולה יחד; ושלוש הזוויות הפנימיות של המשולש שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

יהי המשולש ABF , ותוארך צלעו BF אל Δ . אומר אני שהזווית החיצונית $A\Delta F$ שווה לשתי הזוויות הפנימיות שמולה ABF , FAB יחד, וששלוש הזוויות הפנימיות של המשולש, ABF , BFA , FAB , שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

דרך הנקודה F יועבר FE המקביל לקו הישר AB .

ומאחר ש- AB מקביל ל- FE והקו AF נופל עליהם, הזוויות המתחלפות BAF , AFE שוות זו לזו. ושוב, מאחר ש- AB מקביל ל- FE והקו הישר BA נופל עליהם, הזווית החיצונית EFA שווה לזווית הפנימית שמולה ABF . והוכח גם

כי AGE שווה ל- $BA\Gamma$; לפיכך הזווית השלמה $A\Gamma\Delta$ שווה לשתי הזוויות הפנימיות שמולה $BA\Gamma, AB\Gamma$ יחד.

תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת AGB ; לכן הזוויות $A\Gamma\Delta, A\Gamma B$ שוות יחד לשלוש הזוויות $AB\Gamma, B\Gamma A, \Gamma AB$. אך הזוויות $A\Gamma\Delta, A\Gamma B$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך גם הזוויות $A\Gamma B, \Gamma BA, \Gamma AB$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

לפיכך, בכל משולש, אם מאריכים אחת מצלעותיו, הזווית החיצונית שווה לשתי הזוויות הפנימיות שמולה יחד; ושלוש הזוויות הפנימיות של המשולש שוות יחד לשתי זוויות ישרות; מש"ל.

הקווים הישרים המחברים באותם צדדים קווים ישרים שווים ומקבילים הם עצמם שווים ומקבילים.

יהיו $AB, \Gamma\Delta$ שווים ומקבילים, ויחברו אותם באותם צדדים הקווים הישרים $A\Gamma, B\Delta$. אומר אני שגם $A\Gamma, B\Delta$ שווים ומקבילים.

יחובר $B\Gamma$. ומאחר ש- AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$ והקו $B\Gamma$ נופל עליהם, הזוויות המתחלפות $AB\Gamma, B\Gamma\Delta$ שוות זו לזו. ומאחר ש- AB שווה ל- $\Gamma\Delta$ ו- $B\Gamma$ משותף, שתי הצלעות $AB, B\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $B\Gamma, \Gamma\Delta$; והזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית $B\Gamma\Delta$. לכן הבסיס $A\Gamma$ שווה לבסיס $B\Delta$, והמשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $B\Gamma\Delta$; והזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית $A\Gamma B$ שווה לזווית $\Gamma B\Delta$. ומאחר שהקו הישר $B\Gamma$ הנופל על שני הקווים הישרים $A\Gamma, B\Delta$, יצר זוויות מתחלפות השוות זו לזו, $A\Gamma$ מקביל ל- $B\Delta$. והוכח גם כי הוא שווה לו.

לפיכך, הקווים הישרים המחברים באותם צדדים קווים ישרים שווים ומקבילים הם עצמם שווים ומקבילים; מש"ל.

בשטחים מקביליתיים הצלעות והזוויות הנגדיות שוות זו לזו, והאלכסון חוצה כל אחד מהם לשניים.

יהי $AFDB$ שטח מקביליתי, ויהי BF אלכסונו. אומר אני שבמקבילית $AFDB$ הצלעות והזוויות הנגדיות שוות זו לזו, ושהאלכסון BF חוצה אותה לשניים.

כי מאחר ש- AB מקביל ל- FD והקו הישר BF נופל עליהם, הזוויות המתחלפות ABF , BFD שוות זו לזו. ושוב, מאחר ש- AF מקביל ל- BD והקו BF נופל עליהם, הזוויות המתחלפות AFB , FBD שוות זו לזו. הנה שני המשולשים ABF , BFD , ששתי הזוויות ABF , BFD שוות בהם בהתאמה לשתי הזוויות BFD , FBD , וצלע אחת הסמוכה לזוויות השוות, BF , משותפת ושווה לעצמה. לכן גם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה, והזוויות הנותרות לזוויות הנותרות. לפיכך הצלע AB שווה ל- FD , הצלע AF שווה ל- BD , וגם הזווית BAF שווה לזווית FDB . ומאחר שהזווית ABF שווה לזווית BFD והזווית FBD שווה לזווית ABF , הזווית השלמה ABD שווה לזווית השלמה FAD . והוכח גם כי BAF שווה ל- FDB .

לפיכך, בשטחים מקביליתיים הצלעות והזוויות הנגדיות שוות זו לזו.

אומר אני שגם האלכסון חוצה את המקבילית לשניים. כי מאחר ש- AB שווה ל- FD ו- BF משותף, שתי הצלעות AB , BF שוות בהתאמה לשתי הצלעות FD , BF ; והזווית ABF שווה לזווית BFD . לכן גם הבסיס AF שווה ל- BD , והמשולש ABF שווה למשולש BFD .

לפיכך האלכסון $B\Gamma$ חוצה את המקבילית $AB\Gamma\Delta$ לשניים; מש"ל.

מקביליות שעל אותו בסיס ובין אותם מקבילים שוות זו לזו.

יהיו המקביליות $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ על אותו בסיס $B\Gamma$ ובין אותם מקבילים AZ , $B\Gamma$. אומר אני שהמקבילית $AB\Gamma\Delta$ שווה למקבילית $EB\Gamma Z$.

כי מאחר ש- $AB\Gamma\Delta$ מקבילית, $A\Delta$ שווה ל- $B\Gamma$. מאותם טעמים גם EZ שווה ל- $B\Gamma$; לכן גם $A\Delta$ שווה ל- EZ . ו- ΔE משותף; לפיכך הקו השלם AE שווה לקו השלם AZ . וגם AB שווה ל- $\Delta\Gamma$. לכן שתי הצלעות EA , AB שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta\Gamma$, $Z\Delta$; והזווית $Z\Delta\Gamma$ שווה לזווית EAB , החיצונית לפנימית. לפיכך הבסיס EB שווה לבסיס $Z\Gamma$, והמשולש EAB שווה למשולש $\Delta Z\Gamma$. יוחסר משניהם ΔHE המשותף; לכן הטרפז הנותר $AB\Gamma\Delta$ שווה לטרפז הנותר $EB\Gamma Z$. יתווסף לשניהם המשולש המשותף $H\Gamma B$; לפיכך המקבילית השלמה $AB\Gamma\Delta$ שווה למקבילית השלמה $EB\Gamma Z$.

לפיכך, מקביליות שעל אותו בסיס ובין אותם מקבילים שוות זו לזו; מש"ל.

מקביליות שעל בסיסים שווים ובין אותם מקבילים שוות זו לזו.

יהיו המקביליות $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ על הבסיסים השווים $B\Gamma$, ZH ובין אותם המקבילים $A\Theta$, BH . אומר אני שהמקבילית $AB\Gamma\Delta$ שווה למקבילית $EZH\Theta$.

יחברו $\Gamma\Theta$, BE . ומאחר ש- $B\Gamma$ שווה ל- ZH , ו- ZH שווה ל- $E\Theta$, גם $B\Gamma$ שווה ל- $E\Theta$. והם גם מקבילים. והקווים $\Theta\Gamma$, EB מחברים אותם; והקווים המחברים באותם צדדים קווים שווים ומקבילים הם שווים ומקבילים. לכן $EB\Gamma\Theta$ מקבילית. והיא שווה ל- $AB\Gamma\Delta$, שכן יש לה עמה אותו בסיס $B\Gamma$ והיא בין

אותם מקבילים AB, AC , מאותם טעמים גם $EZH \cong$ שווה לאותה מקבילית $EBH \cong$; לפיכך המקבילית ABH שווה ל- EZH .

לפיכך, מקבילות שעל בסיסים שווים ובין אותם מקבילים שוות זו לזו; מש"ל.

משולשים שעל אותו בסיס ובין אותם מקבילים שווים זה לזה.

יהיו המשולשים ABH, BH, AC על אותו בסיס BH ובין אותם מקבילים AD, BH .
אומר אני שהמשולש ABH שווה למשולש BH, AC .

תוארך AD בשני הכיוונים אל E, Z ; דרך B יועבר BE המקביל ל- AD , ודרך H יועבר HZ המקביל ל- AD . לפיכך כל אחת מן הצורות EBH, BH, AC היא מקבילית; והן שוות, שכן הן על אותו בסיס BH ובין אותם מקבילים BE, EH, AC . והמשולש ABH הוא מחצית המקבילית EBH , שכן האלכסון AB חוצה אותה לשניים; והמשולש BH, AC הוא מחצית המקבילית BH, AC , שכן האלכסון AC חוצה אותה לשניים. לפיכך המשולש ABH שווה למשולש BH, AC .

לפיכך, משולשים שעל אותו בסיס ובין אותם מקבילים שווים זה לזה; מש"ל.

משולשים שעל בסיסים שווים ובין אותם מקבילים שווים זה לזה.

יהיו המשולשים ABH, BH, AC על הבסיסים השווים BH, EH, AC ובין אותם המקבילים AD, BH, AC . אומר אני שהמשולש ABH שווה למשולש BH, AC .

תוארך AD בשני הכיוונים אל H, Θ ; דרך B יועבר BH המקביל ל- AD , ודרך Z יועבר $Z\Theta$ המקביל ל- AD . לפיכך כל אחת מן הצורות HBH, BH, AC היא מקבילית; והמקבילית HBH שווה ל- BH, AC , שכן הן על הבסיסים השווים BH, EH, AC ובין אותם המקבילים AD, BH, AC . והמשולש ABH הוא מחצית

המקבילית $HBFA$, שכן האלכסון AB חוצה אותה לשניים; והמשולש ZEA הוא מחצית המקבילית $\Delta EZ\Theta$, שכן האלכסון ΔZ חוצה אותה לשניים. לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש ΔEZ .

לפיכך, משולשים שעל בסיסים שווים ובין אותם מקבילים שווים זה לזה; מש"ל.

משולשים שווים שעל אותו בסיס ובאותו צד נמצאים בין אותם מקבילים. יהיו המשולשים השווים $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ על אותו בסיס $B\Gamma$ ובאותו צד שלו. אומר אני שהם נמצאים גם בין אותם מקבילים. יחובר ΔA . אומר אני כי ΔA מקביל ל- $B\Gamma$.

כי אם לא, דרך הנקודה A יועבר AE המקביל לקו הישר $B\Gamma$, ויחובר EF . לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $EB\Gamma$, שכן הוא על אותו בסיס $B\Gamma$ ובין אותם מקבילים. אך $AB\Gamma$ שווה ל- $\Delta B\Gamma$; לכן גם $\Delta B\Gamma$ שווה ל- $EB\Gamma$ — הגדול לקטן — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך AE אינו מקביל ל- $B\Gamma$. ובאותו אופן נראה ששום קו אחר אינו מקביל לו מלבד ΔA ; לכן ΔA מקביל ל- $B\Gamma$.

לפיכך, משולשים שווים שעל אותו בסיס ובאותו צד נמצאים בין אותם מקבילים; מש"ל.

משולשים שווים שעל בסיסים שווים ובאותו צד נמצאים בין אותם מקבילים. יהיו המשולשים השווים $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ על הבסיסים השווים $B\Gamma$, ΓE ובאותו צד. אומר אני שהם נמצאים גם בין אותם מקבילים.

יחובר AA . אומר אני כי AA מקביל ל- BE .

כי אם לא, דרך A יועבר AZ המקביל ל- BE , ויחובר ZE . לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $Z\Gamma E$, שכן הם על הבסיסים השווים ΓE , $B\Gamma$ ובין אותם המקבילים BE , AZ . אך המשולש $AB\Gamma$ שווה ל- $\Delta\Gamma E$; לכן גם $\Delta\Gamma E$ שווה למשולש $Z\Gamma E$ — הגדול לקטן — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך AZ אינו מקביל ל- BE . ובאותו אופן נראה ששום קו אחר אינו מקביל לו מלבד AA ; לכן AA מקביל ל- BE .

לפיכך, משולשים שווים שעל בסיסים שווים ובאותו צד נמצאים בין אותם מקבילים; מש"ל.

אם למקבילית ולמשולש אותו בסיס והם בין אותם מקבילים, המקבילית היא כפליים מן המשולש.

תהי למקבילית $AB\Gamma\Delta$ ולמשולש $EB\Gamma$ אותו בסיס $B\Gamma$, ויהיו בין אותם מקבילים AE , BE . אומר אני שהמקבילית $AB\Gamma\Delta$ היא כפליים מן המשולש $EB\Gamma$.

יחובר $A\Gamma$. הנה המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $EB\Gamma$, שכן הוא עמו על אותו בסיס $B\Gamma$ ובין אותם מקבילים AE , BE . אך המקבילית $AB\Gamma\Delta$ היא כפליים מן המשולש $AB\Gamma$, שכן האלכסון $A\Gamma$ חוצה אותה לשניים; לכן המקבילית $AB\Gamma\Delta$ היא גם כפליים מן המשולש $EB\Gamma$.

לפיכך, אם למקבילית ולמשולש אותו בסיס והם בין אותם מקבילים, המקבילית היא כפליים מן המשולש; מש"ל.

לבנות מקבילית השווה למשולש נתון, בזווית קווית נתונה.

יהי $AB\Gamma$ המשולש הנתון, ותהי Δ הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לבנות מקבילית השווה למשולש $AB\Gamma$ בזווית הקווית Δ .

ייחצה $B\Gamma$ בנקודה E , ויחובר AE ; ועל הקו הישר AE , בנקודה E שעליו, תיבנה הזווית ΓEZ השווה לזווית Δ . דרך A יועבר AH המקביל ל- EF , ודרך Γ יועבר ΓH המקביל ל- EZ ; לפיכך $ZEGH$ מקבילית. ומאחר ש- BE שווה ל- EF , גם המשולש ABE שווה למשולש AEG , שכן הם על הבסיסים השווים BE , EF ובין אותם מקבילים $B\Gamma$, AH . לפיכך המשולש $AB\Gamma$ הוא כפליים מן המשולש AEG . וגם המקבילית $ZEGH$ היא כפליים מן המשולש AEG , שכן יש להם אותו בסיס והם בין אותם מקבילים. לפיכך המקבילית $ZEGH$ שווה למשולש $AB\Gamma$; והזווית ΓEZ שבה שווה לזווית הנתונה Δ .

לפיכך נבנתה המקבילית $ZEGH$ השווה למשולש הנתון $AB\Gamma$, בזווית ΓEZ השווה לזווית Δ ; כנדרש לעשות.

בכל מקבילית, המשלימים של המקביליות שסביב האלכסון שווים זה לזה.

תהי $AB\Gamma\Delta$ מקבילית ויהי $A\Gamma$ אלכסונה; תהיינה $Z\Theta$, ZH המקביליות שסביב $A\Gamma$, ויהיו BK , $K\Delta$ הקרויים משלימים. אומר אני שהמשלים BK שווה למשלים $K\Delta$.

מאחר ש- $AB\Gamma\Delta$ מקבילית ו- $A\Gamma$ אלכסונה, המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $A\Gamma\Delta$. ושוב, מאחר ש- $E\Theta$ מקבילית ו- AK אלכסונה, המשולש AEK שווה למשולש $A\Theta K$. מאותם טעמים גם המשולש $KZ\Gamma$ שווה למשולש $KH\Gamma$. לכן, מאחר שהמשולש AEK שווה למשולש $A\Theta K$ והמשולש $KZ\Gamma$ שווה למשולש

KHΓ, המשולש AEK בצירוף KHΓ שווה למשולש AΘK בצירוף KZΓ. אך גם המשולש השלם ABΓ שווה למשולש השלם AΔΓ; לפיכך המשלים הנותר BK שווה למשלים הנותר KA.

לפיכך, בכל שטח מקביליתי, המשלימים של המקביליות שסביב האלכסון שווים זה לזה; מש"ל.

לבנות בצמוד לקו ישר נתון מקבילית השווה למשולש נתון, בזווית קווית נתונה. יהי AB הקו הישר הנתון, יהי Γ המשולש הנתון, ותהי Δ הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לבנות בצמוד לקו הישר הנתון AB מקבילית השווה למשולש הנתון Γ, בזווית השווה לזווית Δ.

תיבנה המקבילית BEZH השווה למשולש Γ, בזווית EBH השווה לזווית Δ; ותונח כך ש־BE תהיה בקו ישר עם AB. יוארך ZH אל Θ; דרך A יועבר AΘ המקביל לאחד משני הקווים BH, EZ, ויחובר ΘB. ומאחר שהקו הישר ΘZ נופל על המקבילים EZ, AΘ, הזוויות AΘZ, ΘZE שוות יחד לשתי זוויות ישרות. לפיכך שתי הזוויות HZE, BΘH קטנות משתי זוויות ישרות; ושני קווים המוארכים ללא גבול מן הצד שבו סכום הזוויות קטן משתי זוויות ישרות נפגשים. לכן ZE, ΘB ייפגשו בהארכתם. יוארכו וייפגשו בנקודה K; דרך K יועבר KA המקביל לאחד משני הקווים EA, ZΘ; ויוארכו HB, ΘA אל הנקודות M, Λ. לפיכך ΘΛKZ מקבילית ו־ΘK אלכסונה; המקביליות שסביב ΘK הן AH, ME, והקרויים משלימים הם AB, BZ. לפיכך AB שווה ל־BZ. אך BZ שווה למשולש Γ; לכן גם AB שווה ל־Γ. ומאחר שהזווית HBE שווה לזווית ABM, ואילו HBE שווה ל־Δ, גם ABM שווה לזווית Δ.

לפיכך נבנתה בצמוד לקו הישר הנתון AB המקבילית AB , השווה למשולש הנתון Γ , בזווית ABM השווה לזווית Δ ; כנדרש לעשות.

לבנות מקבילית השווה לצורה קווית נתונה, בזווית קווית נתונה.

תהי $AB\Gamma\Delta$ הצורה הקווית הנתונה, ותהי E הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לבנות מקבילית השווה לצורה הקווית $AB\Gamma\Delta$ בזווית הנתונה E .

יחובר AB , ותיבנה המקבילית $Z\Theta$ השווה למשולש ABA , בזווית ΘKZ השווה ל- E ; ובצמוד לקו הישר $H\Theta$ תיבנה המקבילית HM השווה למשולש $AB\Gamma$, בזווית $H\Theta M$ השווה ל- E . ומאחר שהזווית E שווה לכל אחת מן הזוויות ΘKZ , $H\Theta M$, גם ΘKZ שווה ל- $H\Theta M$. תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת $K\Theta H$; לפיכך הזוויות $K\Theta H$, $ZK\Theta$ שוות יחד לזוויות $H\Theta M$, $K\Theta H$. אך הזוויות $ZK\Theta$, $K\Theta H$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן גם הזוויות $H\Theta M$, $K\Theta H$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. הנה על הקו הישר $H\Theta$, ובנקודה Θ שעליו, שני הקווים $K\Theta$, ΘM שאינם באותו צד יוצרים זוויות סמוכות השוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך $K\Theta$ נמצא בקו ישר עם ΘM . ומאחר שהקו הישר ΘH נופל על המקבילים KM , ZH , הזוויות המתחלפות ΘHZ , $M\Theta H$ שוות זו לזו. תתווסף לשתייהן הזווית המשותפת $\Theta H\Lambda$; לפיכך הזוויות $\Theta H\Lambda$, $M\Theta H$ שוות יחד לזוויות ΘHZ , $\Theta H\Lambda$. אך הזוויות $\Theta H\Lambda$, $M\Theta H$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן גם הזוויות ΘHZ , $\Theta H\Lambda$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות, ולפיכך ZH נמצא בקו ישר עם $H\Lambda$. ומאחר ש- ZK שווה ומקביל ל- ΘH , וגם ΘH שווה ומקביל ל- $M\Lambda$, הרי שגם KZ שווה ומקביל ל- $M\Lambda$; והקווים הישרים KM , $Z\Lambda$ מחברים אותם. לכן גם KM , $Z\Lambda$ שווים ומקבילים; לפיכך $KZAM$ מקבילית.

ומאחר שהמשולש $AB\Delta$ שווה למקבילית $Z\Theta$ והמשולש $\Delta B\Gamma$ שווה למקבילית HM , הצורה הקווית השלמה $AB\Gamma\Delta$ שווה למקבילית השלמה $KZAM$. לפיכך נבנתה המקבילית $KZAM$ השווה לצורה הקווית הנתונה $AB\Gamma\Delta$, בזווית ZKM השווה לזווית הנתונה E ; כנדרש לעשות. לתאר ריבוע על קו ישר נתון.

יהי AB הקו הישר הנתון. נדרש אפוא לתאר ריבוע על הקו הישר AB . מן הנקודה A שעל הקו הישר AB יועבר $A\Gamma$ בזווית ישרה אליו, ויונח $A\Delta$ שווה ל- AB . דרך הנקודה Δ יועבר ΔE המקביל ל- AB , ודרך הנקודה B יועבר BE המקביל ל- $A\Delta$. לפיכך $A\Delta EB$ מקבילית; לכן AB שווה ל- ΔE ו- $A\Delta$ שווה ל- BE . אך AB שווה ל- $A\Delta$; לפיכך ארבעת הקווים BA , $A\Delta$, ΔE , EB שווים זה לזה, והמקבילית $A\Delta EB$ שוות-צלעות. אומר אני שהיא גם ישרת-זווית. כי מאחר שהקו הישר $A\Delta$ נופל על המקבילים AB , ΔE , הזוויות BAA , $A\Delta E$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. והזווית BAA ישרה; לפיכך גם $A\Delta E$ ישרה. ובשטחים מקביליתיים הצלעות והזוויות הנגדיות שוות זו לזו; לכן גם כל אחת מן הזוויות הנגדיות ABE , $BE\Delta$ ישרה. לפיכך $A\Delta EB$ ישרת-זווית. והוכח שהיא גם שוות-צלעות.

לפיכך היא ריבוע, והיא מתוארת על הקו הישר AB ; כנדרש לעשות. במשולשים ישרי-זווית, הריבוע שעל הצלע שמול הזווית הישרה שווה לריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית הישרה.

יהי $AB\Gamma$ משולש ישר־זווית, שזווית $BA\Gamma$ שבו ישרה. אומר אני שהריבוע שעל $B\Gamma$ שווה לריבועים שעל BA , $A\Gamma$.

יתואר הריבוע $B\Delta E\Gamma$ על $B\Gamma$, והריבועים $\Theta\Gamma$, HB על BA , $A\Gamma$; ודרך A יועבר AA המקביל לכל אחד מן BA , ΓE . ויחברו $Z\Gamma$, $A\Delta$. ומאחר שכל אחת מן הזוויות $BA\Gamma$, BAH ישרה, הנה על הקו הישר BA , ובנקודה A שעליו, שני הקווים $A\Gamma$, AH שאינם באותו צד יוצרים זוויות סמוכות השוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך ΓA נמצא בקו ישר עם AH . מאותם טעמים גם BA נמצא בקו ישר עם $A\Theta$. ומאחר שהזווית $\Delta B\Gamma$ שווה לזווית ZBA , שהרי שתיהן ישרות, תתווסף לשתיהן הזווית המשותפת $AB\Gamma$; לפיכך הזווית השלמה ΔBA שווה לזווית השלמה $ZB\Gamma$. ומאחר ש־ ΔB שווה ל־ $B\Gamma$ ו־ ZB שווה ל־ BA , שתי הצלעות BA , ΔB שוות בהתאמה לשתי הצלעות $B\Gamma$, ZB , והזווית ΔBA שווה לזווית $ZB\Gamma$; לפיכך הבסיס AA שווה לבסיס $Z\Gamma$, והמשולש ABA שווה למשולש $ZB\Gamma$. והמקבילית BA היא כפליים מן המשולש ABA , שכן יש להם אותו בסיס BA והם בין אותם מקבילים AA , BA ; והריבוע HB הוא כפליים מן המשולש $ZB\Gamma$, שכן גם להם אותו בסיס ZB והם בין אותם מקבילים ZB , $H\Gamma$. לפיכך גם המקבילית BA שווה לריבוע HB . ובדומה, לאחר חיבור AE , BK , יוכח שגם המקבילית ΓA שווה לריבוע $\Theta\Gamma$. לפיכך הריבוע השלם $B\Delta E\Gamma$ שווה לשני הריבועים $\Theta\Gamma$, HB . והריבוע $B\Delta E\Gamma$ מתואר על $B\Gamma$, והריבועים $\Theta\Gamma$, HB על BA , $A\Gamma$. לפיכך הריבוע שעל הצלע $B\Gamma$ שווה לריבועים שעל הצלעות BA , $A\Gamma$.

לפיכך, במשולשים ישר־זווית, הריבוע שעל הצלע שמול הזווית הישרה שווה לריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית הישרה; מש״ל.

אם במשולש הריבוע שעל אחת הצלעות שווה לריבועים שעל שתי הצלעות הנותרות של המשולש, הזווית הכלולה בין שתי הצלעות הנותרות ישרה.

יהי הריבוע שעל אחת מצלעות המשולש $AB\Gamma$, הצלע $B\Gamma$, שווה לריבועים שעל הצלעות BA , $A\Gamma$. אומר אני שהזווית BAG ישרה.

מן הנקודה A יועבר $\Delta\Delta$ בזווית ישרה לקו הישר $A\Gamma$, ויונח $\Delta\Delta$ שווה ל- BA ; ויחובר $\Delta\Gamma$. מאחר ש- ΔA שווה ל- AB , גם הריבוע שעל ΔA שווה לריבוע שעל AB . יתווסף לשניהם הריבוע שעל $A\Gamma$; לפיכך הריבועים שעל ΔA , $A\Gamma$ שווים לריבועים שעל BA , $A\Gamma$. אך הריבוע שעל $\Delta\Gamma$ שווה לריבועים שעל ΔA , $A\Gamma$, שכן הזווית $\Delta A\Gamma$ ישרה; והריבוע שעל $B\Gamma$ שווה לריבועים שעל BA , $A\Gamma$, שכן כך הונח. לפיכך הריבוע שעל $\Delta\Gamma$ שווה לריבוע שעל $B\Gamma$; ולכן גם הצלע $\Delta\Gamma$ שווה ל- $B\Gamma$. ומאחר ש- ΔA שווה ל- AB ו- $A\Gamma$ משותפת, שתי הצלעות ΔA , $A\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות BA , $A\Gamma$; והבסיס $\Delta\Gamma$ שווה לבסיס $B\Gamma$. לפיכך הזווית $\Delta A\Gamma$ שווה לזווית BAG . אך $\Delta A\Gamma$ ישרה; לכן גם BAG ישרה.

לפיכך, אם במשולש הריבוע שעל אחת הצלעות שווה לריבועים שעל שתי הצלעות הנותרות של המשולש, הזווית הכלולה בין שתי הצלעות הנותרות ישרה; מש"ל.

ספר ב

על כל מקבילית ישרת־זווית נאמר שהיא כלולה בין שני הקווים הישרים הכוללים את הזווית הישרה.

בכל שטח מקביליתי, כל אחת מן המקביליות שסביב אלכסונו, יחד עם שני המשלימים, תיקרא גנומון.

אם נתונים שני קווים ישרים, ואחד מהם נחלק למספר כלשהו של חלקים, המלבן הכלול בין שני הקווים הישרים שווה למלבנים הכלולים בין הקו שלא נחלק ובין כל אחד מן החלקים.

יהיו $A, B\Gamma$ שני קווים ישרים, וייחלק $B\Gamma$ בנקודות E, Δ באופן כלשהו. אומר אני שהמלבן הכלול בין $A, B\Gamma$ שווה למלבן הכלול בין $A, B\Delta$, בצירוף המלבן הכלול בין $A, \Delta E$, ועוד המלבן הכלול בין $A, E\Gamma$.

מן הנקודה B יועבר BZ בזווית ישרה ל־ $B\Gamma$, ויונח BH שווה ל־ A . דרך H יועבר $H\Theta$ המקביל ל־ $B\Gamma$, ודרך Δ, E, Γ יועברו $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$ המקבילים ל־ BH .

הנה $B\Theta$ שווה לשטחים $E\Theta, \Delta\Lambda, BK$ יחד. ו־ $B\Theta$ הוא המלבן הכלול בין $A, B\Gamma$, שכן הוא כלול בין $HB, B\Gamma$ ו־ BH שווה ל־ BK . A הוא המלבן הכלול בין $A, B\Delta$, שכן הוא כלול בין $HB, B\Delta$ ו־ BH שווה ל־ $\Delta\Lambda$. A הוא המלבן הכלול בין $A, \Delta E$, שכן ΔK , כלומר BH , שווה ל־ A . ובדומה, $E\Theta$ הוא המלבן הכלול בין $A, E\Gamma$. לפיכך המלבן הכלול בין $A, B\Gamma$ שווה למלבן הכלול בין $A, B\Delta$, בצירוף המלבן הכלול בין $A, \Delta E$, ועוד המלבן הכלול בין $A, E\Gamma$.

לפיכך, אם נתונים שני קווים ישרים ואחד מהם נחלק למספר כלשהו של חלקים, המלבן הכלול בין שני הקווים הישרים שווה למלבנים הכלולים בין הקו שלא נחלק ובין כל אחד מן החלקים; מש"ל.

אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, המלבנים הכלולים בין הקו השלם ובין כל אחד משני החלקים שווים יחד לריבוע שעל הקו השלם.

ייחלק הקו הישר AB באופן כלשהו בנקודה Γ . אומר אני שהמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, בצירוף המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$, שווה לריבוע שעל AB .

יתואר על AB הריבוע $A\Delta EB$, ודרך Γ יועבר ΓZ המקביל לאחד משני הקווים AD , BE .

הנה AE שווה לשטחים AZ , ΓE יחד. ו AE הוא הריבוע שעל AB ; AZ הוא המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$, שכן הוא כלול בין BA , $A\Gamma$, ΔA , ΔA שווה ל ΓE ; AB ; הוא המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, שכן BE שווה ל AB . לפיכך המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$, בצירוף המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, שווה לריבוע שעל AB .

לפיכך, אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, המלבנים הכלולים בין הקו השלם ובין כל אחד משני החלקים שווים יחד לריבוע שעל הקו השלם; מש"ל.

אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, המלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים שווה למלבן הכלול בין שני החלקים בצירוף הריבוע שעל החלק האמור.

ייחלק הקו הישר AB באופן כלשהו בנקודה Γ . אומר אני שהמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה למלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB בצירוף הריבוע שעל $B\Gamma$.

יתואר על ΓB הריבוע $\Gamma \Delta E B$; יוארך $E \Delta$ אל Z , ודרך A יועבר $A Z$ המקביל לאחד משני הקווים BE , $\Gamma \Delta$. הנה AE שווה לשטחים ΓE , $\Delta \Gamma$ יחד. AE הוא המלבן הכלול בין AB , $B \Gamma$, שכן הוא כלול בין BE , AB , BE שווה ל- $\Delta \Gamma$; $B \Gamma$ הוא המלבן הכלול בין ΓB , $A \Gamma$, שכן $\Delta \Gamma$ שווה ל- ΓB ; ΔB הוא הריבוע שעל ΓB . לפיכך המלבן הכלול בין AB , $B \Gamma$ שווה למלבן הכלול בין ΓB , $A \Gamma$ בצירוף הריבוע שעל $B \Gamma$.

לפיכך, אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, המלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים שווה למלבן הכלול בין שני החלקים בצירוף הריבוע שעל החלק האמור; מש"ל.

אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, הריבוע שעל הקו השלם שווה לריבועים שעל החלקים, בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין החלקים.

ייחלק הקו הישר AB באופן כלשהו בנקודה Γ . אומר אני שהריבוע שעל AB שווה לריבועים שעל ΓB , $A \Gamma$, בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין ΓB , $A \Gamma$.

יתואר על AB הריבוע $A \Delta E B$, ויחובר BA . דרך Γ יועבר ΓZ המקביל לאחד משני הקווים EA , ΔA , ודרך H יועבר ΘK המקביל לאחד משני הקווים AB , ΔE . ומאחר ש- ΓZ מקביל ל- ΔA והקו $B \Delta$ נופל עליהם, הזווית החיצונית $\Gamma H B$ שווה לזווית הפנימית שמולה $\Delta B A$. אך $\Delta B A$ שווה ל- $\Delta B \Gamma$, שכן גם הצלע BA שווה ל- ΔA ; לפיכך הזווית $\Gamma H B$ שווה לזווית $H B \Gamma$, ולכן גם הצלע $B \Gamma$ שווה לצלע ΓH . אך ΓB שווה ל- $H K$ ו- ΓH שווה ל- $K B$; לכן גם $H K$ שווה ל- $K B$, ולפיכך $\Gamma H K B$ שווה צלעות. אומר אני שהוא גם ישר-זווית. כי מאחר ש- ΓH מקביל ל- $B K$, הזוויות $H \Gamma B$, $K B \Gamma$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. אך $K B \Gamma$ ישרה; לכן גם $B \Gamma H$ ישרה, ומכאן שגם הזוויות הנגדיות $\Gamma H K$, $H K B$

ישרות. לפיכך ΓHKB ישר־זווית; והוכח שהוא גם שווה־צלעות, ולכן הוא ריבוע, והוא הריבוע שעל ΓB . מאותם טעמים גם ΘZ הוא ריבוע, והוא הריבוע שעל ΘH , כלומר על AG . לפיכך $\Theta Z, K\Gamma$ הם הריבועים שעל $AG, \Gamma B$. ומאחר ש־ AH שווה ל־ HE , ו־ AH הוא המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$, שכן $H\Gamma$ שווה ל־ ΓB , גם HE שווה למלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$. לפיכך AH, HE יחד שווים לפעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$. וגם $\Theta Z, K\Gamma$ הם הריבועים שעל $AG, \Gamma B$. לכן ארבעת השטחים $\Theta Z, K\Gamma, AH, HE$ שווים לריבועים שעל $AG, \Gamma B$ בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$. אך ארבעת השטחים $\Theta Z, K\Gamma, AH, HE$ הם הריבוע השלם $ADEB$, שהוא הריבוע שעל AB . לפיכך הריבוע שעל AB שווה לריבועים שעל $AG, \Gamma B$ בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$.

לפיכך, אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, הריבוע שעל הקו השלם שווה לריבועים שעל החלקים, בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין החלקים; מש״ל.

אם קו ישר נחלק לחלקים שווים ולחלקים בלתי־שווים, המלבן הכלול בין החלקים הבלתי־שווים של הקו השלם, בצירוף הריבוע שעל הקטע שבין נקודות החלוקה, שווה לריבוע שעל המחצית.

ייחלק הקו הישר AB לחלקים שווים בנקודה Γ ולחלקים בלתי־שווים בנקודה Δ . אומר אני שהמלבן הכלול בין $\Delta\Delta, \Delta B$, בצירוף הריבוע שעל $\Gamma\Delta$, שווה לריבוע שעל ΓB .

יתואר על ΓB הריבוע ΓEZB , ויחובר BE . דרך Δ יועבר ΔH המקביל לאחד משני הקווים $\Gamma E, BZ$; דרך Θ יועבר KM המקביל לאחד משני הקווים AB, EZ ; ושוב, דרך A יועבר AK המקביל לאחד משני הקווים $\Gamma\Delta, BM$. ומאחר

שהמשלים $\Gamma\Theta$ שווה למשלים ΘZ , יתווסף לשניהם ΔM ; לפיכך השטח השלם ΓM שווה לשטח השלם ΔZ . אך ΓM שווה ל- ΔA , שכן $A\Gamma$ שווה ל- ΓB ; לכן גם ΔA שווה ל- ΔZ . יתווסף לשניהם $\Gamma\Theta$; לפיכך השטח השלם $A\Theta$ שווה לגנומון MNE . אך $A\Theta$ הוא המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , שכן $\Delta\Theta$ שווה ל- ΔB ; לכן גם הגנומון MNE שווה למלבן הכלול בין ΔA , ΔB . יתווסף לשניהם ΔH , השווה לריבוע שעל $\Gamma\Delta$; לפיכך הגנומון MNE והשטח ΔH שווים למלבן הכלול בין ΔA , ΔB בצירוף הריבוע שעל $\Gamma\Delta$. אך הגנומון MNE והשטח ΔH הם הריבוע השלם ΓEZB , שהוא הריבוע שעל ΓB . לפיכך המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , בצירוף הריבוע שעל $\Gamma\Delta$, שווה לריבוע שעל ΓB .

לפיכך, אם קו ישר נחלק לחלקים שווים ולחלקים בלתי־שווים, המלבן הכלול בין החלקים הבלתי־שווים של הקו השלם, בצירוף הריבוע שעל הקטע שבין נקודות החלוקה, שווה לריבוע שעל המחצית; מש"ל.

אם קו ישר נחצה, ומתווסף לו בקו ישר קו ישר כלשהו, המלבן הכלול בין הקו השלם בצירוף הקו שנוסף ובין הקו שנוסף, בצירוף הריבוע שעל המחצית, שווה לריבוע שעל הקו המורכב מן המחצית ומן הקו שנוסף.

ייחצה הקו הישר AB בנקודה Γ , ויתווסף לו בקו ישר הקו BA . אומר אני שהמלבן הכלול בין ΔA , ΔB , בצירוף הריבוע שעל ΓB , שווה לריבוע שעל $\Gamma\Delta$.

יתואר על $\Gamma\Delta$ הריבוע $\Gamma EZ\Delta$, ויחובר ΔE . דרך הנקודה B יועבר BH המקביל לאחד משני הקווים $E\Gamma$, ΔZ ; דרך הנקודה Θ יועבר KM המקביל לאחד משני הקווים AB , EZ ; ועוד, דרך A יועבר AK המקביל לאחד משני הקווים $\Gamma\Delta$, ΔM .

מאחר ש־ $\Gamma\theta$ שווה ל־ ΓB , גם $A\theta$ שווה ל־ $\Gamma\theta$. אך $\Gamma\theta$ שווה ל־ θZ ; לכן גם $A\theta$ שווה ל־ θZ . יתווסף לשניהם ΓM ; לפיכך השטח השלם AM שווה לגנומון NEO . אך AM הוא המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , שכן ΔM שווה ל־ ΔB ; לכן גם הגנומון NEO שווה למלבן הכלול בין ΔA , ΔB . יתווסף לשניהם ΔH , השווה לריבוע שעל $B\Gamma$; לפיכך המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , בצירוף הריבוע שעל ΓB , שווה לגנומון NEO בצירוף ΔH . אך הגנומון NEO והשטח ΔH הם הריבוע השלם ΓEZA , שהוא הריבוע שעל ΓA . לפיכך המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , בצירוף הריבוע שעל ΓB , שווה לריבוע שעל ΓA .

לפיכך, אם קו ישר נחצה ומתווסף לו בקו ישר קו ישר כלשהו, המלבן הכלול בין הקו השלם בצירוף הקו שנוסף ובין הקו שנוסף, בצירוף הריבוע שעל המחצית, שווה לריבוע שעל הקו המורכב מן המחצית ומן הקו שנוסף; מש״ל.

אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, שני הריבועים שעל הקו השלם ועל אחד החלקים שווים לפעמיים המלבן הכלול בין הקו השלם ובין החלק האמור, בצירוף הריבוע שעל החלק הנותר.

יחלק הקו הישר AB באופן כלשהו בנקודה Γ . אומר אני שהריבועים שעל AB , $B\Gamma$ שווים לפעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, בצירוף הריבוע שעל ΓA .

יתואר על AB הריבוע $A\Delta EB$, ותשורטט הצורה.

מאחר ש־ AH שווה ל־ HE , יתווסף לשניהם ΓZ ; לפיכך השטח השלם AZ שווה לשטח השלם ΓE , ולכן AZ , ΓE יחד הם כפליים מן AZ . אך AZ , ΓE יחד הם הגנומון KAM והריבוע ΓZ ; לפיכך הגנומון KAM והריבוע ΓZ הם כפליים מן AZ . וגם פעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ הוא כפליים מן AZ ,

שכן BZ שווה ל- $B\Gamma$. לפיכך הגנומון KAM והריבוע ΓZ שווים לפעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$. יתווסף לשניהם ΔH , שהוא הריבוע שעל $A\Gamma$; לפיכך הגנומון KAM והריבועים BH , HA שווים לפעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, בצירוף הריבוע שעל $A\Gamma$. אך הגנומון KAM והריבועים BH , HA הם יחד הריבוע השלם $A\Delta EB$ והריבוע ΓZ , שהם הריבועים שעל AB , $B\Gamma$. לפיכך הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ שווים לפעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, בצירוף הריבוע שעל $A\Gamma$.

לפיכך, אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, שני הריבועים שעל הקו השלם ועל אחד החלקים שווים לפעמיים המלבן הכלול בין הקו השלם ובין החלק האמור, בצירוף הריבוע שעל החלק הנותר; מש"ל.

אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, ארבע פעמים המלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים, בצירוף הריבוע שעל החלק הנותר, שווים לריבוע המתואר על הקו המורכב מן הקו השלם ומן החלק האמור כאילו היו קו אחד.

ייחלק הקו הישר AB באופן כלשהו בנקודה Γ . אומר אני שארבע פעמים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, בצירוף הריבוע שעל $A\Gamma$, שווים לריבוע המתואר על AB ועל $B\Gamma$ כאילו היו קו אחד.

יוארך BA בקו ישר, ויונח BA שווה ל- ΓB . יתואר על AA הריבוע $AEZA$, ותשורטט הצורה הכפולה.

מאחר ש- ΓB שווה ל- BA , ו- ΓB שווה ל- HK ואילו BA שווה ל- KN , גם HK שווה ל- KN . מאותם טעמים גם ΠP שווה ל- PO . ומאחר ש- $B\Gamma$ שווה ל- BA , ו- HK שווה ל- KN , גם ΓK שווה ל- KA ו- HP שווה ל- PN . אך ΓK שווה

ל־PN, שכן הם משלימים של המקבילית GO; לכן גם KA שווה ל־HP. לפיכך ארבעת השטחים ΔK , $\Delta \Gamma K$, HP, PN שווים זה לזה, ויחד הם פי ארבעה מן $\Delta \Gamma K$. ושוב, מאחר ש־ $\Delta \Gamma B$ שווה ל־ ΔB , ואילו ΔB שווה ל־BK, כלומר ל־ $\Delta \Gamma H$, ו־ $\Delta \Gamma B$ שווה ל־ ΔHK , כלומר ל־ ΔHP , גם $\Delta \Gamma H$ שווה ל־ ΔHP . ומאחר ש־ $\Delta \Gamma H$ שווה ל־ ΔHP ו־ $\Delta \Gamma B$ שווה ל־ ΔHK , גם AH שווה ל־ ΔMP ו־ ΔPO , גם AH שווה ל־ ΔMP ו־ $\Delta \Pi A$ שווה ל־ ΔPZ . אך ΔMP שווה ל־ $\Delta \Pi A$, שכן הם משלימים של המקבילית MA; לכן גם AH שווה ל־ ΔPZ . לפיכך ארבעת השטחים AH, MP, $\Delta \Pi A$, PZ שווים זה לזה, ויחד הם פי ארבעה מן AH. והוכח גם שארבעת השטחים $\Delta \Gamma K$, KA, HP, PN הם פי ארבעה מן $\Delta \Gamma K$. לכן שמונת השטחים המקיפים את הגנומון STY הם פי ארבעה מן $\Delta \Gamma K$. ומאחר ש־AK הוא המלבן הכלול בין AB, ΔB , שכן BK שווה ל־ ΔB , ארבע פעמים המלבן הכלול בין AB, ΔB הן פי ארבעה מן AK. והוכח שגם הגנומון STY הוא פי ארבעה מן AK; לפיכך ארבע פעמים המלבן הכלול בין AB, ΔB שוות לגנומון STY. יתווסף לשניהם $\Delta \Theta$, השווה לריבוע שעל $\Delta \Gamma$; לפיכך ארבע פעמים המלבן הכלול בין AB, ΔB , בצירוף הריבוע שעל $\Delta \Gamma$, שוות לגנומון STY בצירוף $\Delta \Theta$. אך הגנומון STY והשטח $\Delta \Theta$ הם הריבוע השלם AEZA, שהוא הריבוע שעל ΔA . לפיכך ארבע פעמים המלבן הכלול בין AB, ΔB , בצירוף הריבוע שעל $\Delta \Gamma$, שוות לריבוע שעל ΔA . אך ΔB שווה ל־ $\Delta \Gamma$; לכן ארבע פעמים המלבן הכלול בין AB, $\Delta \Gamma$, בצירוף הריבוע שעל $\Delta \Gamma$, שוות לריבוע שעל ΔA , כלומר לריבוע המתואר על AB ועל $\Delta \Gamma$ כאילו היו קו אחד.

לפיכך, אם קו ישר נחלק באופן כלשהו, ארבע פעמים המלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים, בצירוף הריבוע שעל החלק הנותר, שווים לריבוע

המתואר על הקו המורכב מן הקו השלם ומן החלק האמור כאילו היו קו אחד; מש"ל.

אם קו ישר נחלק לחלקים שווים ולחלקים בלתי־שווים, הריבועים שעל החלקים הבלתי־שווים של הקו השלם הם כפליים מן הריבועים שעל המחצית ועל הקטע שבין נקודות החלוקה.

ייחלק הקו הישר AB לחלקים שווים בנקודה Γ ולחלקים בלתי־שווים בנקודה Δ . אומר אני שהריבועים שעל ΔB , ΔA הם כפליים מן הריבועים שעל $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$.

מן הנקודה Γ יועבר ΓE בזווית ישרה ל־ AB , ויונח שווה לכל אחת מן $A\Gamma$, ΓB ; ויחברו EA , EB . דרך Δ יועבר ΔZ המקביל ל־ $E\Gamma$, דרך Z יועבר ZH המקביל ל־ AB , ויחבר AZ . ומאחר ש־ $A\Gamma$ שווה ל־ ΓE , גם הזווית EAG שווה לזווית $AE\Gamma$. ומאחר שהזווית שב־ Γ ישרה, שתי הזוויות הנותרות EAG , $AE\Gamma$ יחד לזווית ישרה אחת; והן שוות, ולכן כל אחת מן ΓEA , ΓAE היא מחצית זווית ישרה. מאותם טעמים גם כל אחת מן ΓEB , $EB\Gamma$ היא מחצית זווית ישרה; לפיכך הזווית השלמה AEB ישרה. ומאחר שהזווית HEZ היא מחצית זווית ישרה ואילו EHZ ישרה, שכן היא שווה לזווית הפנימית שמולה $E\Gamma B$, הזווית הנותרת EZH היא מחצית זווית ישרה. לכן HEZ שווה ל־ EZH , ומכאן שגם הצלע EH שווה ל־ HZ . ושוב, מאחר שהזווית שב־ B היא מחצית זווית ישרה ואילו ZAB ישרה, שכן גם היא שווה לזווית הפנימית שמולה $E\Gamma B$, הזווית הנותרת BZA היא מחצית זווית ישרה. לכן הזווית שב־ B שווה ל־ ΔZB , ומכאן שגם הצלע ZA שווה לצלע ΔB . ומאחר ש־ $A\Gamma$ שווה ל־ ΓE , גם הריבוע שעל $A\Gamma$ שווה לריבוע שעל ΓE ; לפיכך הריבועים שעל $A\Gamma$, ΓE הם כפליים

מן הריבוע שעל AF . אך הריבוע שעל EA שווה לריבועים שעל AF , FE , שכן הזווית AFE ישרה; לכן הריבוע שעל EA הוא כפליים מן הריבוע שעל AF . ושוב, מאחר ש- EH שווה ל- HZ , גם הריבוע שעל EH שווה לריבוע שעל HZ ; לפיכך הריבועים שעל EH , HZ הם כפליים מן הריבוע שעל HZ . אך הריבוע שעל EZ שווה לריבועים שעל EH , HZ ; לכן הריבוע שעל EZ הוא כפליים מן הריבוע שעל HZ . ו- HZ שווה ל- FA ; לפיכך הריבוע שעל EZ הוא כפליים מן הריבוע שעל FA . וגם הריבוע שעל EA הוא כפליים מן הריבוע שעל AF ; לכן הריבועים שעל AE , EZ הם כפליים מן הריבועים שעל AF , FA . אך הריבוע שעל AZ שווה לריבועים שעל AE , EZ , שכן הזווית AEZ ישרה; לכן הריבוע שעל AZ הוא כפליים מן הריבועים שעל AF , FA . והריבועים שעל AD , DZ שווים לריבוע שעל AZ , שכן הזווית ADB ישרה. לפיכך הריבועים שעל AD , DZ הם כפליים מן הריבועים שעל AF , FA . אך DZ שווה ל- DB ; לכן הריבועים שעל AD , DB הם כפליים מן הריבועים שעל AF , FA .

לפיכך, אם קו ישר נחלק לחלקים שווים ולחלקים בלתי־שווים, הריבועים שעל החלקים הבלתי־שווים של הקו השלם הם כפליים מן הריבועים שעל המחצית ועל הקטע שבין נקודות החלוקה; מש"ל.

אם קו ישר נחצה ומתווסף לו בקו ישר קו ישר כלשהו, שני הריבועים שעל הקו השלם בצירוף הקו שנוסף ועל הקו שנוסף הם כפליים מן הריבועים שעל המחצית ועל הקו המורכב מן המחצית ומן הקו שנוסף, כשהוא מתואר כקו אחד.

ייחצה הקו הישר AB בנקודה Γ , ויתווסף לו בקו ישר הקו BA . אומר אני שהריבועים שעל AD , DB הם כפליים מן הריבועים שעל AF , FA .

מן הנקודה Γ יעבר ΓE בזווית ישרה ל- AB , ויונח שווה לכל אחת מן ΓA , ΓB ; ויחברו EA , EB . דרך E יעבר EZ המקביל ל- AD , ודרך Δ יעבר $Z\Delta$ המקביל ל- ΓE . ומאחר שהקו EZ נופל על הקווים המקבילים $E\Gamma$, $Z\Delta$, הזוויות ΓEZ , $EZ\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן הזוויות ZEB , $EZ\Delta$ קטנות משתי זוויות ישרות. וקווים היוצרים זוויות הקטנות משתי זוויות ישרות נפגשים בהארכתם; לפיכך EB , $Z\Delta$, אם יוארכו לצדדים Δ , B , ייפגשו. יוארכו וייפגשו בנקודה H , ויחבר AH . ומאחר ש- ΓA שווה ל- ΓE , גם הזווית $E\Gamma A$ שווה לזווית $A\Gamma E$; והזווית שב- Γ ישרה, ולכן כל אחת מן $A\Gamma E$, $E\Gamma A$ היא מחצית זווית ישרה. מאותם טעמים גם כל אחת מן $E\Gamma B$, $EB\Gamma$ היא מחצית זווית ישרה; לפיכך AEB ישרה. ומאחר ש- $EB\Gamma$ היא מחצית זווית ישרה, גם ΔBH היא מחצית זווית ישרה. והזווית $B\Delta H$ ישרה, שכן היא שווה לזווית המתחלפת $\Delta\Gamma E$; לפיכך הזווית הנותרת ΔHB היא מחצית זווית ישרה. לכן ΔHB שווה ל- ΔBH , ומכאן שגם הצלע BA שווה לצלע HA . ושוב, מאחר שהזוויות EZH , ΔBH היא מחצית זווית ישרה ואילו הזווית שב- Z ישרה, שכן היא שווה לזווית הנגדית שב- Γ , הזווית הנותרת ZEH היא מחצית זווית ישרה. לכן EZH שווה ל- ZEH , ומכאן שגם הצלע HZ שווה לצלע EZ . ומאחר שהריבוע שעל $E\Gamma$ שווה לריבוע שעל ΓA , הריבועים שעל $E\Gamma$, ΓA הם כפליים מן הריבוע שעל ΓA . אך הריבוע שעל EA שווה לריבועים שעל $E\Gamma$, ΓA ; לפיכך הריבוע שעל EA הוא כפליים מן הריבוע שעל $A\Gamma$. ושוב, מאחר ש- ZH שווה ל- EZ , גם הריבוע שעל ZH שווה לריבוע שעל ZE ; לפיכך הריבועים שעל HZ , ZE הם כפליים מן הריבוע שעל EZ . אך הריבוע שעל EH שווה לריבועים שעל HZ , ZE ; לפיכך הריבוע שעל EH הוא כפליים מן הריבוע שעל EZ . ו- EZ שווה ל- $\Gamma\Delta$; לכן הריבוע שעל EH הוא כפליים מן הריבוע שעל ΓA . והוכח שגם הריבוע שעל EA הוא כפליים מן הריבוע שעל $A\Gamma$; לפיכך הריבועים שעל

AE, EH הם כפליים מן הריבועים שעל $AF, \Gamma A$. אך הריבוע שעל AH שווה לריבועים שעל AE, EH; לפיכך הריבוע שעל AH הוא כפליים מן הריבועים שעל $AF, \Gamma A$. והריבועים שעל $AD, \Delta H$ שווים לריבוע שעל AH; לפיכך הריבועים שעל $AD, \Delta H$ הם כפליים מן הריבועים שעל $AF, \Gamma A$. אך ΔH שווה ל AB ; לכן הריבועים שעל AD, AB הם כפליים מן הריבועים שעל $AF, \Gamma A$.

לפיכך, אם קו ישר נחצה ומתווסף לו בקו ישר קו ישר כלשהו, שני הריבועים שעל הקו השלם בצירוף הקו שנוסף ועל הקו שנוסף הם כפליים מן הריבועים שעל המחצית ועל הקו המורכב מן המחצית ומן הקו שנוסף, כשהוא מתואר בקו אחד; מש"ל.

לחלק קו ישר נתון כך שהמלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים יהיה שווה לריבוע שעל החלק הנותר.

יהי AB הקו הישר הנתון. נדרש אפוא לחלק את AB כך שהמלבן הכלול בין הקו השלם ובין אחד החלקים יהיה שווה לריבוע שעל החלק הנותר.

יתואר על AB הריבוע $AB\Delta\Gamma$; ייחצה AF בנקודה E, ויחובר BE. יוארך ΓA אל Z, ויונח EZ שווה ל BE . יתואר על AZ הריבוע $Z\Theta$, ויוארך $H\Theta$ אל K. אומר אני ש AB נחלק בנקודה Θ כך שהמלבן הכלול בין $AB, B\Theta$ שווה לריבוע שעל $A\Theta$.

מאחר שהקו הישר AF נחצה בנקודה E והקו ZA נוסף לו, המלבן הכלול בין $\Gamma Z, ZA$ בצירוף הריבוע שעל AE, שווה לריבוע שעל EZ. אך EZ שווה ל EB ; לפיכך המלבן הכלול בין $\Gamma Z, ZA$ בצירוף הריבוע שעל AE, שווה לריבוע שעל EB. ולריבוע שעל EB שווים הריבועים שעל BA, AE, שכן

הזווית שב־A ישרה. לפיכך המלבן הכלול בין ΓZ , ZA , בצירוף הריבוע שעל AE , שווה לריבועים שעל AE , BA . יחסר משניהם הריבוע שעל AE ; לפיכך המלבן הנותר הכלול בין ΓZ , ZA שווה לריבוע שעל AB . והמלבן הכלול בין ΓZ , ZA הוא ZK , שכן AZ שווה ל־ ZH ; והריבוע שעל AB הוא $\Delta\Delta$. לפיכך ZK שווה ל־ $\Delta\Delta$. יחסר משניהם AK ; לפיכך השטח הנותר $Z\Theta$ שווה לשטח הנותר $\Theta\Delta$. ו־ $\Theta\Delta$ הוא המלבן הכלול בין AB , $B\Theta$, שכן AB שווה ל־ $B\Delta$; ואילו $Z\Theta$ הוא הריבוע שעל $A\Theta$. לפיכך המלבן הכלול בין AB , $B\Theta$ שווה לריבוע שעל ΘA .

לפיכך הקו הישר הנתון AB נחלק בנקודה Θ כך שהמלבן הכלול בין AB , $B\Theta$ שווה לריבוע שעל ΘA ; כנדרש לעשות.

במשולשים קה־זווית, הריבוע שעל הצלע שמול הזווית הקהה גדול מן הריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית הקהה בפעמיים המלבן הכלול בין אחת הצלעות שסביב הזווית הקהה, שעליה נופל האנך, ובין הקטע החיצוני שהאנך חותך ליד הזווית הקהה.

יהי $AB\Gamma$ משולש קה־זווית שהזווית $BA\Gamma$ בו קהה, ומן הנקודה B יורד האנך BA אל ΓA המוארך. אומר אני שהריבוע שעל $B\Gamma$ גדול מן הריבועים שעל BA , $A\Gamma$ בפעמיים המלבן הכלול בין ΓA , AA .

מאחר שהקו הישר ΓA נחלק באופן כלשהו בנקודה A , הריבוע שעל $\Delta\Gamma$ שווה לריבועים שעל ΓA , AA , בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין ΓA , AA . יתווסף לשניהם הריבוע שעל ΔB ; לפיכך הריבועים שעל ΔB , ΓA שווים לריבועים שעל ΔB , ΓA , AA , בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין ΓA , AA . אך הריבוע שעל ΓB שווה לריבועים שעל ΔB , ΓA , שכן הזווית שב־ Δ ישרה; והריבוע

שעל AB שווה לריבועים שעל AD , DB . לפיכך הריבוע שעל GB שווה לריבועים שעל AB , GA , בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין GA , AD . לכן הריבוע שעל GB גדול מן הריבועים שעל AB , GA בפעמיים המלבן הכלול בין GA , AD .

לפיכך, במשולשים קהי־זווית, הריבוע שעל הצלע שמול הזווית הקהה גדול מן הריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית הקהה בפעמיים המלבן הכלול בין אחת הצלעות שסביב הזווית הקהה, שעליה נופל האנך, ובין הקטע החיצוני שהאנך חותך ליד הזווית הקהה; מש"ל.

במשולשים חד־זווית, הריבוע שעל הצלע שמול זווית חדה קטן מן הריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית החדה בפעמיים המלבן הכלול בין אחת הצלעות שסביב הזווית החדה, שעליה נופל האנך, ובין הקטע הפנימי שהאנך חותך ליד הזווית החדה.

יהי $AB\Gamma$ משולש חד־זווית שהזווית שב־ B חדה, ומן הנקודה A יורד האנך AD אל $B\Gamma$. אומר אני שהריבוע שעל $A\Gamma$ קטן מן הריבועים שעל GB , BA בפעמיים המלבן הכלול בין GB , BA .

מאחר שהקו הישר GB נחלק באופן כלשהו בנקודה Δ , הריבועים שעל GB , BA שווים לפעמיים המלבן הכלול בין GB , BA , בצירוף הריבוע שעל $\Delta\Gamma$. יתווסף לשניהם הריבוע שעל AD ; לפיכך הריבועים שעל AD , BA , GB שווים לפעמיים המלבן הכלול בין GB , BA , בצירוף הריבועים שעל AD , $\Delta\Gamma$. אך הריבוע שעל AB שווה לריבועים שעל AD , BA , שכן הזווית שב־ Δ ישרה; והריבוע שעל $A\Gamma$ שווה לריבועים שעל AD , $\Delta\Gamma$. לפיכך הריבועים שעל GB , BA שווים לריבוע שעל $A\Gamma$ בצירוף פעמיים המלבן הכלול בין GB , BA . ולכן

הריבוע שעל AG לבדו קטן מן הריבועים שעל BA , GB בפעמיים המלבן הכלול בין GB , BA .

לפיכך, במשולשים חדי־זווית, הריבוע שעל הצלע שמול זווית חדה קטן מן הריבועים שעל הצלעות הכוללות את הזווית החדה בפעמיים המלבן הכלול בין אחת הצלעות שסביב הזווית החדה, שעליה נופל האנך, ובין הקטע הפנימי שהאנך חותך ליד הזווית החדה; מש"ל.

לבנות ריבוע השווה לצורה קווית נתונה.

תהי A הצורה הקווית הנתונה. נדרש אפוא לבנות ריבוע השווה לצורה הקווית A .

תיבנה המקבילית ישרת־הזווית BA השווה לצורה הקווית A . אם BE שווה ל־ EA , כבר נעשה הנדרש, שכן נבנה הריבוע BA השווה לצורה הקווית A . ואם לא, אחד מן BE , EA גדול יותר. יהי BE הגדול; יוארך אל Z , ויונח EZ שווה ל־ EA . ייחצה BZ בנקודה H , ובמרכז H וברדיוס אחד מן HZ , HB יתואר חצי־המעגל $B\Theta Z$. יוארך AE אל Θ , ויחובר $H\Theta$.

מאחר שהקו הישר BZ נחלק לחלקים שווים בנקודה H ולחלקים בלתי־שווים בנקודה E , המלבן הכלול בין BE , EZ , בצירוף הריבוע שעל EH , שווה לריבוע שעל HZ . אך HZ שווה ל־ $H\Theta$; לפיכך המלבן הכלול בין BE , EZ , בצירוף הריבוע שעל HE , שווה לריבוע שעל $H\Theta$. ולריבוע שעל $H\Theta$ שווים הריבועים שעל EH , $E\Theta$; לפיכך המלבן הכלול בין BE , EZ , בצירוף הריבוע שעל HE , שווה לריבועים שעל EH , $E\Theta$. יוחסר משניהם הריבוע שעל HE ; לפיכך המלבן הנותר הכלול בין BE , EZ שווה לריבוע שעל $E\Theta$. אך המלבן הכלול בין

BE, EZ הוא $B\Delta$, שכן EZ שווה ל- $E\Delta$. לפיכך המקבילית $B\Delta$ שווה לריבוע שעל $E\Theta$. ו- $B\Delta$ שווה לצורה הקווית A; לכן גם הצורה הקווית A שווה לריבוע שיתואר על $E\Theta$.

לפיכך נבנה הריבוע שיתואר על $E\Theta$ השווה לצורה הקווית הנתונה A; כנדרש לעשות.

ספר ג

מעגלים שווים הם אלה שקוטריהם שווים, או שהקווים מן המרכזים שלהם שווים.

נאמר שקו ישר משיק למעגל אם הוא נוגע במעגל, ובהארכתו אינו חותך את המעגל.

נאמר שמעגלים משיקים זה לזה אם הם נוגעים זה בזה ואינם חותכים זה את זה.

נאמר שקווים ישרים במעגל מרוחקים במידה שווה מן המרכז, כאשר האנכים המועברים מן המרכז אליהם שווים.

ונאמר שהקו שאליו נופל האנך הגדול יותר מרוחק יותר.

קטע מעגל הוא הצורה הכלולה בין קו ישר ובין קשת של מעגל.

זווית של קטע היא הזווית הכלולה בין הקו הישר ובין קשת המעגל.

זווית בתוך קטע היא הזווית הכלולה בין שני קווים ישרים, כאשר נלקחת נקודה כלשהי על קשת הקטע וממנה מחברים קווים ישרים אל קצות הקו הישר שהוא בסיס הקטע.

כאשר הקווים הישרים הכוללים את הזווית חותכים קשת כלשהי, נאמר שהזווית נשענת על אותה קשת.

גזרת מעגל היא הצורה הכלולה בין הקווים הישרים הכוללים זווית שנבנתה במרכז המעגל ובין הקשת שהם חותכים.

קטעי מעגלים דומים הם אלה המקבלים זוויות שוות, או שהזוויות בתוכם שוות זו לזו.

למצוא את מרכזו של מעגל נתון.

יהי $AB\Gamma$ המעגל הנתון. נדרש אפוא למצוא את מרכז המעגל $AB\Gamma$.

יועבר בו באופן כלשהו הקו הישר AB , וייחצה בנקודה Δ . מן הנקודה Δ יועבר $\Delta\Gamma$ בזווית ישרה ל- AB ויוארך אל E ; וייחצה ΓE בנקודה Z . אומר אני ש- Z הוא מרכז המעגל $AB\Gamma$.

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, H המרכז, ויחוברו HA , $H\Delta$, HB . ומאחר ש- $A\Delta$ שווה ל- ΔB ו- ΔH משותף, שתי הצלעות ΔH , ΔA שוות בהתאמה לשתיהן הצלעות ΔB , ΔH ; וגם הבסיס HA שווה לבסיס HB , שכן שניהם מן המרכז. לפיכך הזווית $A\Delta H$ שווה לזווית $H\Delta B$. וכאשר קו ישר העומד על קו ישר יוצר זוויות סמוכות השוות זו לזו, כל אחת מן הזוויות השוות ישרה; לפיכך $H\Delta B$ ישרה. אך גם $Z\Delta B$ ישרה; לכן $Z\Delta B$ שווה ל- $H\Delta B$ — הגדולה לקטנה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך הנקודה H אינה מרכז המעגל $AB\Gamma$. ובדומה נוכיח ששום נקודה אחרת מלבד Z אינה מרכז.

לפיכך הנקודה Z היא מרכז המעגל $AB\Gamma$.

מסקנה

מכאן ברור שאם במעגל קו ישר חוצה קו ישר אחר בזווית ישרה, מרכז המעגל נמצא על הקו החוצה; כנדרש לעשות.

אם נלקחות שתי נקודות כלשהן על היקף מעגל, הקו הישר המחבר את הנקודות ייפול בתוך המעגל.

יהי $AB\Gamma$ מעגל, ועל היקפו ילקחו שתי נקודות כלשהן A, B . אומר אני שהקו הישר המחבר את A אל B ייפול בתוך המעגל.

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, נופל מחוץ למעגל כמו AEB . ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי Δ ; יחברו $\Delta A, \Delta B$, ויארך ΔZ .

מאחר ש- ΔA שווה ל- ΔB , גם הזווית ΔAE שווה לזווית ΔBE . ומאחר שבמשולש ΔAE הוארכה אחת הצלעות אל AEB , הזווית ΔEB גדולה מן הזווית ΔAE . אך ΔAE שווה ל- ΔBE ; לפיכך ΔEB גדולה מן ΔBE . ומול הזווית הגדולה יותר מונחת הצלע הגדולה יותר; לכן ΔB גדולה מ- ΔE . אך ΔB שווה ל- ΔZ ; לפיכך ΔZ גדולה מ- ΔE — הקטנה מן הגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לכן הקו הישר המחבר את A אל B לא ייפול מחוץ למעגל. ובדומה נוכיח שלא ייפול על ההיקף עצמו; לפיכך הוא ייפול בתוכו.

לפיכך, אם נלקחות שתי נקודות כלשהן על היקף מעגל, הקו הישר המחבר את הנקודות ייפול בתוך המעגל; מש"ל.

אם במעגל קו ישר העובר דרך המרכז חוצה קו ישר שאינו עובר דרך המרכז, הוא חותך אותו גם בזווית ישרה; ואם הוא חותך אותו בזווית ישרה, הוא גם חוצה אותו.

יהי $AB\Gamma$ מעגל, ובו יחצה הקו הישר $\Gamma\Delta$ העובר דרך המרכז את הקו הישר AB שאינו עובר דרך המרכז, בנקודה Z . אומר אני שהוא גם חותך אותו בזווית ישרה.

יימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי E ; ויחברו EA, EB .

ומאחר ש $\angle AZ$ שווה ל $\angle ZB$ ו $\angle ZE$ משותף, שתי צלעות שוות בהתאמה לשתי צלעות; וגם הבסיס EA שווה לבסיס EB . לפיכך הזווית AZE שווה לזווית BZE . וכאשר קו ישר העומד על קו יוצר זוויות סמוכות השוות זו לזו, כל אחת מן הזוויות השוות ישרה; לכן כל אחת מן AZE, BZE ישרה. לפיכך $\Gamma\Delta$, העובר דרך המרכז וחוצה את AB שאינו עובר דרך המרכז, חותך אותו גם בזווית ישרה.

עתה יחתוך $\Gamma\Delta$ את AB בזווית ישרה. אומר אני שהוא גם חוצה אותו, כלומר ש $\angle AZ$ שווה ל $\angle ZB$.

לאחר אותה בנייה, מאחר ש $\angle EA$ שווה ל $\angle EB$, גם הזווית EAZ שווה לזווית EBZ . וגם הזווית הישרה AZE שווה לזווית הישרה BZE . לפיכך שני המשולשים EAZ, EZB כוללים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות, וצלע אחת השווה לצלע אחת — הצלע המשותפת EZ , שמולה אחת הזוויות השוות. לכן גם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה; לפיכך AZ שווה ל ZB .

לפיכך, אם במעגל קו ישר העובר דרך המרכז חוצה קו ישר שאינו עובר דרך המרכז, הוא חותך אותו גם בזווית ישרה; ואם הוא חותך אותו בזווית ישרה, הוא גם חוצה אותו; מש"ל.

אם שני קווים ישרים במעגל חותכים זה את זה ואינם עוברים דרך המרכז, הם אינם חוצים זה את זה.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל, ובו יחתכו הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ זה את זה בנקודה E , בלי שיעברו דרך המרכז. אומר אני שהם אינם חוצים זה את זה.

שאם אפשר, יחצו זה את זה, כך ש־ AE יהיה שווה ל־ EF ו־ BE ל־ EA . ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$, ויהי Z ; ויחבר ZE .

מאחר שהקו הישר ZE העובר דרך המרכז חוצה את הקו הישר AB שאינו עובר דרך המרכז, הוא גם חותך אותו בזווית ישרה; לפיכך הזווית ZEA ישרה. ושוב, מאחר שהקו הישר ZE חוצה את הקו הישר $\Gamma\Delta$, הוא גם חותך אותו בזווית ישרה; לפיכך ZEB ישרה. והוכח שגם ZEA ישרה; לכן ZEA שווה ל־ ZEB — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך AB , $\Gamma\Delta$ אינם חוצים זה את זה.

לפיכך, אם שני קווים ישרים במעגל חותכים זה את זה ואינם עוברים דרך המרכז, הם אינם חוצים זה את זה; מש״ל.

אם שני מעגלים חותכים זה את זה, לא יהיה להם אותו מרכז.

יחתכו שני המעגלים $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta H$ זה את זה בנקודות B , Γ . אומר אני שלא יהיה להם אותו מרכז.

שאם אפשר, יהי E מרכזם, ויחבר EF ; ויוארך באופן כלשהו EZH . ומאחר שהנקודה E היא מרכז המעגל $AB\Gamma$, EF שווה ל־ EZ . ושוב, מאחר שהנקודה E היא מרכז המעגל $\Gamma\Delta H$, EF שווה ל־ EH . אך הוכח ש־ EF שווה גם ל־ EZ ;

לפיכך EZ שווה ל- EH — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לכן הנקודה E אינה מרכז שני המעגלים $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta H$.

לפיכך, אם שני מעגלים חותכים זה את זה, אין להם אותו מרכז; מש"ל.

אם שני מעגלים משיקים זה לזה, לא יהיה להם אותו מרכז.

ישיקו שני המעגלים $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ זה לזה בנקודה Γ . אומר אני שלא יהיה להם אותו מרכז.

שאם אפשר, יהי Z מרכזם; יחובר $Z\Gamma$, ויוארך באופן כלשהו ZEB .

מאחר שהנקודה Z היא מרכז המעגל $Z\Gamma$, $AB\Gamma$ שווה ל- ZB . ושוב, מאחר שהנקודה Z היא מרכז המעגל $Z\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ שווה ל- ZE . אך הוכח ש- $Z\Gamma$ שווה ל- ZB ; לפיכך ZE שווה ל- ZB — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לכן הנקודה Z אינה מרכז שני המעגלים $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$.

לפיכך, אם שני מעגלים משיקים זה לזה, לא יהיה להם אותו מרכז; מש"ל.

אם נלקחת על קוטר של מעגל נקודה שאינה מרכז המעגל, ומן הנקודה יוצאים קווים ישרים אל המעגל, הגדול ביותר יהיה זה שעליו נמצא המרכז, והקטן ביותר יהיה חלקו הנותר; ומן האחרים, הקרוב יותר לקו העובר דרך המרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר. ורק שני קווים ישרים שווים יצאו מן הנקודה אל המעגל, משני עברי הקטן ביותר.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל וקוטרו $A\Delta$; ועל $A\Delta$ תילקח נקודה Z שאינה מרכז המעגל, ויהי E מרכז המעגל. ומן Z יצאו אל המעגל $AB\Gamma\Delta$ הקווים הישרים ZB , $Z\Gamma$,

ZH. אומר אני ש־ZA הוא הגדול ביותר ו־ZΔ הקטן ביותר, ומן האחרים ZB גדול מ־ZH, ו־ZF גדול מ־ZH.

יחברו BE, FE, HE. ומאחר שבכל משולש שתי הצלעות גדולות מן הצלע הנותרת, EB, EZ גדולות יחד מ־BZ. אך AE שווה ל־BE; לפיכך AZ גדול מ־BZ. ושוב, מאחר ש־BE שווה ל־FE ו־ZE משותף, שתי הצלעות BE, EZ שוות בהתאמה לשתי הצלעות FE, EZ. אך הזווית BEZ גדולה מן הזווית FEZ; לפיכך הבסיס BZ גדול מן הבסיס FZ. מאותם טעמים גם FZ גדול מ־ZH.

ושוב, מאחר ש־ZE, HZ גדולות יחד מ־EH, ו־EH שווה ל־EA, הרי ZE, HZ גדולות יחד מ־EA. יוחסר משניהם EZ; לפיכך השארית HZ גדולה מן השארית ZΔ. לכן ZA הוא הגדול ביותר, ZΔ הקטן ביותר, ZB גדול מ־ZF, ו־ZF גדול מ־ZH.

אומר אני שגם רק שני קווים ישרים שווים יצאו מן הנקודה Z אל המעגל ABΓΔ, משני עברי הקו הקטן ביותר ZΔ. על הקו הישר EZ, בנקודה E שעליו, תיבנה הזווית ZEΘ השווה לזווית HEZ, ויחבר ZΘ. ומאחר ש־HE שווה ל־EΘ ו־EZ משותף, שתי הצלעות HE, EZ שוות בהתאמה לשתי הצלעות EΘ, EZ; והזווית HEZ שווה לזווית EΘZ. לפיכך הבסיס ZH שווה לבסיס ZΘ. אומר אני ששום קו אחר השווה ל־ZH לא יצא מן הנקודה Z אל המעגל. שאם אפשר, יצא ZK. ומאחר ש־ZK שווה ל־ZH, וגם ZΘ שווה ל־ZH, הרי ZK שווה ל־ZΘ — הקרוב יותר לקו העובר דרך המרכז שווה לרחוק יותר — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך שום קו אחר השווה ל־HZ לא יצא מן הנקודה Z אל המעגל; יש רק אחד בכל צד.

לפיכך, אם נלקחת על קוטר של מעגל נקודה שאינה מרכז המעגל, ומן הנקודה יוצאים קווים ישרים אל המעגל, הגדול ביותר יהיה זה שעליו נמצא המרכז, והקטן ביותר חלקו הנותר; ומן האחרים, הקרוב יותר לקו העובר דרך המרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר. ורק שני קווים ישרים שווים יצאו מאותה נקודה אל המעגל, משני עברי הקטן ביותר; מש"ל.

אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מועברים קווים ישרים אל המעגל, שאחד מהם עובר דרך המרכז והאחרים באופן כלשהו: מן הקווים המגיעים אל הקשת הקעורה, הגדול ביותר הוא העובר דרך המרכז, ומן האחרים הקרוב יותר לקו העובר דרך המרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר; ומן הקווים המגיעים אל הקשת הקמורה, הקטן ביותר הוא זה שבין הנקודה ובין הקוטר, ומן האחרים הקרוב יותר לקטן ביותר קטן תמיד מן הרחוק יותר. ורק שני קווים שווים יגיעו מן הנקודה אל המעגל, משני עברי הקטן ביותר.

יהי $AB\Gamma$ מעגל, ותילקח מחוץ לו הנקודה Δ ; וממנה יועברו הקווים הישרים ΔA , ΔE , ΔZ , $\Delta \Gamma$, כאשר ΔA עובר דרך המרכז. אומר אני שמן הקווים המגיעים אל הקשת הקעורה $AEZ\Gamma$, הגדול ביותר הוא ΔA העובר דרך המרכז, ΔE גדול מ- ΔZ , ו- ΔZ גדול מ- $\Delta \Gamma$. ומן הקווים המגיעים אל הקשת הקמורה $\Theta\Lambda KH$, הקטן ביותר הוא ΔH שבין הנקודה ובין הקוטר AH ; והקרוב יותר לקטן ביותר ΔH קטן תמיד מן הרחוק יותר: ΔK קטן מ- $\Delta\Lambda$, ו- $\Delta\Lambda$ קטן מ- $\Delta\Theta$.

יימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי M ; ויחוברו ME , MZ , $M\Gamma$, MK , $M\Lambda$, $M\Theta$.

ומאחר ש- AM שווה ל- EM , יתווסף לשניהם MA ; לפיכך ΔA שווה ל- EM , MA יחד. אך EM , MA גדולים יחד מ- EA ; לכן גם ΔA גדול מ- EA . ושוב,

מאחר ש- ME שווה ל- MZ ו- MD משותף, EM , MD שווים בהתאמה ל- ZM , MD ; והזווית EMA גדולה מן הזווית ZMA . לפיכך הבסיס EA גדול מן הבסיס ZA . ובדומה נוכיח שגם ZA גדול מ- FA . לכן AA הוא הגדול ביותר, EA גדול מ- AZ , ו- AZ גדול מ- AF .

ומאחר ש- KA , MK גדולים יחד מ- MD , ו- MH שווה ל- MK , השארית KA גדולה מן השארית HA ; לכן HA קטן מ- KA . ומאחר שבתוך המשולש $M\Lambda A$ נבנו על אחת מצלעותיו MA שני הקווים KA , MK , הם קטנים יחד מן MA , AA . אך MK שווה ל- MA ; לפיכך השארית KA קטנה מן השארית AA . ובדומה נוכיח שגם AA קטן מ- AO . לכן HA הוא הקטן ביותר, KA קטן מ- AA , ו- AA קטן מ- AO .

אומר אני שגם רק שני קווים שווים יגיעו מן הנקודה A אל המעגל, משני עברי הקו הקטן ביותר HA . על הקו הישר MA , בנקודה M שעליו, תיבנה הזווית ΔMB השווה לזווית KMA , ויחובר AB . ומאחר ש- MK שווה ל- MB ו- MA משותף, שתי הצלעות MA , KM שוות בהתאמה לשתי הצלעות MA , BM ; והזווית KMA שווה לזווית BMA . לפיכך הבסיס KA שווה לבסיס AB . אומר אני ששום קו ישר אחר השווה ל- KA לא יגיע מן הנקודה A אל המעגל. שאם אפשר, יגיע AN . ומאחר ש- KA שווה ל- AN , וגם KA שווה ל- AB , הרי AB שווה ל- AN — הקרוב יותר לקו הקטן ביותר HA שווה לרחוק יותר — וזה הוכח כבלתי־אפשרי. לפיכך לא יגיעו מן הנקודה A אל המעגל AB יותר משני קווים שווים, משני עברי הקטן ביותר HA .

לפיכך, אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מועברים קווים ישרים אל המעגל, שאחד מהם עובר דרך המרכז והאחרים באופן כלשהו: מן הקווים

המגיעים אל הקשת הקעורה, הגדול ביותר הוא העובר דרך המרכז, ומן האחרים הקרוב יותר לקו העובר דרך המרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר; ומן הקווים המגיעים אל הקשת הקמורה, הקטן ביותר הוא זה שבין הנקודה ובין הקוטר, ומן האחרים הקרוב יותר לקטן ביותר קטן תמיד מן הרחוק יותר. ורק שני קווים שווים יגיעו מן הנקודה אל המעגל, משני עברי הקטן ביותר; מש"ל.

אם נלקחת נקודה בתוך מעגל, ומן הנקודה מגיעים אל המעגל יותר משני קווים ישרים שווים, הנקודה שנלקחה היא מרכז המעגל.

יהי $AB\Gamma$ מעגל ובתוכו הנקודה Δ ; ומן Δ יגיעו אל המעגל $AB\Gamma$ יותר משני קווים ישרים שווים, ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$. אומר אני שהנקודה Δ היא מרכז המעגל $AB\Gamma$.

יחברו AB , $B\Gamma$ וייחצו בנקודות E , Z ; והקווים EA , ZA , לאחר חיבורם, יוארכו אל הנקודות H , K , Θ , Λ .

מאחר ש- AE שווה ל- EB ו- EA משותף, שתי הצלעות AE , EA שוות בהתאמה לשתי הצלעות BE , EA ; וגם הבסיס ΔA שווה לבסיס ΔB . לפיכך הזווית $AE\Delta$ שווה לזווית $BE\Delta$, ולכן כל אחת מן הזוויות $AE\Delta$, $BE\Delta$ ישרה. מכאן HK חוצה את AB בזווית ישרה. ומאחר שאם במעגל קו ישר חוצה קו ישר אחר בזווית ישרה, מרכז המעגל נמצא על הקו החוצה, מרכז המעגל נמצא על HK . מאותם טעמים מרכז המעגל $AB\Gamma$ נמצא גם על $\Theta\Lambda$. ולקווים הישרים HK , $\Theta\Lambda$ אין נקודה משותפת אחרת מלבד Δ ; לפיכך הנקודה Δ היא מרכז המעגל $AB\Gamma$.

לפיכך, אם נלקחת נקודה בתוך מעגל, ומן הנקודה מגיעים אל המעגל יותר משני קווים ישרים שווים, הנקודה שנלקחה היא מרכז המעגל; מש"ל.

מעגל אינו חותך מעגל ביותר משתי נקודות.

שאם אפשר, יחתוך המעגל $AB\Gamma$ את המעגל ΔEZ ביותר משתי נקודות, B, Θ, H, Z . יחברו $B\Theta, BH$ וייחצו בנקודות K, Λ ; ומן K, Λ יועברו $K\Gamma, \Lambda M$ בזווית ישרה ל Θ, BH , ויארכו אל הנקודות A, E .

מאחר שבמעגל $AB\Gamma$ הקו הישר $A\Gamma$ חוצה את הקו הישר $B\Theta$ בזווית ישרה, מרכז המעגל $AB\Gamma$ נמצא על $A\Gamma$. ושוב, מאחר שבאותו מעגל $AB\Gamma$ הקו הישר EM חוצה את הקו הישר BH בזווית ישרה, מרכז המעגל $AB\Gamma$ נמצא על EM . והוכח שהוא נמצא גם על $A\Gamma$; והקווים הישרים $A\Gamma, EM$ אינם נפגשים בשום נקודה מלבד O . לפיכך הנקודה O היא מרכז המעגל $AB\Gamma$. ובדומה נוכיח שהנקודה O היא גם מרכז המעגל ΔEZ . לכן לשני המעגלים החותכים זה את זה, $AB\Gamma, \Delta EZ$, יש אותו מרכז O ; וזה בלתי־אפשרי.

לפיכך מעגל אינו חותך מעגל ביותר משתי נקודות; מש"ל.

אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים ומוצאים מרכזיהם, הקו הישר המחבר את מרכזיהם, בהארכתו, יעבור בנקודת המגע של המעגלים.

ישיקו שני המעגלים $AB\Gamma, A\Delta E$ זה לזה מבפנים בנקודה A ; ויהי Z מרכז המעגל $AB\Gamma$ ו H מרכז המעגל $A\Delta E$. אומר אני שהקו הישר המחבר את H אל Z , בהארכתו, יעבור ב A .

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, עובר כמו $ZH\Theta$; ויחברו AZ, AH .

מאחר ש- HZ , AH גדולים יחד מ- ZA , כלומר מ- $Z\theta$, יוחסר משניהם ZH ; לפיכך השארית AH גדולה מן השארית $H\theta$. אך AH שווה ל- HA ; לכן גם HA גדולה מ- $H\theta$ — הקטנה מן הגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך הקו הישר המחבר את Z אל H לא יעבור מחוץ לנקודת המגע; לכן הוא יעבור בנקודת המגע A .

לפיכך, אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים, הקו הישר המחבר את מרכזיהם יעבור בנקודת המגע של המעגלים; מש"ל.

אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ, הקו המחבר את מרכזיהם יעבור דרך נקודת המגע.

ישקו שני המעגלים $AB\Gamma$, $A\Delta E$ זה לזה מבחוץ בנקודה A ; ויהי Z מרכז המעגל $AB\Gamma$ ו- H מרכז המעגל $A\Delta E$. אומר אני שהקו הישר המחבר את Z אל H יעבור דרך נקודת המגע A .

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, עובר כמו $Z\Gamma\Delta H$; ויחוברו AH , AZ .

מאחר שהנקודה Z היא מרכז המעגל $AB\Gamma$, שווה ל- $Z\Gamma$. ושוב, מאחר שהנקודה H היא מרכז המעגל HA , $A\Delta E$ שווה ל- HA . והוכח גם ש- ZA שווה ל- $Z\Gamma$; לפיכך AH , ZA שווים יחד ל- HA , $Z\Gamma$. מכאן הקו השלם ZH גדול מן AH , ZA יחד; אך הוא גם קטן מהם, וזה בלתי־אפשרי. לפיכך אין זה נכון שהקו הישר המחבר את Z אל H אינו עובר דרך נקודת המגע A ; לכן הוא עובר דרכה.

לפיכך, אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ, הקו המחבר את מרכזיהם יעבור דרך נקודת המגע; מש"ל.

מעגל אינו משיק למעגל ביותר מנקודה אחת, בין שהוא משיק לו מבפנים ובין מבחוץ.

שאם אפשר, ישיק תחילה המעגל $AB\Gamma\Delta$ למעגל $EBZ\Delta$ מבפנים ביותר מנקודה אחת, בנקודות Δ, B .

יימצאו מרכזיהם: יהי H מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$ ו- Θ מרכז המעגל $EBZ\Delta$.

לפיכך הקו המחבר את H אל Θ יעבור דרך Δ, B . יעבור כמו $BH\Theta\Delta$. ומאחר שהנקודה H היא מרכז המעגל $BH, AB\Gamma\Delta$ שווה ל- $H\Delta$; לפיכך BH גדול מ- $\Theta\Delta$, ועל אחת כמה וכמה $B\Theta$ גדול מ- $\Theta\Delta$. ושוב, מאחר שהנקודה Θ היא מרכז המעגל $B\Theta, EBZ\Delta$ שווה ל- $\Theta\Delta$; אך הוכח שהוא גדול ממנו בהרבה, וזה בלתי אפשרי. לפיכך מעגל אינו משיק למעגל מבפנים ביותר מנקודה אחת.

אומר אני שגם מבחוץ אינו משיק ביותר מנקודה אחת.

שאם אפשר, ישיק המעגל $A\Gamma K$ למעגל $AB\Gamma\Delta$ מבחוץ ביותר מנקודה אחת, בנקודות A, Γ ; ויחבר $A\Gamma$.

מאחר שעל היקפו של כל אחד מן המעגלים $AB\Gamma\Delta, A\Gamma K$ נלקחו שתי נקודות כלשהן A, Γ , הקו הישר המחבר את הנקודות ייפול בתוך כל אחד מהם. אך הוא נפל בתוך $AB\Gamma\Delta$ ומחוץ ל- $A\Gamma K$, וזה אבסורד. לפיכך מעגל אינו משיק למעגל מבחוץ ביותר מנקודה אחת. והוכח שגם מבפנים אינו משיק ביותר מנקודה אחת.

לפיכך מעגל אינו משיק למעגל ביותר מנקודה אחת, בין שהוא משיק לו מבפנים ובין מבחוץ; מש"ל.

במעגל, קווים ישרים שווים מרוחקים במידה שווה מן המרכז; וקווים ישרים המרוחקים במידה שווה מן המרכז שווים זה לזה.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל, ובו יהיו הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ שווים. אומר אני ש- AB , $\Gamma\Delta$ מרוחקים במידה שווה מן המרכז.

ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$, ויהי E . מן E יורדו האנכים EZ , EH אל AB , $\Gamma\Delta$; ויחברו AE , EF .

מאחר שהקו הישר EZ העובר דרך המרכז חותך בזווית ישרה את הקו הישר AB שאינו עובר דרך המרכז, הוא גם חוצה אותו. לפיכך AZ שווה ל- ZB , ולכן AB הוא כפליים מן AZ . מאותם טעמים גם $\Gamma\Delta$ הוא כפליים מן ΓH ; ו- AB שווה ל- $\Gamma\Delta$, ולכן גם AZ שווה ל- ΓH . ומאחר ש- AE שווה ל- EF , גם הריבוע שעל AE שווה לריבוע שעל EF . אך הריבועים שעל AZ , EZ שווים לריבוע שעל AE , שכן הזווית שב- Z ישרה; והריבועים שעל EH , $H\Gamma$ שווים לריבוע שעל EF , שכן הזווית שב- H ישרה. לפיכך הריבועים שעל AZ , ZE שווים לריבועים שעל EH , HE . ומאלה הריבועים שעל AZ שווה לריבוע שעל ΓH , שכן AZ שווה ל- ΓH ; לכן הריבוע הנותר שעל ZE שווה לריבוע הנותר שעל EH , ומכאן EZ שווה ל- EH . ובמעגל נאמר שקווים ישרים מרוחקים במידה שווה מן המרכז כאשר האנכים המועברים מן המרכז אליהם שווים; לפיכך AB , $\Gamma\Delta$ מרוחקים במידה שווה מן המרכז.

עתה יהיו הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ מרוחקים במידה שווה מן המרכז, כלומר יהיה EZ שווה ל- EH . אומר אני שגם AB שווה ל- $\Gamma\Delta$.

לאחר אותה בנייה, נוכיח בדומה ש- AB הוא כפליים מן AZ ו- $\Gamma\Delta$ כפליים מן ΓH . ומאחר ש- AE שווה ל- ΓE , הריבוע שעל AE שווה לריבוע שעל ΓE . אך הריבועים שעל EZ , ZA שווים לריבוע שעל AE , והריבועים שעל EH , $H\Gamma$ שווים לריבוע שעל ΓE . לפיכך הריבועים שעל EZ , ZA שווים לריבועים שעל EH , $H\Gamma$. ומאלה הריבוע שעל EZ שווה לריבוע שעל EH , שכן EZ שווה ל- EH ; לכן הריבוע הנותר שעל AZ שווה לריבוע הנותר שעל ΓH , ומכאן AZ שווה ל- ΓH . ו- AB הוא כפליים מן AZ , ואילו $\Gamma\Delta$ כפליים מן ΓH ; לפיכך AB שווה ל- $\Gamma\Delta$.

לפיכך, במעגל, קווים ישרים שווים מרוחקים במידה שווה מן המרכז; וקווים ישרים המרוחקים במידה שווה מן המרכז שווים זה לזה; מש"ל.

במעגל הקוטר הוא הקו הגדול ביותר, ומן הקווים האחרים הקרוב יותר למרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל, יהי $A\Delta$ קוטר ו- E מרכזו; ויהי $B\Gamma$ קרוב יותר לקוטר $A\Delta$, ו- ZH רחוק יותר. אומר אני ש- $A\Delta$ הוא הגדול ביותר ו- $B\Gamma$ גדול מ- ZH .

מן המרכז E יורדו האנכים $E\Theta$, $E\Lambda$ אל ZH , $B\Gamma$. ומאחר ש- $B\Gamma$ קרוב יותר למרכז ו- ZH רחוק יותר, $E\Lambda$ גדול מ- $E\Theta$. יונח EA שווה ל- $E\Theta$; ודרך Λ יעבר AM בזווית ישרה ל- EK ויארך אל N ; ויחברו ME , EN , ZE , EH .

ומאחר ש- $E\Theta$ שווה ל- EA , גם $B\Gamma$ שווה ל- MN . ושוב, מאחר ש- AE שווה ל- EM ו- EA שווה ל- EN , שווה ל- ME , EN יחד. אך ME , EN גדולים יחד מ- MN ; לכן גם $A\Delta$ גדול מ- MN . ו- MN שווה ל- $B\Gamma$; לפיכך $A\Delta$ גדול מ- $B\Gamma$. ומאחר ששתי הצלעות ME , EN שוות בהתאמה לשתי הצלעות ZE , EH ,

והזווית MEN גדולה מן הזווית ZEH, הבסיס MN גדול מן הבסיס ZH. אך הוכח ש- MN^- שווה ל- $B\Gamma^-$. לפיכך הקוטר $A\Delta$ הוא הגדול ביותר, ו- $B\Gamma^-$ גדול מ- ZH^- .

לפיכך, במעגל הקוטר הוא הגדול ביותר, ומן הקווים האחרים הקרוב יותר למרכז גדול תמיד מן הרחוק יותר; מש"ל.

הקו הישר המועבר בזווית ישרה לקוטר של מעגל מקצהו ייפול מחוץ למעגל; אל המקום שבין הקו הישר ובין ההיקף לא יוכל להיכנס קו ישר אחר; וזווית חצי-המעגל גדולה מכל זווית קווית חדה, ואילו הזווית הנותרת קטנה מכל זווית קווית חדה.

יהי $AB\Gamma$ מעגל שמרכזו Δ וקוטרו AB . אומר אני שהקו הישר המועבר מן A בזווית ישרה ל- AB מקצהו ייפול מחוץ למעגל.

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, נופל בתוכו כמו ΓA ; ויחובר $\Delta\Gamma$.

מאחר ש- ΔA^- שווה ל- $\Delta\Gamma^-$, גם הזווית $\Delta A\Gamma$ שווה לזווית $A\Gamma\Delta$. אך $\Delta A\Gamma$ ישרה; לפיכך גם $A\Gamma\Delta$ ישרה. לכן במשולש $A\Gamma\Delta$ שתי הזוויות $A\Gamma\Delta$, $\Delta A\Gamma$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות, וזה בלתי-אפשרי. לפיכך הקו המועבר מן הנקודה A בזווית ישרה ל- BA לא ייפול בתוך המעגל. ובדומה נוכיח שגם לא ייפול על ההיקף; לכן ייפול מחוץ לו.

ייפול כמו AE . אומר אני שאל המקום שבין הקו הישר AE ובין הקשת $\Gamma\Theta A$ לא יוכל להיכנס קו ישר אחר.

שאם אפשר, ייכנס קו כמו ZA , ומן הנקודה Δ יורד האנך ΔH אל ZA . ומאחר שהזווית $AH\Delta$ ישרה והזווית ΔAH קטנה מזווית ישרה, $\Delta\Delta$ גדול מ' ΔH . אך ΔA שווה ל' $\Delta\theta$; לפיכך $\Delta\theta$ גדול מ' ΔH — הקטן מן הגדול — וזה בלתי אפשרי. לכן אל המקום שבין הקו הישר ובין ההיקף לא יוכל להיכנס קו ישר אחר.

אומר אני גם שזווית חצי־המעגל, הכלולה בין הקו הישר BA ובין הקשת $\Gamma\Theta A$, גדולה מכל זווית קווית חדה; ואילו הזווית הנותרת, הכלולה בין הקשת $\Gamma\Theta A$ ובין הקו הישר AE , קטנה מכל זווית קווית חדה.

שהרי אילו הייתה זווית קווית הגדולה מן הזווית הכלולה בין הקו הישר BA ובין הקשת $\Gamma\Theta A$, או זווית קווית הקטנה מן הזווית הכלולה בין הקשת $\Gamma\Theta A$ ובין הקו הישר AE , היה נכנס אל המקום שבין הקשת $\Gamma\Theta A$ ובין הקו הישר AE קו ישר שהיה יוצר זווית הכלולה בין קווים ישרים הגדולה מן הזווית הכלולה בין BA ובין $\Gamma\Theta A$, או זווית הכלולה בין קווים ישרים הקטנה מן הזווית הכלולה בין $\Gamma\Theta A$ ובין AE . אך קו כזה אינו נכנס. לפיכך לא תהיה זווית חדה הכלולה בין קווים ישרים הגדולה מן הזווית הכלולה בין BA ובין $\Gamma\Theta A$, ואף לא זווית חדה הכלולה בין קווים ישרים הקטנה מן הזווית הכלולה בין $\Gamma\Theta A$ ובין AE .

מסקנה

מכאן ברור שהקו הישר המועבר בזווית ישרה לקוטר של מעגל מקצהו משיק למעגל; מש"ל.

להעביר מן הנקודה הנתונה קו ישר המשיק למעגל הנתון.

תהי A הנקודה הנתונה, ויהי $B\Gamma\Delta$ המעגל הנתון. נדרש אפוא להעביר מן הנקודה A קו ישר המשיק למעגל $B\Gamma\Delta$.

ימצא מרכז המעגל, ויהי E; ויחובר AE. במרכז E וברדיוס EA יתואר המעגל AZH. מן Δ יועבר ΔZ בזווית ישרה ל־EA, ויחוברו AB, EZ. אומר אני שהקו AB הועבר מן הנקודה A כשהוא משיק למעגל $B\Gamma\Delta$.

מאחר ש־E הוא מרכז שני המעגלים AZH, $B\Gamma\Delta$, הרי EA שווה ל־EZ ו־EA שווה ל־EB. לפיכך שתי הצלעות AE, EB שוות בהתאמה לשתי הצלעות ZE, ED, והן כוללות את הזווית המשותפת ש־E. לכן הבסיס ΔZ שווה לבסיס AB, והמשולש ΔEZ שווה למשולש EBA, והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות. לפיכך הזווית EAZ שווה לזווית EBA. אך EAZ ישרה; לכן גם EBA ישרה. ו־EB הוא קו מן המרכז; והקו המועבר בזווית ישרה לקוטר של מעגל מקצהו משיק למעגל. לפיכך AB משיק למעגל $B\Gamma\Delta$.

לפיכך הועבר מן הנקודה הנתונה A הקו הישר AB, המשיק למעגל הנתון $B\Gamma\Delta$; כנדרש לעשות.

אם קו ישר משיק למעגל ומן המרכז מחובר קו ישר אל נקודת המגע, הקו המחובר יהיה מאונך למשיק.

שיק הקו הישר ΔE למעגל $AB\Gamma$ בנקודה Γ ; ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי Z; ומן Z יחובר $Z\Gamma$ אל Γ . אומר אני ש־ $Z\Gamma$ מאונך ל־ ΔE .

שאם לא כן, מן Z יורד האנך ZH אל ΔE .

מאחר שהזווית ZHF ישרה, הזווית ZGH חדה; ומול הזווית הגדולה יותר מונחת הצלע הגדולה יותר. לפיכך ZF גדול מ- ZH . אך ZF שווה ל- ZB ; לכן גם ZB גדול מ- ZH — הקטן מן הגדול — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך ZH אינו מאונך ל- ΔE . ובדומה נוכיח שאין קו אחר מאונך לו מלבד ZF ; לכן ZF מאונך ל- ΔE .

לפיכך, אם קו ישר משיק למעגל ומן המרכז מחובר קו ישר אל נקודת המגע, הקו המחובר יהיה מאונך למשיק; מש"ל.

אם קו ישר משיק למעגל ומנקודת המגע מועבר קו ישר בזווית ישרה למשיק, מרכז המעגל יהיה על הקו שהועבר.

שיק הקו הישר ΔE למעגל $AB\Gamma$ בנקודה Γ ; ומן Γ יועבר ΓA בזווית ישרה ל- ΔE . אומר אני שמרכז המעגל נמצא על $A\Gamma$.

שאם לא כן, יהי, אם אפשר, Z המרכז; ויחובר ΓZ .

מאחר שהקו הישר ΔE משיק למעגל $AB\Gamma$, ומן המרכז חובר ZF אל נקודת המגע, ZF מאונך ל- ΔE ; לפיכך הזווית ZFE ישרה. אך גם AFE ישרה; לכן ZFE שווה ל- AFE — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך Z אינו מרכז המעגל $AB\Gamma$. ובדומה נוכיח שאין מרכז אחר אלא על $A\Gamma$.

לפיכך, אם קו ישר משיק למעגל ומנקודת המגע מועבר קו ישר בזווית ישרה למשיק, מרכז המעגל יהיה על הקו שהועבר; מש"ל.

במעגל, הזווית שבמרכז היא כפליים מן הזווית שבהיקף, כאשר לשתי הזוויות אותה קשת כבסיס.

יהי $AB\Gamma$ מעגל; תהיה $BE\Gamma$ הזווית שבמרכזו ו־ $BA\Gamma$ הזווית שבהיקפו, ותהיה לשתייהן אותה קשת $B\Gamma$ כבסיס. אומר אני שהזווית $BE\Gamma$ היא כפליים מן הזווית $BA\Gamma$.

יחובר AE ויוארך אל Z .

מאחר ש־ EA שווה ל־ EB , גם הזווית EAB שווה לזווית EBA ; לפיכך הזוויות EAB , EBA יחד הן כפליים מן EAB . אך הזווית BEZ שווה לזוויות EAB , EBA יחד; לכן גם BEZ היא כפליים מן EAB . מאותם טעמים גם $ZE\Gamma$ היא כפליים מן EAB . לפיכך הזווית השלמה $BE\Gamma$ היא כפליים מן הזווית השלמה $BA\Gamma$.

עתה יישבר הקו לכיוון האחר ותהי זווית אחרת $BA\Gamma$; יחובר AE ויוארך אל H . בדומה נוכיח שהזווית $HE\Gamma$ היא כפליים מן $EA\Gamma$, ואילו HEB היא כפליים מן EAB . לפיכך הזווית הנותרת $BE\Gamma$ היא כפליים מן הזווית הנותרת $BA\Gamma$.

לפיכך, במעגל, הזווית שבמרכזו היא כפליים מן הזווית שבהיקף, כאשר לשתייהן אותה קשת כבסיס; מש״ל.

במעגל, הזוויות הנמצאות באותו קטע שוות זו לזו.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל, ובאותו קטע $BAE\Delta$ תהיינה הזוויות $BE\Delta$, $BA\Delta$. אומר אני שהזוויות $BE\Delta$, $BA\Delta$ שוות זו לזו.

יימצא מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$, ויהי Z ; ויחברו $Z\Delta$, BZ .

מאחר שהזווית BZA נמצאת במרכז והזווית BAA בהיקף, ויש להן אותה קשת BZA כבסיס, הזווית BZA היא כפליים מן הזווית BAA . מאותם טעמים BZA היא גם כפליים מן BEA ; לפיכך BAA שווה ל- BEA .

לפיכך, במעגל, הזוויות הנמצאות באותו קטע שוות זו לזו; מש"ל.

במרובעים הנמצאים בתוך מעגלים, הזוויות הנגדיות שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

יהי $ABCA$ מעגל וכתוכו המרובע $ABCA$. אומר אני שהזוויות הנגדיות שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

יחברו BA , AC .

מאחר שבכל משולש שלוש הזוויות שוות יחד לשתי זוויות ישרות, שלוש הזוויות ABC , ACB , BAC של המשולש ABC שוות יחד לשתי זוויות ישרות. והזווית BAC שווה ל- BCA , שכן הן באותו קטע BAC ; והזווית ACB שווה ל- ABC , שכן הן באותו קטע ACB . לפיכך הזווית השלמה ADC שווה לזוויות ABC , BAC , ACB יחד. תתווסף לשתיהן הזווית ABC ; לכן הזוויות ABC , BAC , ACB שוות יחד לזוויות ABC , BAC , ACB אך ABC , ADC שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן גם ABC , ADC שוות יחד לשתי זוויות ישרות. ובדומה נוכיח שגם הזוויות BAC , ADC שוות יחד לשתי זוויות ישרות.

לפיכך, במרובעים הנמצאים בתוך מעגלים, הזוויות הנגדיות שוות יחד לשתי זוויות ישרות; מש"ל.

על אותו קו ישר לא ייבנו באותו צד שני קטעי מעגלים דומים ובלתי־שווים.

שאם אפשר, ייבנו על אותו קו ישר AB , באותו צד, שני קטעי המעגלים הדומים והבלתי־שווים $A\Gamma B$, $A\Delta B$; יוארך $A\Gamma\Delta$, ויחברו ΓB , ΔB .

מאחר שהקטע $A\Gamma B$ דומה לקטע $A\Delta B$, וקטעי מעגלים דומים הם אלה המקבלים זוויות שוות, הזווית $A\Gamma B$ שווה לזווית $A\Delta B$ — החיצונית לפנימית — וזה בלתי־אפשרי.

לפיכך, על אותו קו ישר לא ייבנו באותו צד שני קטעי מעגלים דומים ובלתי־שווים; מש"ל.

קטעי מעגלים דומים שעל קווים ישרים שווים שווים זה לזה.

יהיו AEB , $\Gamma Z\Delta$ קטעי מעגלים דומים שעל הקווים הישרים השווים AB , $\Gamma\Delta$. אומר אני שהקטע AEB שווה לקטע $\Gamma Z\Delta$.

כי אם מניחים את הקטע AEB על $\Gamma Z\Delta$, את הנקודה A על Γ ואת הקו הישר AB על $\Gamma\Delta$, גם הנקודה B תתלכד עם Δ , מפני ש־ AB שווה ל־ $\Gamma\Delta$. וכאשר AB מתלכד עם $\Gamma\Delta$, גם הקטע AEB יתלכד עם $\Gamma Z\Delta$. שאילו הקו הישר AB היה מתלכד עם $\Gamma\Delta$ אך הקטע AEB לא היה מתלכד עם $\Gamma Z\Delta$, הוא היה נופל בתוכו או מחוצה לו או סוטה ממנו כמו $\Gamma H\Delta$, ומעגל היה חותך מעגל ביותר משתי נקודות; וזה בלתי־אפשרי. לפיכך אין זה נכון שכאשר הקו הישר AB מתלכד עם $\Gamma\Delta$, הקטע AEB אינו מתלכד עם $\Gamma Z\Delta$. לכן הוא יתלכד עמו ויהיה שווה לו.

לפיכך, קטעי מעגלים דומים שעל קווים ישרים שווים שווים זה לזה; מש"ל.

בהינתן קטע של מעגל, להשלים את המעגל שהוא קטע ממנו.

יהי $AB\Gamma$ קטע המעגל הנתון. נדרש אפוא להשלים מן הקטע $AB\Gamma$ את המעגל שהוא קטע ממנו.

ייחצה $A\Gamma$ בנקודה Δ ; מן הנקודה Δ יועבר ΔB בזווית ישרה ל- $A\Gamma$, ויחובר AB . לפיכך הזווית $AB\Delta$ גדולה מן הזווית BAA , או שווה לה, או קטנה ממנה.

תהי תחילה גדולה ממנה. על הקו הישר BA , בנקודה A שעליו, תיבנה הזווית BAE השווה לזווית $AB\Delta$; יוארך ΔB אל E , ויחובר EF . מאחר שהזווית ABE שווה לזווית BAE , גם הקו הישר EB שווה ל- EA . ומאחר ש- $\Delta\Gamma$ שווה ל- ΔE ומשותף, שתי הצלעות ΔE , $\Delta\Gamma$ והזווית $\Delta E\Gamma$ שווה לזווית $\Delta E\Gamma$, שכן שתיהן ישרות. לפיכך הבסיס AE שווה לבסיס ΓE . אך הוכח ש- AE שווה ל- BE ; לכן גם BE שווה ל- ΓE . לפיכך שלושת הקווים AE , EB , $E\Gamma$ שווים זה לזה; לכן המעגל שיתואר במרכז E וברדיוס אחד מן AE , EB , $E\Gamma$ יעבור גם דרך שאר הנקודות ויהיה המעגל שהושלם. לפיכך, בהינתן קטע מעגל, הושלם המעגל. וברור שהקטע $AB\Gamma$ קטן מחצי-מעגל, מפני שהמרכז E נמצא מחוצה לו.

ובדומה, אם הזווית $AB\Delta$ שווה לזווית BAA , אזי, מאחר ש- $\Delta\Gamma$ נעשה שווה לכל אחד מן ΔB , $\Delta\Gamma$, יהיו שלושת הקווים ΔA , ΔB , $\Delta\Gamma$ שווים זה לזה; ו- Δ יהיה מרכז המעגל שהושלם, וברור שהקטע $AB\Gamma$ יהיה חצי-מעגל.

ואם הזווית $AB\Delta$ קטנה מן BAA , ונבנה על הקו הישר BA , בנקודה A שעליו, זווית השווה ל- $AB\Delta$, המרכז ייפול על ΔB בתוך הקטע $AB\Gamma$; וברור שהקטע $AB\Gamma$ יהיה גדול מחצי-מעגל.

לפיכך, בהינתן קטע של מעגל, הושלם המעגל; כנדרש לעשות.

במעגלים שווים, זוויות שוות נשענות על קשתות שוות, בין שהן נמצאות במרכזים ובין בהיקפים.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ מעגלים שווים, ובהם תהיינה הזוויות שבמרכזים $BH\Gamma$, $E\Theta Z$ שוות, וכן הזוויות שבהיקפים $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ שוות. אומר אני שהקשת $BK\Gamma$ שווה לקשת $E\Delta Z$.

יחוברו $B\Gamma$, EZ .

מאחר שהמעגלים $AB\Gamma$, ΔEZ שווים, גם הקווים מן המרכזים שווים. לפיכך שתי הצלעות BH , $H\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $E\Theta$, ΘZ ; והזווית שב- H שווה לזווית שב- Θ . לכן הבסיס $B\Gamma$ שווה לבסיס EZ . ומאחר שהזווית שב- A שווה לזווית שב- Δ , הקטע $BA\Gamma$ דומה לקטע $E\Delta Z$; והם על קווים ישרים שווים. אך קטעי מעגלים דומים שעל קווים ישרים שווים זה לזה; לפיכך הקטע $BA\Gamma$ שווה לקטע $E\Delta Z$. וגם המעגל השלם $AB\Gamma$ שווה למעגל השלם ΔEZ ; לכן הקשת הנותרת $BK\Gamma$ שווה לקשת הנותרת $E\Delta Z$.

לפיכך, במעגלים שווים, זוויות שוות נשענות על קשתות שוות, בין שהן נמצאות במרכזים ובין בהיקפים; מש"ל.

במעגלים שווים, הזוויות הנשענות על קשתות שוות שוות זו לזו, בין שהן נמצאות במרכזים ובין בהיקפים.

במעגלים השווים $AB\Gamma$, ΔEZ יישענו על הקשתות השוות $B\Gamma$, EZ הזוויות $BH\Gamma$, $E\Theta Z$ שבמרכזים H , Θ , והזוויות $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ שבהיקפים. אומר אני שהזווית $BH\Gamma$ שווה לזווית $E\Theta Z$, והזווית $BA\Gamma$ שווה לזווית $E\Delta Z$.

שאם הזווית $BH\Gamma$ אינה שווה לזווית $E\Theta Z$, אחת מהן גדולה יותר. תהי $BH\Gamma$ הגדולה, ועל הקו הישר BH , בנקודה H שעליו, תיבנה הזווית BHK השווה לזווית $E\Theta Z$. זוויות שוות שבמרכזים נשענות על קשתות שוות; לפיכך הקשת BK שווה לקשת EZ . אך EZ שווה ל- $B\Gamma$; לכן גם BK שווה ל- $B\Gamma$ — הקטנה לגדולה — וזה בלתי־אפשרי. לפיכך הזווית $BH\Gamma$ אינה בלתי־שווה לזווית $E\Theta Z$; לכן הן שוות. והזווית שב- A היא מחצית $BH\Gamma$, והזווית שב- Δ היא מחצית $E\Theta Z$; לפיכך גם הזווית שב- A שווה לזווית שב- Δ .

לפיכך, במעגלים שווים, הזוויות הנשענות על קשתות שוות שוות זו לזו, בין שהן נמצאות במרכזים ובין בהיקפים; מש"ל.

במעגלים שווים, קווים ישרים שווים חותכים קשתות שוות: הקשת הגדולה שווה לגדולה, והקטנה לקטנה.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ מעגלים שווים, ובהם יהיו הקווים הישרים AB , ΔE שווים; ויחתכו את הקשתות הגדולות ΔZE , $A\Gamma B$ ואת הקשתות הקטנות AHB , $\Delta\Theta E$. אומר אני שהקשת הגדולה $A\Gamma B$ שווה לקשת הגדולה ΔZE , והקשת הקטנה AHB שווה ל- $\Delta\Theta E$.

יימצאו מרכזי המעגלים K , Λ ; ויחברו AK , KB , $\Delta\Lambda$, ΔE .

ומאחר שהמעגלים שווים, גם הקווים מן המרכזים שווים. לפיכך שתי הצלעות AK , KB שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta\Lambda$, ΔE ; וגם הבסיס AB שווה לבסיס ΔE . לכן הזווית AKB שווה לזווית $\Delta\Lambda E$. זוויות שוות שבמרכזים נשענות על קשתות שוות; לפיכך הקשת AHB שווה לקשת $\Delta\Theta E$. וגם המעגל

השלם $AB\Gamma$ שווה למעגל השלם ΔEZ ; לכן הקשת הנותרת $A\Gamma B$ שווה לקשת הנותרת ΔZE .

לפיכך, במעגלים שווים, קווים ישרים שווים חותכים קשתות שוות: הקשת הגדולה שווה לגדולה, והקטנה לקטנה; מש"ל.

במעגלים שווים, מול קשתות שוות מונחים קווים ישרים שווים.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ מעגלים שווים, ובהם ייחתכו הקשתות השוות $BH\Gamma$, $E\Theta Z$; ויחברו הקווים הישרים $B\Gamma$, EZ . אומר אני ש- $B\Gamma$ שווה ל- EZ .

יימצאו מרכזי המעגלים, ויהיו K , Λ ; ויחברו BK , $K\Gamma$, $E\Lambda$, ΛZ .

מאחר שהקשת $BH\Gamma$ שווה לקשת $E\Theta Z$, גם הזווית $BK\Gamma$ שווה לזווית $E\Lambda Z$. ומאחר שהמעגלים $AB\Gamma$, ΔEZ שווים, גם הקווים מן המרכזים שווים. לפיכך שתי הצלעות BK , $K\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $E\Lambda$, ΛZ , והן כוללות זוויות שוות; לכן הבסיס $B\Gamma$ שווה לבסיס EZ .

לפיכך, במעגלים שווים, מול קשתות שוות מונחים קווים ישרים שווים; מש"ל. לחצות קשת נתונה.

תהי $A\Delta B$ הקשת הנתונה. נדרש אפוא לחצות את הקשת $A\Delta B$.

יחבר AB וייחצה בנקודה Γ ; מן הנקודה Γ יועבר $\Gamma\Delta$ בזווית ישרה לקו הישר AB ; ויחברו $A\Delta$, ΔB .

ומאחר ש- $A\Gamma$ שווה ל- ΓB ו- $\Gamma\Delta$ משותף, שתי הצלעות $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$; והזווית $A\Gamma\Delta$ שווה לזווית $B\Gamma\Delta$, שכן שתיהן

ישרות. לפיכך הבסיס ΔA שווה לבסיס ΔB . וקווים ישרים שווים חותכים קשתות שוות, הגדולה את הגדולה והקטנה את הקטנה; וכל אחת מן הקשתות ΔA , ΔB קטנה מחצי-מעגל. לפיכך הקשת ΔA שווה לקשת ΔB .

לפיכך הקשת הנתונה נחצתה בנקודה Δ ; כנדרש לעשות.

במעגל, הזווית שבתוך חצי-המעגל ישרה; הזווית שבתוך הקטע הגדול קטנה מזווית ישרה, והזווית שבתוך הקטע הקטן גדולה מזווית ישרה. ועוד, הזווית של הקטע הגדול גדולה מזווית ישרה, והזווית של הקטע הקטן קטנה מזווית ישרה.

יהי $AB\Gamma\Delta$ מעגל, יהי $B\Gamma$ קוטרו ו- E מרכזו; ויחוברו BA , $A\Gamma$, $\Delta\Gamma$. אומר אני שהזווית $B\Gamma\Delta$ שבתוך חצי-המעגל $B\Gamma$ ישרה; שהזווית $AB\Gamma$ שבתוך הקטע $AB\Gamma$, הגדול מחצי-מעגל, קטנה מזווית ישרה; ושהזווית $A\Delta\Gamma$ שבתוך הקטע $A\Delta\Gamma$, הקטן מחצי-מעגל, גדולה מזווית ישרה.

יחובר AE , ויארך BA אל Z .

ומאחר ש- BE שווה ל- EA , גם הזווית ABE שווה לזווית BAE . ושוב, מאחר ש- GE שווה ל- EA , גם הזווית AGE שווה לזווית IAE . לפיכך הזווית השלמה $B\Gamma\Delta$ שווה לשתי הזוויות $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ יחד. וגם הזווית $Z\Delta\Gamma$, החיצונית למשולש $AB\Gamma$, שווה לשתי הזוויות $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ יחד. לכן הזווית $B\Gamma\Delta$ שווה לזווית $Z\Delta\Gamma$, ולפיכך כל אחת מהן ישרה. לכן הזווית $B\Gamma\Delta$ שבתוך חצי-המעגל $B\Gamma$ ישרה.

ומאחר ששתי הזוויות $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ של המשולש $AB\Gamma$ קטנות יחד משתי זוויות ישרות, ואילו $B\Gamma\Delta$ ישרה, הזווית $AB\Gamma$ קטנה מזווית ישרה; והיא נמצאת בתוך הקטע $AB\Gamma$ הגדול מחצי-מעגל.

ומאחר ש- $AB\Gamma\Delta$ הוא מרובע במעגל, חזויותיהם הנגדיות של מרובעים במעגלים שוות יחד לשתי זוויות ישרות, ואילו חזויות $AB\Gamma$ קטנה מזווית ישרה, חזויות הנגדית הנותרת $A\Delta\Gamma$ גדולה מזווית ישרה; והיא נמצאת בתוך הקטע $A\Delta\Gamma$ הקטן מחצי-מעגל.

אומר אני גם שזווית הקטע הגדול, הכלולה בין הקשת $AB\Gamma$ ובין הקו הישר $A\Gamma$, גדולה מזווית ישרה; ואילו זווית הקטע הקטן, הכלולה בין הקשת $A\Delta$ ובין הקו הישר $A\Gamma$, קטנה מזווית ישרה. זה ברור מיד: מאחר שהזווית הכלולה בין הקווים הישרים $AB\Gamma$, BA , $A\Gamma$ ישרה, חזויות הכלולה בין הקשת $AB\Gamma$ ובין הקו הישר $A\Gamma$ גדולה מזווית ישרה. ושוב, מאחר שהזווית הכלולה בין הקווים הישרים $A\Gamma$, AZ , ישרה, חזויות הכלולה בין הקו הישר ΓA ובין הקשת $A\Delta$ קטנה מזווית ישרה.

לפיכך, במעגל, חזויות שבתוך חצי-המעגל ישרה; חזויות שבתוך הקטע הגדול קטנה מזווית ישרה, וחזויות שבתוך הקטע הקטן גדולה מזווית ישרה. ועוד, חזויות של הקטע הגדול גדולה מזווית ישרה, וחזויות של הקטע הקטן קטנה מזווית ישרה; מש"ל.

אם קו ישר משיק למעגל, ומנקודת המגע מועבר אל תוך המעגל קו ישר החותך את המעגל, חזויות שהוא יוצר עם המשיק יהיו שוות לחזויות שבקטעים המתחלפים של המעגל.

שיק הקו הישר EZ למעגל $AB\Gamma\Delta$ בנקודה B , ומן הנקודה B יועבר לתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$ הקו הישר BA החותך אותו. אומר אני שהזוויות ש- $BA\Delta$ יוצר עם המשיק EZ שוות לחזויות שבקטעים המתחלפים של המעגל: חזויות ZBA

שווה לזווית הנבנית בקטע $B\Delta\Delta$, והזווית EBA שווה לזווית הנבנית בקטע $\Delta\Gamma B$.

מן B יועבר BA בזווית ישרה ל- EZ ; על הקשת $B\Delta$ תילקח נקודה כלשהי Γ ; ויחברו $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$, ΓB .

מאחר שהקו הישר EZ משיק למעגל $AB\Gamma\Delta$ בנקודה B , ומנקודת המגע הועבר BA בזווית ישרה למשיק, מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$ נמצא על BA . לפיכך BA הוא קוטר המעגל $AB\Gamma\Delta$; ולכן הזווית $A\Delta B$, הנמצאת בחצי־מעגל, ישרה. מכאן הזוויות הנותרות $AB\Delta$, $B\Delta\Delta$ שוות יחד לזווית ישרה אחת. וגם הזווית ABZ ישרה; לכן ABZ שווה לזוויות $AB\Delta$, $B\Delta\Delta$ יחד. תוחסר משניהם הזווית המשותפת $AB\Delta$; לפיכך הזווית הנותרת ΔBZ שווה לזווית $B\Delta\Delta$ שבקטע המתחלף של המעגל. ומאחר ש- $AB\Gamma\Delta$ הוא מרובע במעגל, זוויותיו הנגדיות שוות יחד לשתי זוויות ישרות. וגם הזוויות ΔBE , ΔBZ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך ΔBE , ΔBZ שוות יחד ל- $B\Delta\Delta$. ומאלה הוכח ש- $B\Delta\Delta$ שווה ל- ΔBZ ; לכן הזווית הנותרת ΔBE שווה לזווית $\Delta\Gamma B$ שבקטע המתחלף $\Delta\Gamma B$ של המעגל.

לפיכך, אם קו ישר משיק למעגל, ומנקודת המגע מועבר אל תוך המעגל קו ישר החותך את המעגל, הזוויות שהוא יוצר עם המשיק יהיו שוות לזוויות שבקטעים המתחלפים של המעגל; מש"ל.

לתאר על קו ישר נתון קטע מעגל המקבל זווית השווה לזווית קווית נתונה.

יהי AB הקו הישר הנתון, ותהי הזווית שב Γ הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לתאר על הקו הישר הנתון AB קטע מעגל המקבל זווית השווה לזווית שב Γ .

הזווית שב Γ היא חדה, ישרה או קהה. תהי תחילה חדה; וכמו בשרטוט הראשון, על הקו הישר AB , בנקודה A , תיבנה הזווית BAA השווה לזווית שב Γ . לכן גם BAA חדה. יועבר AE בזווית ישרה ל ΔA ; ייחצה AB בנקודה Z ; ומן הנקודה Z יועבר ZH בזווית ישרה ל AB ; ויחובר HB .

ומאחר ש AZ שווה ל ZB ו ZH משותף, שתי הצלעות AZ, ZH שוות בהתאמה לשתי הצלעות BZ, ZH ; והזווית AZH שווה לזווית BZH . לפיכך הבסיס AH שווה לבסיס BH . לכן המעגל שיתואר במרכז H וברדיוס HA יעבור גם דרך B . יתואר ויהי ABE ; ויחובר EB . מאחר ש ΔA עומד בזווית ישרה ל ΔA בקצה הקוטר AE , AE משיק למעגל ABE . ומאחר שהקו הישר ΔA משיק למעגל ABE , ומנקודת המגע A הועבר הקו הישר AB אל תוך המעגל, הזווית ΔAB שווה לזווית AEB שבקטע המתחלף של המעגל. אך ΔAB שווה לזווית שב Γ ; לכן גם הזווית שב Γ שווה ל AEB .

לפיכך תואר על הקו הישר הנתון AB קטע המעגל AEB , המקבל את הזווית AEB השווה לזווית הנתונה שב Γ .

עתה תהי הזווית שב Γ ישרה; ושוב נדרש לתאר על AB קטע מעגל המקבל זווית השווה לזווית הישרה שב Γ . כמו בשרטוט השני, תיבנה הזווית BAA השווה לזווית הישרה שב Γ ; ייחצה AB בנקודה Z ; ובמרכז Z וברדיוס אחד מן ZA, ZB יתואר המעגל AEB .

לפיכך הקו הישר $A\Delta$ משיק למעגל ABE , מפני שהזווית שב־ A ישרה. והזווית BAA שווה לזווית שבתוך הקטע AEB , שכן גם היא ישרה בהיותה בתוך חצי־מעגל. אך BAA שווה גם לזווית שב־ Γ ; לפיכך הזווית שבתוך AEB שווה לזווית שב־ Γ .

לפיכך שוב תואר על AB קטע המעגל AEB המקבל זווית השווה לזווית שב־ Γ .

עתה תהי הזווית שב־ Γ קהה; ועל הקו הישר AB , בנקודה A , תיבנה הזווית BAA השווה לה, כמו בשרטוט השלישי. יועבר AE בזווית ישרה ל־ $A\Delta$; שוב ייחצה AB בנקודה Z ; יועבר ZH בזווית ישרה ל־ AB ; ויחובר HB .

ושוב, מאחר ש־ AZ שווה ל־ ZB ו־ ZH משותף, שתי הצלעות AZ , ZH שוות בהתאמה לשתי הצלעות BZ , ZH ; והזווית AZH שווה לזווית BZH . לפיכך הבסיס AH שווה לבסיס BH ; לכן המעגל שיתואר במרכז H וברדיוס HA יעבור גם דרך B . יעבור כמו AEB . ומאחר ש־ $A\Delta$ עומד בזווית ישרה לקוטר AE מקצהו, $A\Delta$ משיק למעגל AEB . ומנקודת המגע A הועבר AB ; לפיכך הזווית BAA שווה לזווית הנבנית בקטע המתחלף $A\Theta B$ של המעגל. אך BAA שווה לזווית שב־ Γ ; לכן הזווית שבתוך הקטע $A\Theta B$ שווה לזווית שב־ Γ .

לפיכך תואר על הקו הישר הנתון AB קטע המעגל $A\Theta B$ המקבל זווית השווה לזווית שב־ Γ ; כנדרש לעשות.

לחתוך ממעגל נתון קטע המקבל זווית השווה לזווית קווית נתונה.

יהי $AB\Gamma$ המעגל הנתון, ותהי הזווית שב־ Δ הזווית הקווית הנתונה. נדרש אפוא לחתוך מן המעגל $AB\Gamma$ קטע המקבל זווית השווה לזווית הקווית הנתונה שב־ Δ .

יועבר EZ המשיק למעגל $AB\Gamma$ בנקודה B ; ועל הקו הישר ZB , בנקודה B שעליו, תיבנה הזווית $ZB\Gamma$ השווה לזווית שב Δ .

מאחר שהקו הישר EZ משיק למעגל $AB\Gamma$ ומנקודת המגע B הועבר $B\Gamma$, הזווית $ZB\Gamma$ שווה לזווית הנבנית בקטע המתחלף $BA\Gamma$. אך $ZB\Gamma$ שווה לזווית שב Δ ; לפיכך גם הזווית שבתוך הקטע $BA\Gamma$ שווה לזווית שב Δ .

לפיכך נחתך מן המעגל הנתון $AB\Gamma$ הקטע $BA\Gamma$, המקבל זווית השווה לזווית הקווית הנתונה שב Δ ; כנדרש לעשות.

אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה בתוך מעגל, המלבן הכלול בין שני חלקיו של האחד שווה למלבן הכלול בין שני חלקיו של האחר.

בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$ יחתכו שני הקווים הישרים AB , AD זה את זה בנקודה E . אומר אני שהמלבן הכלול בין AE , EF שווה למלבן הכלול בין AE , EB .

אם AB , AD עוברים דרך המרכז, כך ש E הוא מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$, ברור שמאחר ש AE , EF , AD , EB שווים, גם המלבן הכלול בין AE , EF שווה למלבן הכלול בין AE , EB .

עתה לא יעברו AB , AD דרך המרכז. ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma\Delta$, ויהי Z ; מן Z יורדו האנכים ZH , $Z\Theta$ אל הקווים הישרים AB , AD ; ויחברו ZB , $Z\Gamma$, ZE .

מאחר שהקו הישר HZ העובר דרך המרכז חותך בזווית ישרה את הקו הישר AB שאינו עובר דרך המרכז, הוא גם חוצה אותו; לפיכך AH שווה ל ΓH . ומאחר שהקו הישר AD נחלק לחלקים שווים בנקודה H ולחלקים בלתי־שווים בנקודה E , המלבן הכלול בין AE , EF שווה לריבוע שעל EH , שווה לריבוע

שעל HF . יתווסף לשניהם הריבוע שעל HZ ; לפיכך המלבן הכלול בין AE, EF , בצירוף הריבועים שעל HE, HZ , שווה לריבועים שעל FH, HZ . אך הריבוע שעל ZE שווה לריבועים שעל EH, HZ , והריבוע שעל ZF שווה לריבועים שעל FH, HZ . לפיכך המלבן הכלול בין AE, EF , בצירוף הריבוע שעל ZE , שווה לריבוע שעל ZF . אך ZF שווה ל- ZB ; לכן המלבן הכלול בין AE, EF , בצירוף הריבוע שעל EZ , שווה לריבוע שעל ZB . מאותם טעמים גם המלבן הכלול בין AE, EB , בצירוף הריבוע שעל ZE , שווה לריבוע שעל ZB . והוכח שהמלבן הכלול בין AE, EF , בצירוף הריבוע שעל ZE , שווה לריבוע שעל ZB ; לכן המלבן הכלול בין AE, EF , בצירוף הריבוע שעל ZE , שווה למלבן הכלול בין AE, EB , בצירוף הריבוע שעל ZE . יוחסר משניהם הריבוע המשותף שעל ZE ; לפיכך המלבן הנותר הכלול בין AE, EF שווה למלבן הנותר הכלול בין AE, EB .

לפיכך, אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה בתוך מעגל, המלבן הכלול בין שני חלקיו של האחד שווה למלבן הכלול בין שני חלקיו של האחר; מש"ל.

אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מגיעים אל המעגל שני קווים ישרים, האחד חותך את המעגל והאחר משיק לו, המלבן הכלול בין הקו החותך השלם ובין חלקו החיצוני, שבין הנקודה ובין הקשת הקמורה, שווה לריבוע שעל המשיק.

תילקח מחוץ למעגל $AB\Gamma$ הנקודה Δ , ומן Δ יגיעו אל המעגל שני הקווים הישרים $\Delta\Gamma, \Delta B$. הקו $\Delta\Gamma A$ יחתוך את המעגל $AB\Gamma$, ואילו BA ישיק לו. אומר אני שהמלבן הכלול בין $\Delta\Gamma, \Delta A$ שווה לריבוע שעל ΔB .

הקו ΓA עובר דרך המרכז או אינו עובר דרכו. תחילה יעבור דרך המרכז, ויהי Z מרכז המעגל $AB\Gamma$; ויחבר ZB . לפיכך הזווית ZBA ישרה. ומאחר שהקו הישר $A\Gamma$ נחצה בנקודה Z והקו ΓA נוסף לו, המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל $Z\Gamma$, שווה לריבוע שעל ZA . אך $Z\Gamma$ שווה ל- ZB ; לכן המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל ZB , שווה לריבוע שעל ZA . ולריבוע שעל ZA שווים הריבועים שעל ZB , BA ; לפיכך המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל ZB , שווה לריבועים שעל ZB , BA . יוחדר משניהם הריבוע המשותף שעל ZB ; לפיכך המלבן הנותר הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$ שווה לריבוע שעל המשיק ΔB .

עתה לא יעבור $\Delta\Gamma A$ דרך מרכז המעגל $AB\Gamma$. ימצא המרכז E ; מן E יורד האנך EZ אל $A\Gamma$; ויחברו EA , $E\Gamma$, EB . לפיכך הזווית EBA ישרה. ומאחר שהקו הישר EZ העובר דרך המרכז חותך בזווית ישרה את הקו הישר $A\Gamma$ שאינו עובר דרך המרכז, הוא גם חוצה אותו; לכן AZ שווה ל- $Z\Gamma$. ומאחר שהקו הישר $A\Gamma$ נחצה בנקודה Z והקו ΓA נוסף לו, המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל $Z\Gamma$, שווה לריבוע שעל ZA . יתווסף לשניהם הריבוע שעל ZE ; לפיכך המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבועים שעל ΓZ , ZE , שווה לריבועים שעל ZA , ZE . אך הריבוע שעל $E\Gamma$ שווה לריבועים שעל ΓZ , ZE , שכן הזווית $EZ\Gamma$ ישרה; והריבוע שעל EA שווה לריבועים שעל ΔZ , ZE . לפיכך המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל $E\Gamma$, שווה לריבוע שעל EA . אך $E\Gamma$ שווה ל- EB ; לכן המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע שעל EB , שווה לריבוע שעל EA . ולריבוע שעל EA שווים הריבועים שעל EB , BA , שכן הזווית EBA ישרה; לפיכך המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $A\Delta$, בצירוף הריבוע

שעל EB , שווה לריבועים שעל BA , EB . יוחסר משניהם הריבוע המשותף שעל EB ; לפיכך המלבן הנותר הכלול בין ΔA , $\Delta \Gamma$ שווה לריבוע שעל AB .

לפיכך, אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מגיעים אל המעגל שני קווים ישרים, האחד חותך את המעגל והאחר משיק לו, המלבן הכלול בין הקו החותך השלם ובין חלקו החיצוני, שבין הנקודה ובין הקשת הקמורה, שווה לריבוע שעל המשיק; מש"ל.

אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מגיעים אל המעגל שני קווים ישרים, האחד חותך את המעגל והאחר מגיע אליו; ואם המלבן הכלול בין הקו החותך השלם ובין חלקו החיצוני, שבין הנקודה ובין הקשת הקמורה, שווה לריבוע שעל הקו המגיע, הקו המגיע ישיק למעגל.

תילקח מחוץ למעגל $AB\Gamma$ הנקודה Δ , ומן Δ יגיעו אל המעגל $AB\Gamma$ שני הקווים הישרים ΔB , $\Delta \Gamma$. הקו $\Delta \Gamma A$ יחתוך את המעגל ב- ΔB יגיע אליו; ויהי המלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔA שווה לריבוע שעל AB . אומר אני ש- ΔB משיק למעגל $AB\Gamma$.

יועבר מן Δ הקו ΔE המשיק למעגל $AB\Gamma$; ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי Z ; ויחברו ZE , ZB , ZA . לפיכך הזווית $\angle ZE\Delta$ ישרה. ומאחר ש- ΔE משיק למעגל $AB\Gamma$ ואילו $\Delta \Gamma A$ חותך אותו, המלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔA שווה לריבוע שעל ΔE . אך הונח שהמלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔA שווה גם לריבוע שעל AB ; לפיכך הריבוע שעל ΔE שווה לריבוע שעל AB , ומכאן ΔE שווה ל- AB . וגם $\angle ZE$ שווה ל- $\angle ZB$; לפיכך שתי הצלעות ΔE , ΔB שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΔE , ΔB , והבסיס ΔZ משותף. לכן הזווית $\angle \Delta EZ$ שווה לזווית $\angle \Delta BZ$. אך $\angle \Delta EZ$ ישרה; לפיכך גם $\angle \Delta BZ$ ישרה. ו- $\angle ZB$, בהארכתו, הוא קוטר; והקו המועבר בזווית ישרה

לקוטר של מעגל מקצהו משיק למעגל. לכן ΔB משיק למעגל $AB\Gamma$. ובדומה יוכח הדבר גם אם המרכז נמצא על $A\Gamma$.

לפיכך, אם נלקחת נקודה מחוץ למעגל וממנה מגיעים אל המעגל שני קווים ישרים, האחד חותך את המעגל והאחר מגיע אליו; ואם המלבן הכלול בין הקו החותך השלם ובין חלקו החיצוני, שבין הנקודה ובין הקשת הקמורה, שווה לריבוע שעל הקו המגיע, הקו המגיע ישיק למעגל; מש"ל.

ספר ד

נאמר שצורה קווית חסומה בתוך צורה קווית כאשר כל קודקוד של הצורה החסומה נוגע בצלע של הצורה שבתוכה היא חסומה.

ובדומה, נאמר שצורה חוסמת צורה כאשר כל צלע של הצורה החוסמת נוגעת בקודקוד של הצורה שהיא חוסמת.

נאמר שצורה קווית חסומה בתוך מעגל כאשר כל קודקוד של הצורה החסומה נוגע בהיקף המעגל.

נאמר שצורה קווית חוסמת מעגל כאשר כל צלע של הצורה החוסמת משיקה להיקף המעגל.

ובדומה, נאמר שמעגל חסום בתוך צורה כאשר היקף המעגל נוגע בכל צלע של הצורה שבתוכה הוא חסום.

נאמר שמעגל חוסם צורה כאשר היקף המעגל נוגע בכל קודקוד של הצורה שהוא חוסם.

נאמר שקו ישר הוא מיתר במעגל כאשר קצותיו נמצאים על היקף המעגל.

לקבוע במעגל נתון מיתר השווה לקו ישר נתון שאינו גדול מקוטר המעגל.

יהי $AB\Gamma$ המעגל הנתון, ויהי Δ הקו הישר הנתון שאינו גדול מקוטר המעגל. נדרש אפוא לקבוע במעגל $AB\Gamma$ מיתר השווה לקו הישר Δ .

יועבר קוטר המעגל $AB\Gamma$, ויהי $B\Gamma$. אם $B\Gamma$ שווה ל- Δ , כבר נעשה הנדרש, שכן במעגל $AB\Gamma$ נקבע המיתר $B\Gamma$ השווה לקו הישר Δ . ואם $B\Gamma$ גדול מ- Δ , יונח ΓE שווה ל- Δ ; ובמרכז Γ וברדיוס ΓE יתואר המעגל EAZ ; ויחובר ΓA .

מאחר שהנקודה Γ היא מרכז המעגל ΓA , EAZ שווה ל- ΓE . אך ΓE שווה ל- Δ ; לפיכך גם Δ שווה ל- ΓA .

לפיכך במעגל הנתון $AB\Gamma$ נקבע המיתר ΓA השווה לקו הישר הנתון Δ ; כנדרש לעשות.

לחסום בתוך מעגל נתון משולש שווה-זוויות למשולש נתון.

יהי $AB\Gamma$ המעגל הנתון, ויהי ΔEZ המשולש הנתון. נדרש אפוא לחסום בתוך המעגל $AB\Gamma$ משולש שווה-זוויות למשולש ΔEZ .

יועבר $H\Theta$ המשיק למעגל $AB\Gamma$ בנקודה A . על הקו הישר $A\Theta$, בנקודה A שעליו, תיבנה הזווית $\Theta A\Gamma$ השווה לזווית ΔEZ ; ועל הקו הישר AH , בנקודה A שעליו, תיבנה הזווית HAB השווה לזווית ΔZE ; ויחובר $B\Gamma$.

מאחר שהקו הישר $A\Theta$ משיק למעגל $AB\Gamma$, ומנקודת המגע A הועבר הקו הישר $A\Gamma$ אל תוך המעגל, הזווית $\Theta A\Gamma$ שווה לזווית $AB\Gamma$ שבקטע המתחלף של המעגל. אך $\Theta A\Gamma$ שווה ל- ΔEZ ; לכן גם הזווית $AB\Gamma$ שווה ל- ΔEZ . מאותם טעמים גם הזווית $A\Gamma B$ שווה ל- ΔZE ; לפיכך הזווית הנותרת BAG שווה לזווית הנותרת EDZ .

לפיכך בתוך המעגל הנתון נחסם משולש שווה-זוויות למשולש הנתון; כנדרש לעשות.

לחסום סביב מעגל נתון משולש שווה-זוויות למשולש נתון.

יהי $AB\Gamma$ המעגל הנתון, ויהי ΔEZ המשולש הנתון. נדרש אפוא לחסום סביב המעגל $AB\Gamma$ משולש שווה-זוויות למשולש ΔEZ .

יוארך EZ בשני הכיוונים אל הנקודות H, Θ ; ימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$, ויהי K ; ויעברו באופן כלשהו הקו הישר KB . על הקו הישר KB , בנקודה K שעליו, תיבנה הזווית BKA השווה לזווית ΔEH , והזווית $BK\Gamma$ השווה לזווית $\Delta Z\Theta$. ודרך הנקודות A, B, Γ יועברו הקווים $\Lambda AM, MBN, N\Gamma\Lambda$ המשיקים למעגל $AB\Gamma$.

מאחר שהקווים $\Lambda M, MN, N\Lambda$ משיקים למעגל $AB\Gamma$ בנקודות A, B, Γ , ומן המרכז K חוברו $KA, KB, K\Gamma$ אל הנקודות A, B, Γ , הזוויות שבנקודות A, B, Γ ישרות. ומאחר שארבע זוויות המרובע $AMBK$ שוות לארבע זוויות ישרות, שהרי $AMBK$ נחלק לשני משולשים, והזוויות KAM, KBM ישרות, הזוויות הנותרות AKB, AMB שוות יחד לשתי זוויות ישרות. וגם הזוויות $\Delta EH, \Delta EZ$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן AKB, AMB שוות יחד ל- $\Delta EH, \Delta EZ$. ומאלה AKB שווה ל- ΔEH ; לפיכך הזווית הנותרת AMB שווה לזווית הנותרת ΔEZ . בדומה יוכח שגם ΛNB שווה ל- ΔZE ; ולכן הזווית הנותרת ΛMN שווה לזווית הנותרת $E\Delta Z$. לפיכך המשולש ΛMN שווה-זוויות למשולש ΔEZ , והוא חוסם את המעגל $AB\Gamma$.

לפיכך סביב המעגל הנתון נחסם משולש שווה-זוויות למשולש הנתון; כנדרש לעשות.

לחסום מעגל בתוך משולש נתון.

יהי $AB\Gamma$ המשולש הנתון. נדרש אפוא לחסום מעגל בתוך המשולש $AB\Gamma$.

ייחצו הזוויות $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ על ידי הקווים הישרים BA , ΓA , וייפגשו בנקודה Δ .
מן Δ יורדו האנכים ΔE , ΔZ , ΔH אל הקווים הישרים AB , $B\Gamma$, ΓA .

מאחר שהזווית $AB\Delta$ שווה לזווית ΓBA , וגם הזווית הישרה $BE\Delta$ שווה לזווית הישרה $BZ\Delta$, שני המשולשים EBA , ZBA כוללים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות, וצלע אחת השווה לצלע אחת — הצלע המשותפת BA , שמולה אחת הזוויות השוות. לכן גם הצלעות הנותרות יהיו שוות בהתאמה; לפיכך ΔE שווה ל- ΔZ . מאותם טעמים גם ΔH שווה ל- ΔZ . לכן שלושת הקווים ΔE , ΔZ , ΔH שווים זה לזה. לפיכך המעגל שיתואר במרכז Δ וברדיוס אחד מן ΔE , ΔZ , ΔH יעבור גם דרך שאר הנקודות וישיק לקווים הישרים AB , $B\Gamma$, ΓA , מפני שהזוויות שבנקודות E , Z , H ישרות. שאילו היה חותך אותם, הקו המועבר בזווית ישרה לקוטר של המעגל מקצהו היה נופל בתוך המעגל, והדבר הוכח כאבסורד. לכן המעגל המתואר במרכז Δ וברדיוס אחד מן ΔE , ΔZ , ΔH אינו חותך את הקווים AB , $B\Gamma$, ΓA ; הוא ישיק להם ויהיה חסום בתוך המשולש $AB\Gamma$. ייחסם כמו המעגל ZHE .

לפיכך המעגל EZH נחסם בתוך המשולש הנתון $AB\Gamma$; כנדרש לעשות.

לחסום מעגל סביב משולש נתון.

יהי $AB\Gamma$ המשולש הנתון. נדרש אפוא לחסום מעגל סביב המשולש הנתון $AB\Gamma$.

יִיחָצוּ הַקּוּוִיִּם הַיִּשְׂרִיִּם $AB, A\Gamma$ בנקודות Δ, E ; וּמִן הַנִּקּוּדוֹת Δ, E יוֹעֲבְרוּ ΔZ , EZ בְּזוּוִית יִשְׂרָה ל־ $AB, A\Gamma$. הֵם יִפְגְּשׁוּ בְּתוֹךְ הַמְשׁוּלֵּשׁ $AB\Gamma$, אוֹ עַל הַקּוֹ הַיִּשֵּׁר $B\Gamma$, אוֹ מִחוּץ ל־ $B\Gamma$.

תַּחֲלִילָה יִפְגְּשׁוּ בַּפְּנִים בְּנִקּוּדָה Z ; וַיַּחֲבֹרוּ $ZB, Z\Gamma, ZA$. וּמֵאַחֵר שֶׁ־ AA שׁוּוּהָ ל־ $AB, \Delta Z$ מִשׁוּתֵּף וּמֵאוּנֶךְ, הַבְּסִיס AZ שׁוּוּהָ לַבְּסִיס ZB . בְּדוּמָה נֹכֵיחַ שֶׁגַּם ΓZ שׁוּוּהָ ל־ AZ ; וְלִכֵּן גַּם ZB שׁוּוּהָ ל־ $Z\Gamma$. לְפִיכֵךְ שְׁלוֹשֶׁת הַקּוּוִיִּם $ZA, ZB, Z\Gamma$ שׁוּוִים זֶה לָזֶה. לִכֵּן הַמַּעֲגֵל שִׁיתּוּאֵר בְּמִרְכּוֹ Z וּבְרִדִּיּוֹס אֶחָד מִן $ZA, ZB, Z\Gamma$ יַעֲבֹר גַּם דֶּרֶךְ שְׂאֵר הַנִּקּוּדוֹת, וַיְהִי חוֹסֵם אֶת הַמְשׁוּלֵּשׁ $AB\Gamma$. יִיחָסֵם כְּמוֹ הַמַּעֲגֵל $AB\Gamma$.

עֵתָה יִפְגְּשׁוּ $\Delta Z, EZ$ עַל הַקּוֹ הַיִּשֵּׁר $B\Gamma$ בְּנִקּוּדָה Z , כְּמוֹ בְּשֵׁרְטוּט הַשֵּׁנִי; וַיַּחֲבֹר AZ . בְּדוּמָה נֹכֵיחַ שֶׁהַנִּקּוּדָה Z הִיא מִרְכּוֹ הַמַּעֲגֵל הַחוֹסֵם אֶת הַמְשׁוּלֵּשׁ $AB\Gamma$.

וְעֵתָה יִפְגְּשׁוּ $\Delta Z, EZ$ מִחוּץ לַמְשׁוּלֵּשׁ $AB\Gamma$ בְּנִקּוּדָה Z , כְּמוֹ בְּשֵׁרְטוּט הַשְּׁלִישִׁי; וַיַּחֲבֹרוּ $AZ, BZ, \Gamma Z$. וְשׁוֹב, מֵאַחֵר שֶׁ־ AA שׁוּוּהָ ל־ $AB, \Delta Z$ מִשׁוּתֵּף וּמֵאוּנֶךְ, הַבְּסִיס AZ שׁוּוּהָ לַבְּסִיס BZ . בְּדוּמָה נֹכֵיחַ שֶׁגַּם ΓZ שׁוּוּהָ ל־ AZ ; וְלִכֵּן גַּם BZ שׁוּוּהָ ל־ $Z\Gamma$. לְפִיכֵךְ הַמַּעֲגֵל שִׁיתּוּאֵר בְּמִרְכּוֹ Z וּבְרִדִּיּוֹס אֶחָד מִן $ZA, ZB, Z\Gamma$ יַעֲבֹר גַּם דֶּרֶךְ שְׂאֵר הַנִּקּוּדוֹת, וַיְהִי חוֹסֵם אֶת הַמְשׁוּלֵּשׁ $AB\Gamma$.

לְפִיכֵךְ מַעֲגֵל נִחְסֵם סָבִיב הַמְשׁוּלֵּשׁ הַנִּתּוּן; כִּנְדֵּרֶשׁ לַעֲשׂוֹת.

וּבְרֹר שֶׁכֵּאֲשֶׁר מִרְכּוֹ הַמַּעֲגֵל נֹפֵל בְּתוֹךְ הַמְשׁוּלֵּשׁ, הַזּוּוִית $BA\Gamma$, בְּהִיּוֹתָהּ בְּתוֹךְ קֶטֶעַ הַגְּדוּל מִחֲצִי־מַעֲגֵל, קֶטֶנָּה מְזוּוִית יִשְׂרָה; כֵּאֲשֶׁר הַמִּרְכּוֹ נֹפֵל עַל הַקּוֹ הַיִּשֵּׁר $B\Gamma$, הַזּוּוִית $BA\Gamma$, בְּהִיּוֹתָהּ בְּתוֹךְ חֲצִי־מַעֲגֵל, יִשְׂרָה; וְכֵאֲשֶׁר מִרְכּוֹ הַמַּעֲגֵל נֹפֵל

מחוץ למשולש, הזווית $B\hat{A}\Gamma$, בהיותה בתוך קטע הקטן מחצי־מעגל, גדולה מזווית ישרה.

לחסום ריבוע בתוך מעגל נתון.

יהי $AB\Gamma\Delta$ המעגל הנתון. נדרש אפוא לחסום ריבוע בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$. יועברו במעגל $AB\Gamma\Delta$ שני הקטרים $B\hat{\Gamma}$, $B\hat{\Delta}$ המאונכים זה לזה; ויחברו AB , $B\hat{\Gamma}$, $\Gamma\Delta$, ΔA .

מאחר ש־ BE שווה ל־ EA , שכן E הוא המרכז, ו־ EA משותף ומאונך, הבסיס AB שווה לבסיס ΔA . מאותם טעמים גם כל אחד מן $B\hat{\Gamma}$, $\Gamma\Delta$ שווה לכל אחד מן AB , ΔA ; לפיכך המרובע $AB\Gamma\Delta$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם ישר־זווית. מאחר שהקו הישר $B\hat{\Delta}$ הוא קוטר המעגל $AB\Gamma\Delta$, הוא חצי־מעגל; לפיכך הזווית $B\hat{\Delta A}$ ישרה. מאותם טעמים גם כל אחת מן הזוויות $AB\hat{\Gamma}$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\Delta A$ ישרה; לכן המרובע $AB\Gamma\Delta$ ישר־זווית. והוכח שהוא גם שווה־צלעות; לפיכך הוא ריבוע, והוא חסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$.

לפיכך הריבוע $AB\Gamma\Delta$ נחסם בתוך המעגל הנתון; כנדרש לעשות.

לחסום ריבוע סביב מעגל נתון.

יהי $AB\Gamma\Delta$ המעגל הנתון. נדרש אפוא לחסום ריבוע סביב המעגל $AB\Gamma\Delta$. יועברו במעגל $AB\Gamma\Delta$ שני הקטרים $B\hat{\Gamma}$, $B\hat{\Delta}$ המאונכים זה לזה; ודרך הנקודות A , B , Γ , Δ יועברו הקווים ZH , $H\Theta$, ΘK , KZ המשיקים למעגל $AB\Gamma\Delta$.

מאחר ש־ ZH משיק למעגל $AB\Gamma\Delta$, ומן המרכז E חובר EA אל נקודת המגע A , הזווית שב־ A ישרות. מאותם טעמים גם הזוויות שבנקודות B, Γ, Δ ישרות. ומאחר שהזווית AEB ישרה וגם הזווית EBH ישרה, $H\Theta$ מקביל ל־ AG . מאותם טעמים גם AG מקביל ל־ ZK ; ולכן $H\Theta$ מקביל ל־ ZK . בדומה נוכיח שגם כל אחד מן $\Theta K, HZ$ מקביל לקו $BE\Delta$. לפיכך הצורות $HK, H\Gamma, AK, ZB, BK$ הן מקביליות; ולכן HZ שווה ל־ ΘK ו־ $H\Theta$ שווה ל־ ZK . ומאחר ש־ AG שווה ל־ $BA\Delta$, וכן AG שווה לכל אחד מן $H\Theta, ZK$, ואילו $BA\Delta$ שווה לכל אחד מן $\Theta K, HZ$, המרובע $ZH\Theta K$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם ישר־זווית. מאחר ש־ $HBEA$ מקבילית והזווית AEB ישרה, גם הזווית AHB ישרה. בדומה נוכיח שגם הזוויות שב־ Z, K, Θ ישרות. לפיכך $ZH\Theta K$ ישר־זווית. והוכח שהוא גם שווה־צלעות; לכן הוא ריבוע, והוא חוסם את המעגל $AB\Gamma\Delta$.

לפיכך ריבוע נחסם סביב המעגל הנתון; כנדרש לעשות.

לחסום מעגל בתוך ריבוע נתון.

יהי $AB\Gamma\Delta$ הריבוע הנתון. נדרש אפוא לחסום מעגל בתוך הריבוע $AB\Gamma\Delta$.

ייחצו כל אחד מן $AB, \Gamma\Delta$ בנקודות E, Z . דרך E יועבר $E\Theta$ המקביל לאחד משני הקווים $AB, \Gamma\Delta$, ודרך Z יועבר ZK המקביל לאחד משני הקווים $AB, \Gamma\Delta$. לפיכך כל אחת מן הצורות $AK, KB, A\Theta, \Theta\Delta, AH, H\Gamma, BH, H\Delta$ היא מקבילית, וברור שצלעותיהן הנגדיות שוות. ומאחר ש־ $AA\Delta$ שווה ל־ AB , ו־ AE הוא מחצית $AA\Delta$ ואילו AZ מחצית AB , גם AE שווה ל־ AZ ; ולכן גם הצלעות הנגדיות שוות, ומכאן ZH שווה ל־ HE . בדומה נוכיח שגם כל אחד מן $H\Theta, HK$ שווה לכל אחד מן ZH, HE ; לפיכך ארבעת הקווים $HE, HZ, H\Theta, HK$ שווים זה לזה. לכן המעגל שיתואר במרכז H וברדיוס אחד מן $HE, HZ, H\Theta, HK$

יעבור גם דרך שאר הנקודות וישיק לקווים הישרים AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔA , מפני שהזוויות שבנקודות E , Z , Θ , K ישרות. שאילו היה המעגל חותך את AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔA , הקו המועבר בזווית ישרה לקוטר של המעגל מקצהו היה נופל בתוך המעגל, והדבר הוכח כאבסורד. לכן המעגל המתואר במרכז H וברדיוס אחד מן HE , HZ , $H\Theta$, HK אינו חותך את הקווים AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔA ; הוא ישיק להם ויהיה חסום בתוך הריבוע $AB\Gamma\Delta$.

לפיכך מעגל נחסם בתוך הריבוע הנתון; כנדרש לעשות.

לחסום מעגל סביב ריבוע נתון.

יהי $AB\Gamma\Delta$ הריבוע הנתון. נדרש אפוא לחסום מעגל סביב הריבוע $AB\Gamma\Delta$.

יחברו AF , BD ויחתכו זה את זה בנקודה E .

ומאחר ש- ΔA שווה ל- AB ו- AF משותף, שתי הצלעות ΔA , AF שוות בהתאמה לשתי הצלעות BA , AF ; וגם הבסיס ΔF שווה לבסיס BF . לפיכך הזווית ΔAF שווה לזווית BAF ; לכן הזווית ΔAB נחצתה על ידי AF . בדומה נוכיח שגם כל אחת מן הזוויות ΔA , $BF\Delta$, $\Gamma\Delta A$ נחצית על ידי הקווים AF , ΔB . ומאחר שהזווית ΔAB שווה לזווית ABF , והזווית EAB היא מחצית ΔAB ואילו EBA מחצית ABF , גם EAB שווה ל- EBA ; ולכן הצלע EA שווה ל- EB . בדומה נוכיח שכל אחד מן EA , EB שווה לכל אחד מן EF , ED . לפיכך ארבעת הקווים EA , EB , EF , ED שווים זה לזה. לכן המעגל שיתואר במרכז E וברדיוס אחד מן EA , EB , EF , ED יעבור דרך שאר הנקודות ויהיה חסום את הריבוע $AB\Gamma\Delta$. ייחסם כמו המעגל $AB\Gamma\Delta$.

לפיכך מעגל נחסם סביב הריבוע הנתון; כנדרש לעשות.

לבנות משולש שווה־שוקיים שכל אחת מזוויות הבסיס שלו היא כפליים מן הזווית הנותרת.

יונח קו ישר כלשהו AB , ויחלק בנקודה Γ כך שהמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ יהיה שווה לריבוע שעל ΓA . במרכז A וברדיוס AB יתואר המעגל $B\Delta E$; ובמעגל $B\Delta E$ ייקבע המיתר $B\Delta$ השווה לקו הישר $A\Gamma$, שאינו גדול מקוטר המעגל $B\Delta E$. יחוברו $\Delta\Gamma$, ΔA ; וסביב המשולש $A\Gamma\Delta$ ייחסם המעגל $A\Gamma\Delta$.

מאחר שהמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $A\Gamma$, ו־ $A\Gamma$ שווה ל־ $B\Delta$, המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $B\Delta$. ומאחר שהנקודה B נמצאת מחוץ למעגל $A\Gamma\Delta$, וממנה מגיעים אל המעגל שני הקווים BA , $B\Delta$, שהאחד חותך והאחר מגיע, והמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $B\Delta$, הרי $B\Delta$ משיק למעגל $A\Gamma\Delta$. ומאחר ש־ $B\Delta$ משיק, ומנקודת המגע Δ הועבר $\Delta\Gamma$, הזווית $B\Delta\Gamma$ שווה לזווית $\Delta A\Gamma$ שבקטע המתחלף של המעגל. לפיכך, מאחר ש־ $B\Delta\Gamma$ שווה ל־ $\Delta A\Gamma$, תתווסף לשתייהן $\Gamma\Delta A$; לכן הזווית השלמה $B\Delta A$ שווה לשתי הזוויות $\Delta A\Gamma$, $\Gamma\Delta A$ יחד. אך הזווית החיצונית $B\Gamma\Delta$ שווה לזווית $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ יחד; לכן גם $B\Delta A$ שווה ל־ $B\Gamma\Delta$. אך $B\Delta A$ שווה ל־ $\Gamma\Delta A$, מפני שגם הצלע $A\Delta$ שווה ל־ AB ; ולכן גם $\Delta B A$ שווה ל־ $B\Gamma\Delta$. לפיכך שלוש הזוויות $B\Delta A$, $\Delta B A$, $B\Gamma\Delta$ שוות זו לזו. ומאחר שהזווית $\Delta B\Gamma$ שווה לזווית $B\Gamma\Delta$, גם הצלע $B\Delta$ שווה לצלע $\Delta\Gamma$. אך הונח ש־ $B\Delta$ שווה ל־ ΓA ; לכן גם ΓA שווה ל־ $\Gamma\Delta$, ולפיכך הזווית $\Gamma\Delta A$ שווה לזווית $\Delta A\Gamma$. לכן שתי הזוויות $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ יחד הן כפליים מן $\Delta A\Gamma$. אך $B\Gamma\Delta$ שווה לכל אחת מן $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ יחד; לפיכך $B\Gamma\Delta$ היא כפליים מן $\Gamma\Delta A$. ו־ $B\Gamma\Delta$ שווה לכל אחת מן $B\Delta A$, $\Delta B A$; לכן גם כל אחת מן הזוויות $B\Delta A$, $\Delta B A$ היא כפליים מן $\Delta A B$.

לפיכך נבנה המשולש שווה־השוקיים ABA , שכל אחת מן הזוויות שליד הבסיס AB היא כפליים מן הזווית הנותרת; כנדרש לעשות.

לחסום בתוך מעגל נתון מחומש שווה־צלעות ושווה־זוויות.

יהי $AB\Gamma\Delta E$ המעגל הנתון. נדרש אפוא לחסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta E$ מחומש שווה־צלעות ושווה־זוויות.

יונח המשולש שווה־השוקיים $ZH\Theta$, שכל אחת מן הזוויות שב־ Θ , H היא כפליים מן הזווית שב־ Z . בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta E$ ייחסם המשולש $A\Gamma\Delta$, שווה־זוויות למשולש $ZH\Theta$, כך שהזווית $\Gamma A\Delta$ תהיה שווה לזווית שב־ Z , וכל אחת מן הזוויות $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ תהיה שווה לכל אחת מן הזוויות שב־ Θ , H . לפיכך כל אחת מן $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ היא כפליים מן $\Gamma A\Delta$. ייחצו כל אחת מן הזוויות $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ על ידי הקווים ΓE , ΔB ; ויחברו AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA .

מאחר שכל אחת מן הזוויות $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ היא כפליים מן $\Gamma A\Delta$, והן נחצו על ידי הקווים ΓE , ΔB , חמש הזוויות $\Delta A\Gamma$, $A\Gamma E$, $E\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta B$, $B\Delta A$ שוות זו לזו. זוויות שוות נשענות על קשתות שוות; לפיכך חמש הקשתות AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA שוות זו לזו. ומול קשתות שוות מונחים קווים ישרים שווים; לכן חמשת הקווים AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA שווים זה לזה. לפיכך המחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם שווה־זוויות. מאחר שהקשת AB שווה לקשת ΔE , תתווסף לשתיהן הקשת המשותפת $B\Gamma\Delta$; לפיכך הקשת השלמה $AB\Gamma\Delta$ שווה לקשת השלמה $E\Delta\Gamma B$. ועל הקשת $AB\Gamma\Delta$ נשענת הזווית $AE\Delta$, ועל הקשת $E\Delta\Gamma B$ נשענת הזווית BAE ; לכן הזווית BAE שווה לזווית $AE\Delta$. מאותם טעמים גם כל אחת מן הזוויות $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ שווה לכל אחת מן

BAE, AED. לפיכך המחומש ABΓΔE שווה־זוויות. והוכח שהוא גם שווה־צלעות.

לפיכך בתוך המעגל הנתון נחסם מחומש שווה־צלעות ושווה־זוויות; כנדרש לעשות.

לחסום סביב מעגל נתון מחומש שווה־צלעות ושווה־זוויות.

יהי ABΓΔE המעגל הנתון. נדרש לחסום סביב המעגל ABΓΔE מחומש שווה־צלעות ושווה־זוויות.

ייחשבו A, B, Γ, Δ, E לנקודות קודקודיו של המחומש החסום, כך שהקשתות AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA שוות. דרך A, B, Γ, Δ, E יועברו המשיקים HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH למעגל; יימצא מרכז המעגל ABΓΔE, ויהי Z; ויחברו ZB, ZK, ZΓ, ZΔ.

מאחר שהקו הישר KΛ משיק למעגל ABΓΔE בנקודה Γ, ומן המרכז Z חובר ZΓ אל נקודת המגע Γ, ZΓ מאונך ל־KΛ; לפיכך כל אחת מן הזוויות שב־Γ ישרה. מאותם טעמים גם הזוויות שבנקודות B, Δ ישרות. ומאחר שהזווית ZΓK ישרה, הריבוע שעל ZK שווה לריבועים שעל ZΓ, ΓK. מאותם טעמים הריבוע שעל ZK שווה גם לריבועים שעל ZB, BK. לפיכך הריבועים שעל ZΓ, ZΓK שווים לריבועים שעל ZB, BK. ומאלה הריבוע שעל ZΓ שווה לריבוע שעל ZB; לכן הריבוע הנותר שעל ΓK שווה לריבוע הנותר שעל BK, ומכאן BK שווה ל־ΓK. ומאחר ש־ZB שווה ל־ZK, משותף, והבסיס BK שווה לבסיס ΓK, הזווית BZK שווה לזווית KZΓ, והזווית BKZ שווה לזווית ZKΓ. לפיכך BZΓ היא כפליים מן KZΓ, ו־BKΓ כפליים מן ZKΓ. מאותם טעמים

$\Gamma Z \Delta$ היא כפליים מן $\Gamma Z \Lambda$, ו־ $\Delta \Lambda \Gamma$ כפליים מן $Z \Lambda \Gamma$. ומאחר שהקשת $B \Gamma$ שווה לקשת $\Gamma \Delta$, גם הזווית $B Z \Gamma$ שווה לזווית $\Gamma Z \Delta$. $B Z \Gamma$ היא כפליים מן $K Z \Gamma$ ו־ $\Delta Z \Gamma$ כפליים מן $\Lambda Z \Gamma$; לכן $K Z \Gamma$ שווה ל־ $\Lambda Z \Gamma$. וגם הזווית $Z \Gamma K$ שווה ל־ $Z \Gamma \Lambda$. לפיכך שני המשולשים $Z \Lambda \Gamma$, $Z K \Gamma$ כוללים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות, וצלע אחת השווה לצלע אחת — הצלע המשותפת $Z \Gamma$. לכן גם הצלעות הנותרות והזווית הנותרת שוות בהתאמה; לפיכך $K \Gamma$ שווה ל־ $\Gamma \Lambda$, והזווית $Z K \Gamma$ שווה לזווית $Z \Lambda \Gamma$. ומאחר ש־ $K \Gamma$ שווה ל־ $K \Lambda$, $\Gamma \Lambda$, הוא כפליים מן $K \Gamma$. מאותם טעמים יוכח שגם ΘK הוא כפליים מן $B K$. ו־ $B K$ שווה ל־ $K \Gamma$; לכן גם ΘK שווה ל־ $K \Lambda$. בדומה יוכח שכל אחת מן ΘH , $H M$, $M \Lambda$ שווה לכל אחת מן ΘK , $K \Lambda$. לפיכך המחומש $H \Theta K \Lambda M$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם שווה־זוויות. מאחר שהזווית $Z K \Gamma$ שווה לזווית $Z \Lambda \Gamma$, והוכח שהזווית $\Theta K \Lambda$ היא כפליים מן $Z K \Gamma$ ואילו $K \Lambda M$ כפליים מן $Z \Lambda \Gamma$, גם $\Theta K \Lambda$ שווה ל־ $K \Lambda M$. בדומה יוכח שכל אחת מן הזוויות $K \Theta H$, $\Theta H M$, $H M \Lambda$ שווה לכל אחת מן $\Theta K \Lambda$, $K \Lambda M$. לכן חמש הזוויות $H \Theta K$, $\Theta K \Lambda$, $K \Lambda M$, $M H \Theta$, $\Lambda M H$ שוות זו לזו. לפיכך המחומש $H \Theta K \Lambda M$ שווה־זוויות. והוכח שהוא גם שווה־צלעות, והוא חוסם את המעגל $A B \Gamma \Delta E$.

כנדרש לעשות.

לחסום מעגל בתוך מחומש נתון שהוא שווה־צלעות ושווה־זוויות.

יהי $A B \Gamma \Delta E$ המחומש הנתון, שווה־הצלעות ושווה־הזוויות. נדרש אפוא לחסום מעגל בתוך המחומש $A B \Gamma \Delta E$.

ייחצו כל אחת מן הזוויות $\Gamma \Delta E$, $B \Gamma \Delta$ על ידי הקווים ΓZ , ΔZ ; ומן הנקודה Z , שבה נפגשים הקווים ΓZ , ΔZ , יחוברו הקווים $Z B$, $Z A$, $Z E$. ומאחר ש־ $B \Gamma$

שווה ל- $\Gamma\Delta$ ו- ΓZ משותף, שתי הצלעות ΓZ , $\Gamma\Delta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΓZ , $\Delta\Gamma$; והזווית ΓZ שווה לזווית $\Delta\Gamma Z$. לפיכך הבסיס BZ שווה לבסיס ΔZ , והמשולש ΓZ שווה למשולש $\Delta\Gamma Z$; והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שמולן מונחות הצלעות השוות. לכן הזווית ΓBZ שווה לזווית $\Gamma\Delta Z$. ומאחר שהזווית $\Gamma\Delta E$ היא כפליים מן $\Gamma\Delta Z$, ו- $\Gamma\Delta E$ שווה ל- $AB\Gamma$ ואילו $\Gamma\Delta Z$ שווה ל- ΓBZ , גם הזווית $\Gamma B\Delta$ היא כפליים מן ΓBZ . לפיכך הזווית ABZ שווה לזווית $ZB\Gamma$; ולכן הזווית $AB\Gamma$ נחצתה על ידי הקו הישר BZ . בדומה יוכח שגם כל אחת מן הזוויות BAE , $AE\Delta$ נחצית על ידי הקווים ZA , ZE . מן הנקודה Z יורדו האנכים ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM אל הקווים הישרים EA , ΔE , $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, AB . ומאחר שהזווית $\Theta\Gamma Z$ שווה לזווית $K\Gamma Z$, וגם הזווית הישרה $Z\Theta\Gamma$ שווה לזווית הישרה $ZK\Gamma$, שני המשולשים $Z\Theta\Gamma$, $ZK\Gamma$ כוללים שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות, וצלע אחת השווה לצלע אחת — הצלע המשותפת $Z\Gamma$, שמולה אחת הזוויות השוות. לכן גם הצלעות הנותרות שוות בהתאמה; לפיכך האנך $Z\Theta$ שווה לאנך ZK . בדומה יוכח שכל אחד מן ZH , ZM , $Z\Lambda$ שווה לכל אחד מן $Z\Theta$, ZK . לכן חמשת הקווים ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM שווים זה לזה. לפיכך המעגל שיתואר במרכז Z וברדיוס אחד מן ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM יעבור גם דרך שאר הנקודות וישיק לקווים EA , ΔE , $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, AB , מפני שהזוויות שבנקודות H , Θ , K , Λ , M ישרות. שאילו לא היה משיק להם אלא חותך אותם, הקו המועבר בזווית ישרה לקוטר של המעגל מקצהו היה נופל בתוך המעגל, והדבר הוכח כאבסורד. לכן המעגל המתואר במרכז Z וברדיוס אחד מן ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM אינו חותך את הקווים EA , ΔE , $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, AB ; הוא ישיק להם. יתואר כמו המעגל $H\Theta KAM$.

לפיכך מעגל נחסם בתוך המחומש הנתון, שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות; כנדרש לעשות.

לחסום מעגל סביב מחומש נתון שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות.

יהי $AB\Gamma\Delta E$ המחומש הנתון, שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות. נדרש אפוא לחסום מעגל סביב המחומש $AB\Gamma\Delta E$.

ייחצו כל אחת מן הזוויות $\Gamma\Delta E$, $B\Gamma\Delta$ על ידי ΔZ , ΓZ ; ומן הנקודה Z , שבה נפגשים הקווים, יחוברו אל הנקודות B , A , E הקווים ZB , ZA , ZE . בדומה למשפט הקודם יוכח שכל אחת מן הזוויות $\Gamma\Delta E$, BAE , AED נחצית על ידי הקווים ZB , ZA , ZE . ומאחר שהזווית $B\Gamma\Delta$ שווה לזווית $\Gamma\Delta E$, והזווית $Z\Gamma\Delta$ היא מחצית $B\Gamma\Delta$ ואילו $\Gamma\Delta Z$ מחצית $\Gamma\Delta E$, גם זווית $Z\Gamma\Delta$ שווה לזווית $Z\Delta\Gamma$; ולכן הצלע $Z\Gamma$ שווה לצלע $Z\Delta$. בדומה יוכח שכל אחד מן ZB , ZA , ZE שווה לכל אחד מן $Z\Gamma$, $Z\Delta$. לפיכך חמשת הקווים ZA , ZB , $Z\Gamma$, $Z\Delta$, ZE שווים זה לזה. לכן המעגל שיתואר במרכז Z וברדיוס אחד מן ZA , ZB , $Z\Gamma$, $Z\Delta$, ZE יעבור גם דרך שאר הנקודות ויהיה חוסם. ייחסם ויהי המעגל $AB\Gamma\Delta E$.

לפיכך מעגל נחסם סביב המחומש הנתון, שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות; כנדרש לעשות.

לחסום בתוך מעגל נתון משושה שווה-צלעות ושווה-זוויות.

יהי $AB\Gamma\Delta EZ$ המעגל הנתון. נדרש אפוא לחסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta EZ$ משושה שווה-צלעות ושווה-זוויות.

יועבר קוטר המעגל $AB\Gamma\Delta EZ$, ויהי $A\Delta$; ימצא מרכז המעגל, ויהי H ; ובמרכז Δ וברדיוס ΔH יתואר המעגל $EH\Gamma\Theta$. יחוברו EH , ΓH ויארכו אל הנקודות B , Z ; ויחוברו AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EZ , ZA ויהיו $AB\Gamma\Delta EZ$ שווה־צלעות ושווה־זוויות.

מאחר שהנקודה H היא מרכז המעגל $EH\Gamma\Delta EZ$ שווה ל־ $H\Delta$. ושוב, מאחר שהנקודה Δ היא מרכז המעגל $EH\Gamma\Theta$ שווה ל־ ΔH . אך הוכח ש־ HE שווה ל־ HA ; לכן גם HE שווה ל־ EA , ולפיכך המשולש EHA שווה־צלעות. לכן שלוש זוויותיו EHA , HAE , ΔEH שוות זו לזו; שכן במשולשים שווי־שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. ושלש זוויות המשולש שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לפיכך הזווית EHA היא שליש משתי זוויות ישרות. בדומה יוכח שגם $\Delta H\Gamma$ היא שליש משתי זוויות ישרות. ומאחר שהקו הישר ΓH עומד על EB ויוצר את הזוויות הסמוכות $EH\Gamma$, ΓHB השוות יחד לשתי זוויות ישרות, גם הזווית הנותרת ΓHB היא שליש משתי זוויות ישרות. לפיכך הזוויות EHA , $\Delta H\Gamma$, ΓHB שוות זו לזו; ולכן גם הזוויות הקודקודיות להן BHA , AHZ , ZHE שוות. מכאן שש הזוויות EHA , $\Delta H\Gamma$, ΓHB , BHA , AHZ , ZHE שוות זו לזו. זוויות שוות נשענות על קשתות שוות; לכן שש הקשתות AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EZ , ZA שוות זו לזו. ומול קשתות שוות מונחים קווים ישרים שווים; לפיכך שש הצלעות שוות זו לזו, והמשולש $AB\Gamma\Delta EZ$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם שווה־זוויות. מאחר שהקשת ZA שווה לקשת EA , תתווסף לשתייהן הקשת המשותפת $AB\Gamma\Delta$; לפיכך הקשת השלמה $ZAB\Gamma\Delta$ שווה לקשת השלמה $E\Delta\Gamma BA$. ועל הקשת $ZAB\Gamma\Delta$ נשענת הזווית ΔEZ , ועל הקשת $E\Delta\Gamma BA$ נשענת הזווית AZE ; לכן הזווית AZE שווה לזווית ΔEZ . בדומה יוכח ששאר זוויות המשולש $AB\Gamma\Delta EZ$ שוות, כל אחת, לכל אחת מן הזוויות AZE , ΔEZ ;

לפיכך המשושה $AB\Gamma\Delta E Z$ שווה־זוויות. והוכח שהוא גם שווה־צלעות, והוא חסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta E Z$.

לפיכך בתוך המעגל הנתון נחסם משושה שווה־צלעות ושווה־זוויות; כנדרש לעשות.

מסקנה

מכאן ברור שצלע המשושה שווה לקו מן המרכז של המעגל.

ובדומה למה שנאמר על המחומש, אם נעביר דרך נקודות החלוקה שעל המעגל קווים המשיקים למעגל, ייחסם סביב המעגל משושה שווה־צלעות ושווה־זוויות, בהתאם למה שנאמר על המחומש. ועוד, באמצעות בניות הדומות לאלה שנאמרו על המחומש, נחסם מעגל בתוך משושה נתון וגם סביבו; כנדרש לעשות.

לחסום בתוך מעגל נתון מצולע בן חמש־עשרה צלעות, שווה־צלעות ושווה־זוויות.

יהי $AB\Gamma\Delta$ המעגל הנתון. נדרש אפוא לחסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$ מצולע בן חמש־עשרה צלעות, שווה־צלעות ושווה־זוויות.

בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$ ייחסמו $A\Gamma$, צלעו של משולש שווה־צלעות החסום בו, ו־ AB , צלעו של מחומש שווה־צלעות. אם המעגל $AB\Gamma\Delta$ נחלק לחמישה־עשר חלקים שווים, הקשת $AB\Gamma$, שהיא שליש המעגל, תכלול חמישה מהם, ואילו הקשת AB , שהיא חמישית המעגל, תכלול שלושה; לפיכך הקשת

הנותרת $B\Gamma$ תכלול שניים מן החלקים השווים. תיחצה $B\Gamma$ בנקודה E ; לכן כל אחת מן הקשתות $BE, E\Gamma$ היא חלק אחד מחמישה-עשר של המעגל $AB\Gamma\Delta$. לפיכך, אם נחבר $BE, E\Gamma$ ונקבע ברצף במעגל $AB\Gamma\Delta$ מיתרים השווים להם, יהיה חסום בו מצולע בן חמש-עשרה צלעות, שווה-צלעות ושווה-זוויות; כנדרש לעשות.

ובדומה למה שנאמר על המחומש, אם נעביר דרך נקודות החלוקה שעל המעגל קווים המשיקים למעגל, ייחסם סביב המעגל מצולע בן חמש-עשרה צלעות, שווה-צלעות ושווה-זוויות. ועוד, באמצעות הוכחות הדומות לאלה של המחומש נחסום מעגל בתוך מצולע נתון בן חמש-עשרה צלעות וגם סביבו; כנדרש לעשות.

ספר ה

גודל קטן הוא חלק מגודל גדול כאשר הוא מודד את הגדול.

והגודל הגדול הוא כפולה של הקטן כאשר הוא נמדד על ידי הקטן.

יחס הוא זיקה מסוימת מבחינת הכמות בין שני גדלים בני אותו סוג.

נאמר שלגדלים יש יחס זה לזה כאשר כל אחד מהם, בהכפלתו, יכול לעלות על האחר.

נאמר שגדלים נמצאים באותו יחס, הראשון אל השני והשלישי אל הרביעי, כאשר כפולות כלשהן באותו מספר פעמים של הראשון ושל השלישי, לעומת כפולות כלשהן באותו מספר פעמים של השני ושל הרביעי, עולות עליהן יחד, או שוות להן יחד, או נופלות מהן יחד, כשהן נלקחות בהתאמה.

גדלים שיש להם אותו יחס ייקראו פרופורציונליים.

כאשר, מבין הכפולות באותו מספר פעמים, כפולת הראשון עולה על כפולת השני ואילו כפולת השלישי אינה עולה על כפולת הרביעי, נאמר אז שלראשון אל השני יש יחס גדול יותר מאשר לשלישי אל הרביעי.

פרופורציה כוללת לכל הפחות שלושה איברים.

כאשר שלושה גדלים עומדים בפרופורציה, נאמר שלראשון אל השלישי יש יחס כפול מן היחס שלו אל השני.

כאשר ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה, נאמר שלראשון אל הרביעי יש יחס משולש מן היחס שלו אל השני; וכך תמיד בהמשך, כפי שתימשך הפרופורציה.

גדלים מתאימים הם הקודמים לקודמים והעוקבים לעוקבים.

יחס בחילוף הוא לקיחת הקודם אל הקודם והעוקב אל העוקב.

יחס בהיפוך הוא לקיחת העוקב כקודם אל הקודם כעוקב.

יחס בצירוף הוא לקיחת הקודם יחד עם העוקב, כאילו היו אחד, אל העוקב עצמו.

יחס בהפרדה הוא לקיחת העודף שבו הקודם עולה על העוקב אל העוקב עצמו.

יחס בהמרה הוא לקיחת הקודם אל העודף שבו הקודם עולה על העוקב.

יחס בשוויון מתקיים כאשר יש כמה גדלים וכמספרם גדלים אחרים, הנלקחים זוג־זוג ונמצאים באותו יחס, וכאשר היחס בין הראשון לאחרון שבקבוצת הגדלים הראשונה הוא כיחס בין הראשון לאחרון שבקבוצה השנייה. או בניסוח אחר: לקיחת הקצוות תוך השמטת האמצעיים.

פרופורציה משובשת מתקיימת כאשר יש שלושה גדלים וכמספרם גדלים אחרים, וכאשר היחס בין קודם לעוקב שבקבוצה הראשונה הוא כיחס בין קודם לעוקב שבקבוצה השנייה, ואילו היחס בין העוקב לגודל אחר בקבוצה הראשונה הוא כיחס בין גודל אחר לקודם בקבוצה השנייה.

אם מספר כלשהו של גדלים הוא, כל אחד בהתאמה, כפולה באותו מספר פעמים של מספר שווה של גדלים, הרי כפי שאחד הגדלים הוא כפולה של אחד, כך יהיו כל הראשונים יחד כפולה של כל האחרונים יחד.

יהיו מספר כלשהו של גדלים $AB, \Gamma\Delta$, שכל אחד מהם הוא בהתאמה כפולה באותו מספר פעמים של מספר שווה של גדלים E, Z . אומר אני שכפי ש- AB הוא כפולה של E , כך יהיו $AB, \Gamma\Delta$ יחד כפולה של E, Z יחד.

מאחר ש- AB הוא כפולה של E אותו מספר פעמים ש- $\Gamma\Delta$ הוא כפולה של Z , מספר הגדלים השווים ל- E הכלולים ב- AB שווה למספר הגדלים השווים ל- Z הכלולים ב- $\Gamma\Delta$. ייחלק AB לגדלים AH, HB השווים ל- E , ו- $\Gamma\Delta$ לגדלים $\Gamma\Theta, \Theta\Delta$ השווים ל- Z ; לפיכך מספרם של AH, HB שווה למספרם של $\Gamma\Theta, \Theta\Delta$. ומאחר ש- AH שווה ל- E ו- $\Gamma\Theta$ שווה ל- Z , הרי AH שווה ל- E , וגם $\Gamma\Theta$ AH , יחד שווים ל- E, Z יחד. מאותם טעמים HB שווה ל- E , וגם $\Theta\Delta$ HB , יחד שווים ל- E, Z יחד. לפיכך, כמספר הגדלים השווים ל- E הכלולים ב- AB , כך מספר צמדי הגדלים בתוך $AB, \Gamma\Delta$ השווים יחד ל- E, Z . לכן כפי ש- AB הוא כפולה של E , כך $AB, \Gamma\Delta$ יחד הם כפולה של E, Z יחד.

לפיכך, אם מספר כלשהו של גדלים הוא, כל אחד בהתאמה, כפולה באותו מספר פעמים של מספר שווה של גדלים, הרי כפי שאחד הגדלים הוא כפולה של אחד, כך יהיו כל הראשונים יחד כפולה של כל האחרונים יחד; מש"ל.

אם הראשון הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי הוא כפולה של הרביעי, וגם החמישי הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשישי הוא כפולה של הרביעי, הרי הראשון והחמישי יחד יהיו כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי והשישי יחד הם כפולה של הרביעי.

יהי הראשון AB כפולה של השני Γ אותו מספר פעמים שהשלישי ΔE הוא כפולה של הרביעי Z ; ויהי גם החמישי BH כפולה של השני Γ אותו מספר פעמים שהשישי $E\Theta$ הוא כפולה של הרביעי Z . אומר אני שהראשון והחמישי יחד, AH , יהיו כפולה של השני Γ אותו מספר פעמים שהשלישי והשישי יחד, $\Delta\Theta$, הם כפולה של הרביעי Z .

מאחר ש- AB הוא כפולה של Γ אותו מספר פעמים ש- ΔE הוא כפולה של Z , מספר הגדלים השווים ל- Γ הכלולים ב- AB שווה למספר הגדלים השווים ל- Z הכלולים ב- ΔE . מאותם טעמים, מספר הגדלים השווים ל- Γ הכלולים ב- BH שווה למספר הגדלים השווים ל- Z הכלולים ב- $E\Theta$. לפיכך מספר הגדלים השווים ל- Γ הכלולים ב- AH השלם שווה למספר הגדלים השווים ל- Z הכלולים ב- $\Delta\Theta$ השלם. לכן כפי ש- AH הוא כפולה של Γ , כך $\Delta\Theta$ הוא כפולה של Z . לפיכך הראשון והחמישי יחד, AH , הם כפולה של השני Γ אותו מספר פעמים שהשלישי והשישי יחד, $\Delta\Theta$, הם כפולה של הרביעי Z .

לפיכך, אם הראשון הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי הוא כפולה של הרביעי, וגם החמישי הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשישי הוא כפולה של הרביעי, הרי הראשון והחמישי יחד יהיו כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי והשישי יחד הם כפולה של הרביעי; מש"ל.

אם הראשון הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי הוא כפולה של הרביעי, ונלקחות כפולות באותו מספר פעמים של הראשון ושל השלישי, הרי בשוויון יהיו הגדלים שנלקחו כפולות באותו מספר פעמים, האחד של השני והאחר של הרביעי.

יהי הראשון A כפולה של השני B אותו מספר פעמים שהשלישי Γ הוא כפולה של הרביעי Δ ; ויילקחו EZ , $H\Theta$ כפולות באותו מספר פעמים של Γ , A. אומר אני ש- EZ הוא כפולה של B אותו מספר פעמים ש- $H\Theta$ הוא כפולה של Δ .

מאחר ש- EZ הוא כפולה של A אותו מספר פעמים ש- $H\Theta$ הוא כפולה של Γ , מספר הגדלים השווים ל-A הכלולים ב- EZ שווה למספר הגדלים השווים ל- Γ הכלולים ב- $H\Theta$. יחלק EZ לגדלים EK , KZ השווים ל-A, ו- $H\Theta$ לגדלים HA , $\Lambda\Theta$ השווים ל- Γ ; לפיכך מספרם של EK , KZ שווה למספרם של HA , $\Lambda\Theta$ ומאחר ש-A הוא כפולה של B אותו מספר פעמים ש- Γ הוא כפולה של Δ , ו- EK שווה ל-A ואילו HA שווה ל- Γ , הרי EK הוא כפולה של B אותו מספר פעמים ש- HA הוא כפולה של Δ . מאותם טעמים KZ הוא כפולה של B אותו מספר פעמים ש- $\Lambda\Theta$ הוא כפולה של Δ . לפיכך, מאחר שהראשון EK הוא כפולה של השני B אותו מספר פעמים שהשלישי HA הוא כפולה של הרביעי Δ , וגם החמישי KZ הוא כפולה של השני B אותו מספר פעמים שהשישי $\Lambda\Theta$ הוא כפולה של הרביעי Δ , גם הראשון והחמישי יחד, EZ , הם כפולה של השני B אותו מספר פעמים שהשלישי והשישי יחד, $H\Theta$, הם כפולה של הרביעי Δ .

לפיכך, אם הראשון הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי הוא כפולה של הרביעי, ונלקחות כפולות באותו מספר פעמים של הראשון ושל השלישי, הרי בשוויון יהיו הגדלים שנלקחו כפולות באותו מספר פעמים, האחד של השני והאחר של הרביעי; מש"ל.

אם לראשון אל השני אותו יחס כמו לשלישי אל הרביעי, אזי גם לכפולות באותו מספר פעמים של הראשון ושל השלישי אל כפולות באותו מספר

פעמים של השני ושל הרביעי יהיה אותו יחס, בכל הכפלה שהיא, כשהן נלקחות בהתאמה.

יהי לראשון A אל השני B אותו יחס כמו לשלישי Γ אל הרביעי Δ ; ויילקחו E , Z כפולות באותו מספר פעמים של A , Γ , וכן Θ , H כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Δ , B . אומר אני שכפי ש־ E אל H , כך Z אל Θ .

יילקחו Λ , K כפולות באותו מספר פעמים של E , Z , וכן M , N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Θ , H .

מאחר ש־ E הוא כפולה של A אותו מספר פעמים ש־ Z הוא כפולה של Γ , ונלקחו Λ , K כפולות באותו מספר פעמים של E , Z , הרי K הוא כפולה של A אותו מספר פעמים ש־ Λ הוא כפולה של Γ . מאותם טעמים M הוא כפולה של B אותו מספר פעמים ש־ N הוא כפולה של Δ . ומאחר שכפי ש־ A אל B כך Γ אל Δ , ונלקחו Λ , K כפולות באותו מספר פעמים של A , Γ , וכן M , N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Δ , B , אם K עולה על M גם Λ עולה על N ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו־ K , Λ הם כפולות באותו מספר פעמים של E , Z , ואילו M , N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Θ , H ; לפיכך כפי ש־ E אל H , כך Z אל Θ .

לפיכך, אם לראשון אל השני אותו יחס כמו לשלישי אל הרביעי, אזי גם לכפולות באותו מספר פעמים של הראשון ושל השלישי אל כפולות באותו מספר פעמים של השני ושל הרביעי יהיה אותו יחס, בכל הכפלה שהיא, כשהן נלקחות בהתאמה; מש״ל.

אם גודל הוא כפולה של גודל אחר אותו מספר פעמים שגודל שנחסר הוא כפולה של גודל שנחסר, גם השארית תהיה כפולה של השארית אותו מספר פעמים שהשלם הוא כפולה של השלם.

יהי הגודל AB כפולה של הגודל ΓA אותו מספר פעמים שהגודל שנחסר AE הוא כפולה של הגודל שנחסר ΓZ . אומר אני שגם השארית EB תהיה כפולה של השארית $Z\Delta$ אותו מספר פעמים שהשלם AB הוא כפולה של השלם ΓA .

כפי ש- AE הוא כפולה של ΓZ , כך ייעשה EB כפולה של ΓH .

ומאחר ש- AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- EB הוא כפולה של $H\Gamma$, הרי AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- AB הוא כפולה של HZ . אך הונח ש- AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- AB הוא כפולה של ΓA . לפיכך AB הוא כפולה של כל אחד מן ΓA , HZ אותו מספר פעמים; ולכן HZ שווה ל- ΓA . יוחסר משניהם ΓZ ; לפיכך השארית $H\Gamma$ שווה לשארית $Z\Delta$. ומאחר ש- AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- EB הוא כפולה של $H\Gamma$, ו- $H\Gamma$ שווה ל- ΔZ , הרי AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- EB הוא כפולה של $Z\Delta$. אך הונח גם ש- AE הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- AB הוא כפולה של ΓA ; לפיכך EB הוא כפולה של $Z\Delta$ אותו מספר פעמים ש- AB הוא כפולה של ΓA . לכן השארית EB תהיה כפולה של השארית $Z\Delta$ אותו מספר פעמים שהשלם AB הוא כפולה של השלם ΓA .

לפיכך, אם גודל הוא כפולה של גודל אחר אותו מספר פעמים שגודל שנחסר הוא כפולה של גודל שנחסר, גם השארית תהיה כפולה של השארית אותו מספר פעמים שהשלם הוא כפולה של השלם; מש"ל.

אם שני גדלים הם כפולות באותו מספר פעמים של שני גדלים אחרים, וגם גדלים שנחסרו מהם הם כפולות באותו מספר פעמים של אותם הגדלים, השאריות שוות לאותם גדלים או כפולות שלהם באותו מספר פעמים.

יהיו שני הגדלים $AB, \Gamma\Delta$ כפולות באותו מספר פעמים של שני הגדלים E, Z ; ויהיו הגדלים שנחסרו $AH, \Gamma\Theta$ כפולות באותו מספר פעמים של אותם הגדלים E, Z . אומר אני שגם השאריות $HB, \Theta\Delta$ שוות ל- E, Z או כפולות שלהם באותו מספר פעמים.

תחילה יהי HB שווה ל- E . אומר אני שגם $\Theta\Delta$ שווה ל- Z .

יונח ΓK שווה ל- Z . מאחר ש- AH הוא כפולה של E אותו מספר פעמים ש- $\Gamma\Theta$ הוא כפולה של Z , ו- HB שווה ל- E ואילו $K\Gamma$ שווה ל- Z , הרי AB הוא כפולה של E אותו מספר פעמים ש- $K\Theta$ הוא כפולה של Z . אך הונח ש- AB הוא כפולה של E אותו מספר פעמים ש- $\Gamma\Delta$ הוא כפולה של Z ; לפיכך $K\Theta$ ו- $\Gamma\Delta$ הם כפולות של Z באותו מספר פעמים. ומאחר שכל אחד מן $K\Theta, \Gamma\Delta$ הוא כפולה של Z באותו מספר פעמים, $K\Theta$ שווה ל- $\Gamma\Delta$. יוחסר משניהם $\Gamma\Theta$; לפיכך השארית $K\Gamma$ שווה לשארית $\Theta\Delta$. אך Z שווה ל- $K\Gamma$; לכן גם $\Theta\Delta$ שווה ל- Z . מכאן שאם HB שווה ל- E , גם $\Theta\Delta$ שווה ל- Z .

ובדומה נוכיח שאם HB הוא כפולה של E , גם $\Theta\Delta$ יהיה כפולה של Z אותו מספר פעמים.

לפיכך, אם שני גדלים הם כפולות באותו מספר פעמים של שני גדלים אחרים, וגם גדלים שנחסרו מהם הם כפולות באותו מספר פעמים של אותם הגדלים, השאריות שוות לאותם גדלים או כפולות שלהם באותו מספר פעמים; מש"ל.

לגדלים שווים אל אותו גודל יש אותו יחס; ולאותו גודל אל גדלים שווים יש אותו יחס.

יהיו A, B גדלים שווים, ויהי Γ גודל אחר כלשהו. אומר אני שלכל אחד מן A, B אל Γ יש אותו יחס, וגם ל־ Γ אל כל אחד מן A, B .

יילקחו E, Δ כפולות באותו מספר פעמים של A, B , ו־ Z כפולה אחרת כלשהי של Γ .

מאחר ש־ Δ הוא כפולה של A אותו מספר פעמים ש־ E הוא כפולה של B , ו־ A שווה ל־ B , גם Δ שווה ל־ E . ו־ Z הוא גודל אחר כלשהו. לכן אם Δ עולה על Z , גם E עולה על Z ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו־ E, Δ הם כפולות באותו מספר פעמים של A, B , ואילו Z כפולה אחרת כלשהי של Γ . לפיכך כפי ש־ A אל Γ , כך B אל Γ .

אומר אני שגם ל־ Γ אל כל אחד מן A, B יש אותו יחס.

לאחר אותה בנייה, נוכיח בדומה ש־ Δ שווה ל־ E ; ויהי Z גודל אחר כלשהו. לכן אם Z עולה על Δ , הוא עולה גם על E ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו־ Z הוא כפולה של Γ , ואילו E, Δ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של A, B . לפיכך כפי ש־ Γ אל A , כך Γ אל B .

לפיכך, לגדלים שווים אל אותו גודל יש אותו יחס; ולאותו גודל אל גדלים שווים יש אותו יחס.

מסקנה

מכאן ברור שאם גדלים עומדים בפרופורציה, הם יעמדו בפרופורציה גם בהיפוך; מש"ל.

מבין גדלים בלתי־שווים, לגדול אל אותו גודל יש יחס גדול יותר מאשר לקטן; ולאותו גודל אל הקטן יש יחס גדול יותר מאשר אל הגדול.

יהיו Γ , AB גדלים בלתי־שווים, ויהי AB הגדול; ויהי Δ גודל אחר כלשהו. אומר אני של־ AB אל Δ יש יחס גדול יותר מאשר ל־ Γ אל Δ , ושל־ Δ אל Γ יש יחס גדול יותר מאשר ל־ Δ אל AB .

מאחר ש־ AB גדול מ־ Γ , יונח BE שווה ל־ Γ . הקטן מבין AE , EB , אם יוכל, יהיה בשלב כלשהו גדול מ־ Δ . תחילה יהי AE קטן מ־ EB ; יוכל AE , ותהי ZH כפולה שלו הגדולה מ־ Δ . וכפי ש־ ZH היא כפולה של AE , כך ייעשה $H\Theta$ כפולה של EB ו־ K כפולה של Γ . ומן Δ יילקחו Λ כפול, M משולש, ובהמשך בכל פעם כפולה אחת נוספת, עד שהכפולה הנלקחת של Δ תהיה לראשונה גדולה מ־ K . תילקח, ותהי N כפולה פי ארבעה של Δ ולראשונה גדולה מ־ K .

מאחר ש־ K קטן מ־ N לראשונה, K אינו קטן מ־ M . ומאחר ש־ ZH הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש־ $H\Theta$ הוא כפולה של EB , הרי ZH הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש־ $Z\Theta$ הוא כפולה של AB . אך ZH הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש־ K הוא כפולה של Γ ; לפיכך $Z\Theta$ הוא כפולה של AB אותו מספר פעמים ש־ K הוא כפולה של Γ . לכן K , $Z\Theta$ הם כפולות באותו מספר פעמים של Γ , AB . ושוב, מאחר ש־ $H\Theta$ הוא כפולה של EB אותו מספר פעמים ש־ K הוא כפולה של Γ , ו־ EB שווה ל־ Γ , גם $H\Theta$ שווה ל־ K . אך K אינו קטן מ־ M ; לכן גם $H\Theta$ אינו קטן מ־ M . ו־ ZH גדול מ־ Δ ; לפיכך $Z\Theta$ השלם גדול מ־ M , יחד. אך M , Δ יחד שווים ל־ N , שכן M הוא פי שלושה מ־ Δ , ולפיכך

Δ , M יחד הם פי ארבעה מ Δ , וגם N הוא פי ארבעה מ Δ . לכן $Z\Theta$ גדול מ N , ואילו K אינו עולה על N. K , $Z\Theta$ הם כפולות באותו מספר פעמים של AB, Γ , ואילו N כפולה אחרת כלשהי של Δ . לפיכך ל Δ יש יחס גדול יותר מאשר ל Γ אל Δ .

אומר אני שגם ל Δ אל Γ יש יחס גדול יותר מאשר ל Δ אל AB.

לאחר אותה בנייה, נוכיח בדומה ש N עולה על K ואילו N אינו עולה על $Z\Theta$. ו N הוא כפולה של Δ , ואילו K, $Z\Theta$ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Γ , AB. לפיכך ל Δ אל Γ יש יחס גדול יותר מאשר ל Δ אל AB.

עתה יהי AE גדול מ EB . הקטן, EB , אם יוכפל, יהיה בשלב כלשהו גדול מ Δ . יוכפל, ותהי $H\Theta$ כפולה של EB הגדולה מ Δ ; וכפי ש $H\Theta$ הוא כפולה של EB , כך ייעשה ZH כפולה של AE ו K כפולה של Γ . בדומה נוכיח ש K , $Z\Theta$ הם כפולות באותו מספר פעמים של Γ , AB. ובדומה תילקח N, כפולה של Δ שהיא לראשונה גדולה מ ZH ; ולכן שוב ZH אינו קטן מ M . אך $H\Theta$ גדול מ Δ ; לפיכך $Z\Theta$ השלם עולה על M, Δ יחד, כלומר על N. ואילו K אינו עולה על N, מפני ש ZH , שהוא גדול מ $H\Theta$, כלומר מ K , אינו עולה על N. ובהמשך באותו אופן כמו למעלה נשלים את ההוכחה.

לפיכך, מבין גדלים בלתי־שווים, לגדול אל אותו גודל יש יחס גדול יותר מאשר לקטן; ולאותו גודל אל הקטן יש יחס גדול יותר מאשר אל הגדול; מש"ל.

גדלים שיש להם אותו יחס אל אותו גודל שווים זה לזה; וגם גדלים שאליהם יש לאותו גודל אותו יחס שווים זה לזה.

יהי לכל אחד מן A, B אל Γ אותו יחס. אומר אני ש A שווה ל B .

שאם לא כן, לא היה לכל אחד מן A, B אל Γ אותו יחס. אך יש להם; לפיכך A שווה ל- B .

ושוב, יהי ל- Γ אל כל אחד מן A, B אותו יחס. אומר אני ש- A שווה ל- B .

שאם לא כן, לא היה ל- Γ אל כל אחד מן A, B אותו יחס. אך יש לו; לפיכך A שווה ל- B .

לפיכך, גדלים שיש להם אותו יחס אל אותו גודל שווים זה לזה; וגם גדלים שאליהם יש לאותו גודל אותו יחס שווים זה לזה; מש"ל.

מבין גדלים שיש להם יחס אל אותו גודל, זה שיש לו היחס הגדול יותר הוא הגדול יותר; והגודל שאליו יש לאותו גודל יחס גדול יותר הוא הקטן יותר.

יהי ל- A אל Γ יחס גדול יותר מאשר ל- B אל Γ . אומר אני ש- A גדול מ- B .

שאם לא כן, A שווה ל- B או קטן ממנו. A אינו שווה ל- B , שכן אז לכל אחד מן A, B אל Γ היה אותו יחס; אך אין להם. לכן A אינו שווה ל- B . וגם A אינו קטן מ- B , שכן אז ל- A אל Γ היה יחס קטן יותר מאשר ל- B אל Γ ; אך אין לו. לפיכך A אינו קטן מ- B , והוכח שגם אינו שווה לו; לכן A גדול מ- B .

ושוב, יהי ל- Γ אל B יחס גדול יותר מאשר ל- Γ אל A . אומר אני ש- B קטן מ- A .

שאם לא כן, B שווה ל- A או גדול ממנו. B אינו שווה ל- A , שכן אז ל- Γ אל כל אחד מן A, B היה אותו יחס; אך אין לו. לכן A אינו שווה ל- B . וגם B אינו גדול מ- A , שכן אז ל- Γ אל B היה יחס קטן יותר מאשר אל A ; אך אין לו. לפיכך B אינו גדול מ- A , והוכח שגם אינו שווה לו; לכן B קטן מ- A .

לפיכך, מבין גדלים שיש להם יחס אל אותו גודל, זה שיש לו היחס הגדול יותר הוא הגדול יותר; והגודל שאליו יש לאותו גודל יחס גדול יותר הוא הקטן יותר; מש"ל.

יחסים השווים לאותו יחס שווים גם זה לזה.

יהי כפי ש־A אל B, כך Γ אל Δ , וכפי ש־ Γ אל Δ , כך E אל Z. אומר אני שכפי ש־A אל B, כך E אל Z.

יילקחו H, Θ , K כפולות באותו מספר פעמים של A, Γ , E, ויילקחו Λ , M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Δ , Z.

ומאחר שכפי ש־A אל B, כך Γ אל Δ , ונלקחו H, Θ כפולות באותו מספר פעמים של A, Γ , ואילו Λ , M כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Δ , הרי אם H עולה על Λ , גם Θ עולה על M; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ושוב, מאחר שכפי ש־ Γ אל Δ , כך E אל Z, ונלקחו Θ , K כפולות באותו מספר פעמים של Γ , E, ואילו M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Δ , Z, הרי אם Θ עולה על M, גם K עולה על N; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. אך אם Θ עלה על M, גם H עלה על Λ ; אם היה שווה, גם האחר היה שווה; ואם היה קטן, גם האחר היה קטן. מכאן שאם H עולה על Λ , גם K עולה על N; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו־H, K הם כפולות באותו מספר פעמים של A, E, ואילו Λ , N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Z. לפיכך כפי ש־A אל B, כך E אל Z.

לפיכך, יחסים השווים לאותו יחס שווים גם זה לזה; מש"ל.

אם מספר כלשהו של גדלים עומדים בפרופורציה, כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך יהיו כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד.

יהיו מספר כלשהו של גדלים $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ עומדים בפרופורציה: כפי ש A^{-} אל B , כך Γ אל Δ וגם E אל Z . אומר אני שכפי ש A^{-} אל B , כך A, Γ, E יחד אל B, Δ, Z יחד.

יילקחו H, Θ, K כפולות באותו מספר פעמים של A, Γ, E , ויילקחו Λ, M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Δ, Z .

ומאחר שכפי ש A^{-} אל B , כך Γ אל Δ וגם E אל Z , ונלקחו H, Θ, K כפולות באותו מספר פעמים של A, Γ, E , ואילו Λ, M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Δ, Z , הרי אם H עולה על Λ , גם Θ עולה על M וגם K על N ; אם הוא שווה, גם האחרים שווים; ואם הוא קטן, גם האחרים קטנים. לפיכך אם H עולה על Λ , גם H, Θ, K יחד עולים על Λ, M, N יחד; אם הוא שווה, הסכומים שווים; ואם הוא קטן, הסכום קטן. H^{-} וכן H, Θ, K יחד הם כפולות באותו מספר פעמים של A ושל A, Γ, E יחד; שכן אם מספר כלשהו של גדלים הוא, כל אחד כנגד כל אחד, כפולה באותו מספר פעמים של מספר שווה של גדלים, הרי כפי שאחד הגדלים הוא כפולה של אחד מהם, כך יהיו גם כולם יחד כפולה של כולם יחד. מאותם טעמים גם Λ וכן Λ, M, N יחד הם כפולות באותו מספר פעמים של B ושל B, Δ, Z יחד. לפיכך כפי ש A^{-} אל B , כך A, Γ, E יחד אל B, Δ, Z יחד.

לפיכך, אם מספר כלשהו של גדלים עומדים בפרופורציה, כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; מש"ל.

אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, ולשלישי אל הרביעי יחס גדול יותר מאשר לחמישי אל השישי, גם לראשון אל השני יהיה יחס גדול יותר מאשר לחמישי אל השישי.

יהי לראשון A אל השני B אותו יחס אשר לשלישי Γ אל הרביעי Δ , ולשלישי Γ אל הרביעי Δ יהי יחס גדול יותר מאשר לחמישי E אל השישי Z. אומר אני שגם לראשון A אל השני B יהיה יחס גדול יותר מאשר לחמישי E אל השישי Z.

מאחר שיש כפולות כלשהן באותו מספר פעמים של E, Γ , וכפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Z, Δ , כך שהכפולה של Γ עולה על הכפולה של Δ ואילו הכפולה של E אינה עולה על הכפולה של Z, הן תילקחנה: יהיו H, Θ כפולות באותו מספר פעמים של E, Γ , Λ , K כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Z, Δ , כך ש־H עולה על K ואילו Θ אינו עולה על Λ . וכפי ש־H הוא כפולה של Γ , כך יהי M כפולה של A; וכפי ש־K הוא כפולה של Δ , כך יהי N כפולה של B.

ומאחר שכפי ש־A אל B, כך Γ אל Δ , ונלקחו M, H כפולות באותו מספר פעמים של Γ , A, ואילו N, K כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, Δ , הרי אם M עולה על N, גם H עולה על K; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. אך H עולה על K; לפיכך גם M עולה על N. ואילו Θ אינו עולה על Λ ; Θ , M הם כפולות באותו מספר פעמים של A, E, ואילו Λ , N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Z, B. לפיכך ל־A אל B יחס גדול יותר מאשר ל־E אל Z.

לפיכך, אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, ולשלישי אל הרביעי יחס גדול יותר מאשר לחמישי אל השישי, גם לראשון אל השני יהיה יחס גדול יותר מאשר לחמישי אל השישי; מש"ל.

אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, והראשון גדול מן השלישי, גם השני יהיה גדול מן הרביעי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן.

יהי לראשון A אל השני B אותו יחס אשר לשלישי Γ אל הרביעי Δ , ויהי A גדול מ- Γ . אומר אני שגם B גדול מ- Δ .

מאחר ש- A גדול מ- Γ , ו- B הוא גודל אחר כלשהו, ל- A אל B יש יחס גדול יותר מאשר ל- Γ אל B. אך כפי ש- A אל B, כך Γ אל Δ ; לפיכך גם ל- Γ אל Δ יחס גדול יותר מאשר ל- Γ אל B. והגודל שאליו יש לאותו גודל יחס גדול יותר הוא הקטן יותר; לכן Δ קטן מ- B , ומכאן ש- B גדול מ- Δ .

בדומה נוכיח שאם A שווה ל- Γ , גם B יהיה שווה ל- Δ , ואם A קטן מ- Γ , גם B יהיה קטן מ- Δ .

לפיכך, אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, והראשון גדול מן השלישי, גם השני יהיה גדול מן הרביעי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן; מש"ל.

לחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כאשר הם נלקחים בהתאמה.

יהיו AB ו- ΔE כפולות באותו מספר פעמים של Γ ושל Z. אומר אני שכפי ש- Γ אל Z, כך AB אל ΔE .

מאחר ש- AB הוא כפולה של Γ אותו מספר פעמים ש- ΔE הוא כפולה של Z , מספר הגדלים השווים ל- Γ המצויים ב- AB שווה למספר הגדלים השווים ל- Z המצויים ב- ΔE . יחולק AB ל- ΘB , $H\Theta$, AH השווים ל- Γ , ו- ΔE ל- KA , ΔK , ΔE השווים ל- Z . לכן מספרם של ΘB , $H\Theta$, AH שווה למספרם של KA , ΔK , ΔE . ומאחר ש- ΘB , $H\Theta$, AH שווים זה לזה, וגם ΔK , KA , ΔE שווים זה לזה, כפי ש- AH אל ΔK , כך $H\Theta$ אל KA וגם ΘB אל ΔE . לפיכך כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; לכן כפי ש- AH אל ΔK , כך AB אל ΔE . אך AH שווה ל- Γ ו- ΔK שווה ל- Z ; לפיכך כפי ש- Γ אל Z , כך AB אל ΔE .

לפיכך, לחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כאשר הם נלקחים בהתאמה; מש"ל.

אם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה, הם יעמדו בפרופורציה גם בחילוף.

יהיו ארבעת הגדלים A , B , Γ , Δ עומדים בפרופורציה, כפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ . אומר אני שהם יעמדו בפרופורציה גם בחילוף: כפי ש- A אל Γ , כך B אל Δ .

יילקחו E , Z כפולות באותו מספר פעמים של A , B , ו- Θ , H כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Γ , Δ .

ומאחר ש- E הוא כפולה של A אותו מספר פעמים ש- Z הוא כפולה של B , ולחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כפי ש- A אל B , כך E אל Z . אך כפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ ; לפיכך כפי ש- Γ אל Δ , כך E אל Z . ושוב, מאחר ש- Θ , H הם כפולות באותו מספר פעמים של Γ , Δ , כפי ש- Γ אל

Δ , כך H אל Θ . אך כפי ש- Γ אל Δ , כך E אל Z ; לפיכך כפי ש- E אל Z , כך H אל Θ . ואם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה והראשון גדול מן השלישי, גם השני יהיה גדול מן הרביעי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן. לכן אם E עולה על H , גם Z עולה על Θ ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו- E , Z הם כפולות באותו מספר פעמים של A , B , ואילו Θ , H כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Δ , Γ . לפיכך כפי ש- A אל Γ , כך B אל Δ .

לפיכך, אם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה, הם יעמדו בפרופורציה גם בחילוף; מש"ל.

אם גדלים עומדים בפרופורציה בצירוף, הם יעמדו בפרופורציה גם בהפרדה.

יהיו הגדלים AB , BE , ΓA , ΔZ עומדים בפרופורציה בצירוף, כפי ש- AB אל BE , כך ΓA אל ΔZ . אומר אני שהם יעמדו בפרופורציה גם בהפרדה: כפי ש- AE אל EB , כך ΓZ אל ΔZ .

יילקחו HO , ΘK , ΛM , MN כפולות באותו מספר פעמים של AE , EB , ΓZ , ויילקחו KE , NI כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של EB , ΔZ .

ומאחר ש- HO הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש- ΘK הוא כפולה של EB , הרי HO הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש- HK הוא כפולה של AB . אך HO הוא כפולה של AE אותו מספר פעמים ש- ΛM הוא כפולה של ΓZ ; לפיכך HK הוא כפולה של AB אותו מספר פעמים ש- ΛM הוא כפולה של ΓZ . ושוב, מאחר ש- ΛM הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- MN

הוא כפולה של $Z\Delta$, הרי ΛM הוא כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- ΛN הוא כפולה של $\Gamma\Delta$. אך ΛM היה כפולה של ΓZ אותו מספר פעמים ש- HK הוא כפולה של AB ; לפיכך HK הוא כפולה של AB אותו מספר פעמים ש- ΛN הוא כפולה של $\Gamma\Delta$. לכן ΛN , HK הם כפולות באותו מספר פעמים של AB , $\Gamma\Delta$. ושוב, מאחר ש- ΘK הוא כפולה של EB אותו מספר פעמים ש- MN הוא כפולה של $Z\Delta$, וגם KE הוא כפולה של EB אותו מספר פעמים ש- $N\Pi$ הוא כפולה של $Z\Delta$, הרי בצירוף ΘE הוא כפולה של EB אותו מספר פעמים ש- $M\Pi$ הוא כפולה של $Z\Delta$. ומאחר שכפי ש- AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל ΔZ , ונלקחו ΛN , HK כפולות באותו מספר פעמים של AB , $\Gamma\Delta$, ו- ΘE , $M\Pi$ כפולות באותו מספר פעמים של EB , $Z\Delta$, הרי אם HK עולה על ΘE , גם ΛN עולה על $M\Pi$; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. יהי אפוא HK עולה על ΘE ; וכאשר מחסרים מן שניהם את ΘK המשותף, גם $H\Theta$ עולה על KE . אך אם HK עולה על ΘE , גם ΛN עולה על $M\Pi$; וכאשר מחסרים מן שניהם את MN המשותף, גם ΛM עולה על $N\Pi$. מכאן שאם $H\Theta$ עולה על KE , גם ΛM עולה על $N\Pi$. בדומה נוכיח שאם $H\Theta$ שווה ל- KE , גם ΛM שווה ל- $N\Pi$, ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו- ΛM , $H\Theta$ הם כפולות באותו מספר פעמים של ΓZ , AE , ואילו KE , $N\Pi$ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של $Z\Delta$, EB . לפיכך כפי ש- AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$.

לפיכך, אם גדלים עומדים בפרופורציה בצירוף, הם יעמדו בפרופורציה גם בהפרדה; מש"ל.

אם גדלים עומדים בפרופורציה בהפרדה, הם יעמדו בפרופורציה גם בצירוף.

יהיו הגדלים AE , EB , ΓZ , $Z\Delta$ עומדים בפרופורציה בהפרדה, כפי ש- AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$. אומר אני שהם יעמדו בפרופורציה גם בצירוף: כפי ש- AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל $Z\Delta$.

שאם אין זה כפי ש- AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל $Z\Delta$, אז כפי ש- AB אל BE , כך יהיה $\Gamma\Delta$ אל גודל כלשהו הקטן מ- $Z\Delta$ או הגדול ממנו.

תחילה יהי כך אל ΔH הקטן ממנו. ומאחר שכפי ש- AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל ΔH , הגדלים עומדים בפרופורציה בצירוף; ולכן יעמדו בפרופורציה גם בהפרדה. לפיכך כפי ש- AE אל EB , כך ΓH אל $H\Delta$. אך הונח גם שכפי ש- AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$; ולכן כפי ש- ΓH אל $H\Delta$, כך ΓZ אל $Z\Delta$. אולם הראשון ΓH גדול מן השלישי ΓZ ; לכן גם השני $H\Delta$ גדול מן הרביעי $Z\Delta$. אך הוא גם קטן ממנו, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך אין זה כפי ש- AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל גודל הקטן מ- $Z\Delta$. בדומה נוכיח שגם אין זה כך אל גודל הגדול ממנו; לפיכך היחס הוא אל $Z\Delta$ עצמו.

לפיכך, אם גדלים עומדים בפרופורציה בהפרדה, הם יעמדו בפרופורציה גם בצירוף; מש"ל.

אם כפי שהשלם אל השלם כך החלק שהוסר אל החלק שהוסר, גם השארית אל השארית תהיה כפי שהשלם אל השלם.

יהי כפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma\Delta$, כך החלק שהוסר AE אל החלק שהוסר ΓZ . אומר אני שגם השארית EB אל השארית $Z\Delta$ תהיה כפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma\Delta$.

מאחר שכפי ש־ AB אל ΓA , כך AE אל ΓZ , הרי בחילוף כפי ש־ BA אל AE , כך $\Delta \Gamma$ אל ΓZ . ומאחר שהגדלים עומדים בפרופורציה בצירוף, הם יעמדו בפרופורציה גם בהפרדה: כפי ש־ BE אל EA , כך ΔZ אל ΓZ ; ובחילוף, כפי ש־ BE אל ΔZ , כך EA אל $Z\Gamma$. אך כפי ש־ AE אל ΓZ , כך הונח שהשלם AB אל השלם ΓA . לפיכך גם השארית EB אל השארית $Z\Delta$ תהיה כפי שהשלם AB אל השלם ΓA .

לפיכך, אם כפי שהשלם אל השלם כך החלק שהוסר אל החלק שהוסר, גם השארית אל השארית תהיה כפי שהשלם אל השלם.

מסקנה

מכאן ברור שאם גדלים עומדים בפרופורציה בצירוף, הם יעמדו בפרופורציה גם בהמרה; מש"ל.

אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים־שניים ובאותו יחס, ואם בשוויון הראשון גדול מן השלישי, גם הרביעי יהיה גדול מן השישי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן.

יהיו שלושת הגדלים A, B, Γ , ומספר שווה של גדלים אחרים Δ, E, Z , נלקחים שניים־שניים באותו יחס: כפי ש־ A אל B , כך Δ אל E , וכפי ש־ B אל Γ , כך E אל Z . ובשוויון יהי A גדול מ־ Γ . אומר אני שגם Δ יהיה גדול מ־ Z ; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן.

מאחר ש־ A גדול מ־ Γ ו־ B הוא גודל אחר כלשהו, ולגדול אל אותו גודל יחס גדול יותר מאשר לקטן, ל־ A אל B יחס גדול יותר מאשר ל־ Γ אל B . אך כפי ש־ A אל B , כך Δ אל E , וכפי ש־ Γ אל B , כך בהיפוך Z אל E . לפיכך ל־ Δ אל

E יחס גדול יותר מאשר ל־Z אל E. ומבין גדלים שיש להם יחס אל אותו גודל, בעל היחס הגדול יותר הוא הגדול יותר. לכן Δ גדול מ־Z. בדומה נוכיח שאם A שווה ל־ Γ , גם Δ שווה ל־Z, ואם A קטן מ־ Γ , גם Δ קטן מ־Z.

לפיכך, אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים־שניים ובאותו יחס, ואם בשוויון הראשון גדול מן השלישי, גם הרביעי יהיה גדול מן השלישי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן; מש״ל.

אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים־שניים ובאותו יחס, אך הפרופורציה שלהם משובשת, ואם בשוויון הראשון גדול מן השלישי, גם הרביעי יהיה גדול מן השלישי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן.

יהיו שלושת הגדלים Γ , B, A, ומספר שווה של גדלים אחרים Δ , E, Z, נלקחים שניים־שניים ובאותו יחס, ותהי הפרופורציה שלהם משובשת: כפי ש־A אל B, כך E אל Z, וכפי ש־B אל Γ , כך Δ אל E. ובשוויון יהי A גדול מ־ Γ . אומר אני שגם Δ יהיה גדול מ־Z; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן.

מאחר ש־A גדול מ־ Γ ו־B הוא גודל אחר כלשהו, ל־A אל B יחס גדול יותר מאשר ל־ Γ אל B. אך כפי ש־A אל B, כך E אל Z, וכפי ש־ Γ אל B, כך בהיפוך E אל Δ . לפיכך ל־E אל Z יחס גדול יותר מאשר ל־E אל Δ . והגודל שאליו יש לאותו גודל יחס גדול יותר הוא הקטן יותר; לכן Z קטן מ־ Δ , ומכאן ש־ Δ גדול מ־Z. בדומה נוכיח שאם A שווה ל־ Γ , גם Δ שווה ל־Z, ואם A קטן מ־ Γ , גם Δ קטן מ־Z.

לפיכך, אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים-שניים ובאותו יחס, אך הפרופורציה שלהם משובשת, ואם בשוויון הראשון גדול מן השלישי, גם הרביעי יהיה גדול מן השישי; ואם שווה, שווה; ואם קטן, קטן; מש"ל.

אם יש מספר כלשהו של גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים-שניים ובאותו יחס, גם בשוויון הם יהיו באותו יחס.

יהיו מספר כלשהו של גדלים A, B, Γ , ומספר שווה של גדלים אחרים Δ, E, Z , נלקחים שניים-שניים באותו יחס: כפי ש- A אל B , כך Δ אל E , וכפי ש- B אל Γ , כך E אל Z . אומר אני שגם בשוויון הם יהיו באותו יחס.

יילקחו H, Θ כפולות באותו מספר פעמים של A, Δ , ו- K, Λ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, E , ועוד יילקחו M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Γ, Z .

ומאחר שכפי ש- A אל B , כך Δ אל E , ונלקחו H, Θ כפולות באותו מספר פעמים של A, Δ , ואילו K, Λ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של B, E , כפי ש- H אל K , כך Θ אל Λ . מאותם טעמים גם כפי ש- K אל M , כך Λ אל N . ומאחר שיש שלושה גדלים H, K, M ומספר שווה של גדלים אחרים Θ, Λ, N , הנלקחים שניים-שניים ובאותו יחס, הרי בשוויון, אם H עולה על M , גם Θ עולה על N ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. H, Θ הם כפולות באותו מספר פעמים של A, Δ , ואילו M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Γ, Z . לפיכך כפי ש- A אל Γ , כך Δ אל Z .

לפיכך, אם יש מספר כלשהו של גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים-שניים באותו יחס, גם בשוויון הם יהיו באותו יחס; מש"ל.

אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים-שניים באותו יחס, אך הפרופורציה שלהם משובשת, גם בשוויון הם יהיו באותו יחס.

יהיו שלושת הגדלים A, B, Γ ומספר שווה של גדלים אחרים Δ, E, Z , נלקחים שניים-שניים באותו יחס, ותהי הפרופורציה שלהם משובשת: כפי ש- A אל B , כך E אל Z , וכפי ש- B אל Γ , כך Δ אל E . אומר אני שכפי ש- A אל Γ , כך Δ אל Z .

יילקחו H, Θ, K כפולות באותו מספר פעמים של A, B, Δ , ו- Λ, M, N כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של Γ, E, Z .

ומאחר ש- Θ, H הם כפולות באותו מספר פעמים של A, B , ולחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כפי ש- A אל B , כך H אל Θ . מאותם טעמים גם כפי ש- E אל Z , כך M אל N . וכפי ש- A אל B , כך E אל Z ; לפיכך כפי ש- H אל Θ , כך M אל N . ומאחר שכפי ש- B אל Γ , כך Δ אל E , הרי בחילוף כפי ש- B אל Δ , כך Γ אל E . ומאחר ש- Θ, K הם כפולות באותו מספר פעמים של B, Δ , ולחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כפי ש- B אל Δ , כך Θ אל K . אך כפי ש- B אל Δ , כך Γ אל E ; לפיכך כפי ש- Θ אל K , כך Γ אל E . ושוב, מאחר ש- Λ, M הם כפולות באותו מספר פעמים של Γ, E , כפי ש- Γ אל E , כך Λ אל M . אך כפי ש- Γ אל E , כך Θ אל K ; לפיכך כפי ש- Θ אל K , כך Λ אל M , ובחילוף כפי ש- Θ אל Λ , כך K אל M . והוכח גם שכפי ש- H אל Θ , כך M אל N . ומאחר שיש שלושה גדלים H, Θ, K

Θ , Λ ומספר שווה של גדלים אחרים K , M , N , הנלקחים שניים-שניים באותו יחס, והפרופורציה שלהם משובשת, הרי בשוויון, אם H עולה על Λ , גם K עולה על N ; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. ו- K , H הם כפולות באותו מספר פעמים של Δ , A , ואילו Λ , N כפולות באותו מספר פעמים של Z , Γ . לפיכך כפי ש- A אל Γ , כך Δ אל Z .

לפיכך, אם יש שלושה גדלים ומספר שווה של גדלים אחרים, והם נלקחים שניים-שניים באותו יחס, אך הפרופורציה שלהם משובשת, גם בשוויון הם יהיו באותו יחס; מש"ל.

אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, וגם לחמישי אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, הרי גם לראשון ולחמישי המצורפים יחד אל השני יהיה אותו יחס אשר לשלישי ולחמישי המצורפים יחד אל הרביעי.

יהי לראשון AB אל השני Γ אותו יחס אשר לשלישי ΔE אל הרביעי Z , וגם לחמישי BH אל השני Γ יהי אותו יחס אשר לשלישי $E\Theta$ אל הרביעי Z . אומר אני שגם לראשון ולחמישי המצורפים יחד, AH , אל השני Γ יהיה אותו יחס אשר לשלישי ולחמישי המצורפים יחד, $\Delta\Theta$, אל הרביעי Z .

מאחר שכפי ש- BH אל Γ , כך $E\Theta$ אל Z , הרי בהיפוך כפי ש- Γ אל BH , כך Z אל $E\Theta$. ומאחר שכפי ש- AB אל Γ , כך ΔE אל Z , וכפי ש- Γ אל BH , כך Z אל $E\Theta$, הרי בשוויון כפי ש- AB אל BH , כך ΔE אל $E\Theta$. ומאחר שהגדלים עומדים בפרופורציה בהפרדה, הם יעמדו בפרופורציה גם בצירוף; לפיכך כפי ש- AH אל HB , כך $\Delta\Theta$ אל ΘE . אך גם כפי ש- BH אל Γ , כך $E\Theta$ אל Z ; ולכן בשוויון כפי ש- AH אל Γ , כך $\Delta\Theta$ אל Z .

לפיכך, אם לראשון אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, וגם לחמישי אל השני אותו יחס אשר לשלישי אל הרביעי, הרי גם לראשון ולחמישי המצורפים יחד אל השני יהיה אותו יחס אשר לשלישי ולשלישי המצורפים יחד אל הרביעי; מש"ל.

אם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה, הגדול שבהם והקטן שבהם יחד גדולים משני הגדלים הנותרים יחד.

יהיו ארבעת הגדלים AB , $\Gamma\Delta$, E , Z עומדים בפרופורציה, כפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך E אל Z ; ויהי AB הגדול שבהם ו- Z הקטן שבהם. אומר אני ש- AB ו- Z יחד גדולים מ- $\Gamma\Delta$ ו- E יחד.

יונח AH שווה ל- E , ו- $\Gamma\Theta$ שווה ל- Z .

מאחר שכפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך E אל Z , ו- E שווה ל- AH ואילו Z שווה ל- $\Gamma\Theta$, כפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך AH אל $\Gamma\Theta$. ומאחר שכפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma\Delta$, כך החלק שהוסר AH אל החלק שהוסר $\Gamma\Theta$, גם השארית HB אל השארית $\Theta\Delta$ תהיה כפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma\Delta$. אך AB גדול מ- $\Gamma\Delta$; לפיכך גם HB גדול מ- $\Theta\Delta$. ומאחר ש- AH שווה ל- E ו- $\Gamma\Theta$ שווה ל- Z , הרי AH ו- Z יחד שווים ל- $\Gamma\Theta$ ו- E יחד. ואם אל $\Theta\Delta$, HB הבלתי־שווים, ש- HB הוא הגדול שבהם, מוסיפים ל- HB את Z , AH ול- $\Theta\Delta$ את E , $\Gamma\Theta$, מתקבל כי AB ו- Z יחד גדולים מ- $\Gamma\Delta$ ו- E יחד.

לפיכך, אם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה, הגדול שבהם והקטן שבהם יחד גדולים משני הגדלים הנותרים יחד; מש"ל.

ספר ו

צורות קוויות דומות הן אלה שזוויותיהן שוות אחת לאחת, והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה.

צורות הדדיות הן צורות שבהן, בכל אחת משתי הצורות, יש יחסים קודמים ועוקבים.

אומרים שקו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי כאשר כפי שהשלם אל הקטע הגדול, כך הקטע הגדול אל הקטן.

גובהה של כל צורה הוא האנך המועבר מן הקודקוד אל הבסיס.

אומרים שיחס מורכב מיחסים כאשר ערכי היחסים, בהיותם מוכפלים זה בזה, יוצרים ערך כלשהו.

משולשים ומקביליות המצויים באותו גובה עומדים זה אל זה כפי בסיסיהם.

יהיו $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ משולשים ו- ΓZ , $E\Gamma$ מקביליות, המצויים באותו גובה $A\Gamma$. אומר אני שכפי שהבסיס $B\Gamma$ אל הבסיס $\Gamma\Delta$, כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $A\Gamma\Delta$, וכן המקבילית $E\Gamma$ אל המקבילית ΓZ .

יוארך BA בשני הכיוונים עד הנקודות Λ , Θ ; יונחו BH , $H\Theta$ שווים לבסיס $B\Gamma$, ויונחו מספר כלשהו של קווים ΔK , $K\Lambda$ השווים לבסיס $\Gamma\Delta$; ויחברו AH , $A\Theta$, AK , AL .

ומאחר ש- ΓB , BH , $H\Theta$ שווים זה לזה, גם המשולשים $A\Theta H$, AHB , $AB\Gamma$ שווים זה לזה, לכן כפי שהבסיס $\Theta\Gamma$ הוא כפולה של הבסיס $B\Gamma$, כך המשולש

$A\Theta\Gamma$ הוא כפולה של המשולש $AB\Gamma$. מאותם טעמים, כפי שהבסיס $\Lambda\Gamma$ הוא כפולה של הבסיס $\Gamma\Delta$, כך המשולש $A\Lambda\Gamma$ הוא כפולה של המשולש $A\Gamma\Delta$. ואם הבסיס $\Theta\Gamma$ שווה לבסיס $\Gamma\Delta$, גם המשולש $A\Theta\Gamma$ שווה למשולש $A\Gamma\Delta$; אם הבסיס $\Theta\Gamma$ עולה על הבסיס $\Gamma\Delta$, גם המשולש $A\Theta\Gamma$ עולה על המשולש $A\Gamma\Delta$; ואם הוא קטן, גם המשולש קטן. לפיכך, בהיות ארבעה גדלים—שני הבסיסים $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ושני המשולשים $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ —נלקחו הבסיס $\Theta\Gamma$ והמשולש $A\Theta\Gamma$ כפולות באותו מספר פעמים של הבסיס $B\Gamma$ ושל המשולש $AB\Gamma$, ונלקחו הבסיס $\Lambda\Gamma$ והמשולש $A\Lambda\Gamma$ כפולות אחרות כלשהן באותו מספר פעמים של הבסיס $\Gamma\Delta$ ושל המשולש $A\Gamma\Delta$. והוכח שאם הבסיס $\Theta\Gamma$ עולה על הבסיס $\Gamma\Delta$, גם המשולש $A\Theta\Gamma$ עולה על המשולש $A\Gamma\Delta$; אם הוא שווה, גם האחר שווה; ואם הוא קטן, גם האחר קטן. לפיכך כפי שהבסיס $B\Gamma$ אל הבסיס $\Gamma\Delta$, כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $A\Gamma\Delta$.

ומאחר שהמקבילית $E\Gamma$ היא פי שניים מן המשולש $AB\Gamma$, והמקבילית $Z\Gamma$ היא פי שניים מן המשולש $A\Gamma\Delta$, ולחלקים ולכפולותיהם באותו מספר פעמים יש אותו יחס, כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $A\Gamma\Delta$, כך המקבילית $E\Gamma$ אל המקבילית $Z\Gamma$. וכבר הוכח שכפי שהבסיס $B\Gamma$ אל הבסיס $\Gamma\Delta$, כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $A\Gamma\Delta$, וכפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $A\Gamma\Delta$, כך המקבילית $E\Gamma$ אל המקבילית $Z\Gamma$; לפיכך כפי שהבסיס $B\Gamma$ אל הבסיס $\Gamma\Delta$, כך המקבילית $E\Gamma$ אל המקבילית $Z\Gamma$.

לפיכך, משולשים ומקביליות המצויים באותו גובה עומדים זה אל זה כפי בסיסיהם; מש"ל.

אם במשולש מועבר קו ישר במקביל לאחת הצלעות, הוא חותך את צלעות המשולש בפרופורציה; ואם צלעות המשולש נחתכות בפרופורציה, הקו הישר המחבר את נקודות החיתוך יהיה מקביל לצלע הנותרת של המשולש.

במשולש $AB\Gamma$ יועבר ΔE במקביל לאחת הצלעות, $B\Gamma$. אומר אני שכפי ש- $BA\Delta$ אל ΔA , כך ΓE אל EA .

יחוברו BE , $\Gamma\Delta$.

המשולש $B\Delta E$ שווה אפוא למשולש $\Gamma\Delta E$, שכן הם על אותו בסיס ΔE ובין אותם מקבילים ΔE , $B\Gamma$; ו- $A\Delta E$ הוא משולש אחר כלשהו. ולגדלים שווים אל אותו גודל יש אותו יחס; לפיכך כפי שהמשולש $B\Delta E$ אל $A\Delta E$, כך המשולש $\Gamma\Delta E$ אל המשולש $A\Delta E$. אך כפי שהמשולש $B\Delta E$ אל $A\Delta E$, כך $BA\Delta$ אל ΔA , שכן הם מצויים באותו גובה—האנך המועבר מ- E אל AB —ועומדים זה אל זה כפי בסיסיהם. מאותם טעמים, כפי שהמשולש $\Gamma\Delta E$ אל $A\Delta E$, כך ΓE אל EA . לפיכך כפי ש- $BA\Delta$ אל ΔA , כך ΓE אל EA .

עתה תיחתכנה צלעות המשולש $AB\Gamma$, הצלעות AB , $A\Gamma$, בפרופורציה, כפי ש- $BA\Delta$ אל ΔA , כך ΓE אל EA ; ויחובר ΔE . אומר אני ש- ΔE מקביל ל- $B\Gamma$.

לאחר אותה בנייה, מאחר שכפי ש- $BA\Delta$ אל ΔA , כך ΓE אל EA , אך כפי ש- $BA\Delta$ אל ΔA , כך המשולש $B\Delta E$ אל המשולש $A\Delta E$, וכפי ש- ΓE אל EA , כך המשולש $\Gamma\Delta E$ אל המשולש $A\Delta E$, לפיכך כפי שהמשולש $B\Delta E$ אל המשולש $A\Delta E$, כך המשולש $\Gamma\Delta E$ אל המשולש $A\Delta E$. לכן לכל אחד מן המשולשים $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ אותו יחס אל $A\Delta E$; ומכאן שהמשולש $B\Delta E$ שווה למשולש $\Gamma\Delta E$.

והם על אותו בסיס ΔE ; ומשולשים שווים הנמצאים על אותו בסיס נמצאים גם בין אותם מקבילים. לפיכך ΔE מקביל ל- BF .

לפיכך, אם במשולש מועבר קו ישר במקביל לאחת הצלעות, הוא חותך את צלעות המשולש בפרופורציה; ואם צלעות המשולש נחתכות בפרופורציה, הקו הישר המחבר את נקודות החיתוך יהיה מקביל לצלע הנותרת של המשולש; מש"ל.

אם זווית של משולש נחצית לשניים, והקו הישר החוצה את הזווית חותך גם את הבסיס, קטעי הבסיס יהיו באותו יחס כמו הצלעות הנותרות של המשולש; ואם לקטעי הבסיס אותו יחס כמו לצלעות הנותרות של המשולש, הקו הישר המחבר מן הקודקוד אל נקודת החיתוך יחצה לשניים את זווית המשולש.

יהי המשולש $AB\Gamma$, ותיחצה הזווית $B\Lambda\Gamma$ לשניים על ידי הקו הישר $A\Delta$. אומר אני שכפי ש- $B\Delta$ אל $\Gamma\Delta$, כך BA אל $A\Gamma$.

דרך Γ יועבר ΓE במקביל ל- ΔA , ו- BA יוארך עד שיפגש עמו ב- E .

ומאחר שהקו הישר $A\Gamma$ נופל על המקבילים AE , $A\Delta$, הזווית $A\Gamma E$ שווה לזווית $\Gamma A\Delta$. אך הזווית $\Gamma A\Delta$ הונחה שווה לזווית $B A \Delta$; לכן גם $B A \Delta$ שווה ל- $A\Gamma E$. ושוב, מאחר שהקו הישר BAE נופל על המקבילים AE , $A\Delta$, הזווית החיצונית $B A \Delta$ שווה לזווית הפנימית $A E \Gamma$. והוכח שגם $A\Gamma E$ שווה ל- $B A \Delta$; לפיכך הזווית $A\Gamma E$ שווה לזווית $A E \Gamma$, ולכן גם הצלע AE שווה לצלע $A\Gamma$. ומאחר שבמשולש $B\Gamma E$ הועבר $A\Delta$ במקביל לאחת הצלעות, AE , מתקבל בפרופורציה: כפי ש- $B\Delta$ אל $\Delta\Gamma$, כך BA אל AE . אך AE שווה ל- $A\Gamma$; לפיכך כפי ש- $B\Delta$ אל $\Delta\Gamma$, כך BA אל $A\Gamma$.

עתה יהי כפי ש- $\Delta\Gamma$ אל BA אל $\Delta\Gamma$, ויחובר $\Delta\Delta$. אומר אני שהזווית $BA\Gamma$ נחצית לשניים על ידי הקו הישר $\Delta\Delta$.

לאחר אותה בנייה, מאחר שכפי ש- $\Delta\Gamma$ אל BA אל $\Delta\Gamma$, כך BA אל $\Delta\Gamma$, אך גם כפי ש- $\Delta\Gamma$ אל BA אל AE , שכן במשולש $B\Gamma E$ הועבר $\Delta\Delta$ במקביל לצלע BE , לפיכך כפי ש- BA אל $\Delta\Gamma$, כך BA אל AE . לכן $\Delta\Gamma$ שווה ל- AE , ומכאן שגם הזווית $AE\Gamma$ שווה לזווית $A\Gamma E$. אך $AE\Gamma$ שווה לזווית BAD , ואילו $A\Gamma E$ שווה לזווית המתחלפת $\Gamma\Delta\Delta$; לפיכך הזווית BAD שווה לזווית $\Gamma\Delta\Delta$. לכן הזווית $BA\Gamma$ נחצית לשניים על ידי הקו הישר $\Delta\Delta$.

לפיכך, אם זווית של משולש נחצית לשניים, והקו הישר החוצה את הזווית חותך גם את הבסיס, קטעי הבסיס יהיו באותו יחס כמו הצלעות הנותרות של המשולש; ואם לקטעי הבסיס אותו יחס כמו לצלעות הנותרות של המשולש, הקו הישר המחובר מן הקודקוד אל נקודת החיתוך חוצה לשניים את זווית המשולש; מש"ל.

במשולשים שוויוניות, הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, והצלעות המתוחות מול הזוויות השוות הן צלעות תואמות.

יהיו $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ משולשים שוויוניות, כך שהזווית $AB\Gamma$ שווה ל- $\Delta\Gamma E$, הזווית $BA\Gamma$ שווה ל- $\Gamma\Delta E$, ועוד הזווית $A\Gamma B$ שווה ל- $\Gamma E\Delta$. אומר אני שבמשולשים $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, והצלעות המתוחות מול הזוויות השוות הן תואמות.

יונה $B\Gamma$ בקו ישר עם ΓE . ומאחר ששתי הזוויות $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ קטנות משתי זוויות ישרות, והזווית $A\Gamma B$ שווה לזווית $\Delta E\Gamma$, הרי שתי הזוויות $AB\Gamma$, $\Delta E\Gamma$

קטנות משתי זוויות ישרות. לפיכך BA, EA , אם יוארכו, ייפגשו. יוארכו וייפגשו ב־Z.

ומאחר שהזווית ΔFE שווה לזווית BZ , $AB\Gamma$ מקביל ל־ $\Gamma\Delta$. ושוב, מאחר שהזווית AGB שווה ל־ $AF\Gamma$, ΔEF מקביל ל־ ZE . לכן $ZA\Gamma\Delta$ הוא מקבילית; ומכאן ZA שווה ל־ $\Delta\Gamma$ ו־ $AF\Gamma$ שווה ל־ ZA . ומאחר שבמשולש ZBE הועבר AF במקביל לצלע ZE , כפי ש־ BA אל AZ , כך $B\Gamma$ אל FE . אך AZ שווה ל־ $\Gamma\Delta$; לפיכך כפי ש־ BA אל $\Gamma\Delta$, כך $B\Gamma$ אל FE , ובחילוף כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך $\Delta\Gamma$ אל FE . ושוב, מאחר ש־ $\Gamma\Delta$ מקביל ל־ BZ , כפי ש־ $B\Gamma$ אל FE , כך ZA אל ΔE . אך ZA שווה ל־ AF ; לפיכך כפי ש־ $B\Gamma$ אל FE , כך AF אל ΔE , ובחילוף כפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך FE אל EA . ומאחר שהוכח שכפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך $\Delta\Gamma$ אל FE , וכפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך FE אל EA , הרי בשוויון כפי ש־ BA אל AF , כך $\Gamma\Delta$ אל ΔE .

לפיכך, במשולשים שוו־זוויות הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, והצלעות המתוחות מול הזוויות השוות הן תואמות; מש״ל.

אם לשני משולשים צלעות העומדות בפרופורציה, המשולשים יהיו שוו־זוויות, וזוויותיהם תהיינה שוות כאשר הצלעות התואמות מתוחות מולן.

יהיו שני המשולשים $AB\Gamma$, ΔEZ בעלי צלעות העומדות בפרופורציה: כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך ΔE אל EZ ; כפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל ZA ; ועוד, כפי ש־ BA אל AF , כך EA אל AZ . אומר אני שהמשולש $AB\Gamma$ שוו־זוויות למשולש ΔEZ , וזוויותיהם שוות כאשר הצלעות התואמות מתוחות מולן: הזווית $AB\Gamma$ שווה ל־ ΔEZ , הזווית $B\Gamma A$ שווה ל־ EZA , ועוד הזווית $BA\Gamma$ שווה ל־ EAZ .

על הקו הישר EZ ובנקודות שעליו E, Z, תיבנה הזווית ZEH שווה לזווית ABΓ, והזווית EZH שווה לזווית AΓB. לפיכך הזווית הנותרת שב־A שווה לזווית הנותרת שב־H.

לפיכך המשולש ABΓ שווה־זוויות למשולש EHZ. לכן במשולשים ABΓ, EHZ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, והצלעות המתוחות מול הזוויות השוות הן תואמות; מכאן שכפי ש־AB אל BΓ, כך HE אל EZ. אך הונח שכפי ש־AB אל BΓ, כך ΔE אל EZ; לפיכך כפי ש־ΔE אל EZ, כך HE אל EZ. לכן לכל אחד מן HE, ΔE, אותו יחס אל EZ; ומכאן ΔE שווה ל־HE. מאותם טעמים גם ΔZ שווה ל־HZ. ומאחר ש־ΔE שווה ל־EH ו־EZ משותפת, שתי הצלעות ΔE, EZ שוות בהתאמה לשתי הצלעות HE, EZ; וגם הבסיס ΔZ שווה לבסיס ZH. לפיכך הזווית ΔEZ שווה לזווית HEZ, המשולש ΔEZ שווה למשולש HEZ, והזוויות הנותרות שוות לזוויות הנותרות, אלה שמולן מתוחות הצלעות השוות. לכן גם הזווית ΔZE שווה ל־HZE, והזווית EΔZ שווה ל־EHZ. ומאחר שהזווית ZEA שווה ל־HEZ, ואילו HEZ שווה ל־ABΓ, גם הזווית ABΓ שווה לזווית ΔEZ. מאותם טעמים גם AΓB שווה ל־ΔZE, ועוד הזווית שב־A שווה לזווית שב־Δ. לפיכך המשולש ABΓ שווה־זוויות למשולש ΔEZ.

לפיכך, אם לשני משולשים צלעות העומדות בפרופורציה, המשולשים יהיו שווי־זוויות, וזוויותיהם תהיינה שוות כאשר הצלעות התואמות מתוחות מולן; מש״ל.

אם לשני משולשים זווית אחת השווה לזווית אחת, והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, המשולשים יהיו שוו־זוויות, וזוויתיהם תהיינה שוות כאשר הצלעות התואמות מתוחות מולן.

יהיו שני המשולשים ΔEZ , $AB\Gamma$ בעלי זווית אחת, BAG , השווה לזווית אחת, $E\Delta Z$, והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, כפי ש־ BA אל AE , כך AG אל EZ . אומר אני שהמשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ , ושהזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית ΔEZ והזווית AGB לזווית ΔZE .

על הקו הישר ΔZ ובנקודות שעליו Z , Δ תיבנה הזווית ΔHZ שווה לאחת משתי הזוויות השוות $E\Delta Z$, BAG , והזווית ΔZH שווה לזווית AGB . לפיכך הזווית הנותרת שב־ B שווה לזווית הנותרת שב־ H .

לכן המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔHZ , ומכאן שכפי ש־ BA אל AG , כך HA אל ΔZ . אך הונח גם שכפי ש־ BA אל AG , כך EA אל ΔZ ; לפיכך כפי ש־ EA אל ΔZ , כך HA אל ΔZ . לכן EA שווה ל־ HA ; ו־ ΔZ משותפת. מכאן ששתי הצלעות ΔZ , EA שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΔZ , HA , והזווית $E\Delta Z$ שווה לזווית $H\Delta Z$. לכן הבסיס EZ שווה לבסיס HZ , המשולש ΔEZ שווה למשולש $H\Delta Z$, והזוויות הנותרות תהיינה שוות לזוויות הנותרות כאשר הצלעות השוות מתוחות מולן. לפיכך הזווית ΔZH שווה לזווית ΔZE , והזווית ΔHZ שווה לזווית ΔEZ . אך ΔZH שווה ל־ AGB ; לכן גם AGB שווה ל־ ΔZE . והזווית BAG הונחה שווה ל־ $E\Delta Z$; לפיכך גם הזווית הנותרת שב־ B שווה לזווית הנותרת שב־ E . לכן המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ .

לפיכך, אם לשני משולשים זווית אחת השווה לזווית אחת, והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, המשולשים יהיו שווי־זוויות, וזוויותיהם תהיינה שוות כאשר הצלעות התואמות מתוחות מולן; מש"ל.

אם לשני משולשים זווית אחת השווה לזווית אחת, והצלעות הסובבות זוויות אחרות עומדות בפרופורציה, וכל אחת משתי הזוויות הנותרות כאחת קטנה מזווית ישרה או אינה קטנה מזווית ישרה, המשולשים יהיו שווי־זוויות, וזוויותיהם שסביבן הצלעות עומדות בפרופורציה תהיינה שוות.

יהיו שני המשולשים ΔEZ , $AB\Gamma$ בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, BAG שווה ל־ EAZ ; והצלעות הסובבות זוויות אחרות, $AB\Gamma$ ו־ ΔEZ , תעמודנה בפרופורציה, כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך ΔE אל EZ ; ותחילה תהיינה שתי הזוויות הנותרות שב־ Γ וב־ Z , כל אחת כאחת, קטנות מזווית ישרה. אומר אני שהמשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ , שהזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית ΔEZ , וממילא שהזווית הנותרת שב־ Γ שווה לזווית הנותרת שב־ Z .

שאם הזווית $AB\Gamma$ אינה שווה לזווית ΔEZ , אחת מהן גדולה מן האחרת. תהי $AB\Gamma$ הגדולה. ועל הקו הישר AB ובנקודה שעליו B תיבנה הזווית ABH שווה לזווית ΔEZ .

ומאחר שהזווית שב־ A שווה לזווית שב־ Δ , והזווית ABH שווה לזווית ΔEZ , הזווית הנותרת AHB שווה לזווית הנותרת ΔZE . לכן המשולש ABH שווה־זוויות למשולש ΔEZ ; ומכאן שכפי ש־ AB אל BH , כך ΔE אל EZ . אך הונח שכפי ש־ ΔE אל EZ , כך AB אל $B\Gamma$; לפיכך ל־ AB אותו יחס אל כל אחד מן $B\Gamma$, BH . לכן $B\Gamma$ שווה ל־ BH , ומכאן שהזווית שב־ Γ שווה לזווית $BH\Gamma$. אך הזווית שב־ Γ הונחה קטנה מזווית ישרה; לכן גם $BH\Gamma$ קטנה מזווית ישרה,

ומכאן שהזווית הסמוכה לה AHB גדולה מזווית ישרה. והוכח שהיא שווה לזווית שב- Z ; לכן גם הזווית שב- Z גדולה מזווית ישרה. אך היא הונחה קטנה מזווית ישרה, וזה מופרך. לפיכך הזווית $AB\Gamma$ אינה בלתי־שווה לזווית ΔEZ ; לכן היא שווה לה. וגם הזווית שב- A שווה לזווית שב- Δ ; ולכן הזווית הנותרת שב- Γ שווה לזווית הנותרת שב- Z . לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ .

עתה יונח שוב שכל אחת מן הזוויות שב- Γ וב- Z אינה קטנה מזווית ישרה. אומר אני שגם במקרה זה המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ .

לאחר אותה בנייה נוכיח בדומה ש- $B\Gamma$ שווה ל- BH , ולכן גם הזווית שב- Γ שווה לזווית $BH\Gamma$. אך הזווית שב- Γ אינה קטנה מזווית ישרה; לפיכך גם $BH\Gamma$ אינה קטנה מזווית ישרה. לכן במשולש $BH\Gamma$ שתי זוויות יחד אינן קטנות משתי זוויות ישרות, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שוב הזווית $AB\Gamma$ אינה בלתי־שווה לזווית ΔEZ ; לכן היא שווה לה. וגם הזווית שב- A שווה לזווית שב- Δ ; לפיכך הזווית הנותרת שב- Γ שווה לזווית הנותרת שב- Z . לכן המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש ΔEZ .

לפיכך, אם לשני משולשים זווית אחת השווה לזווית אחת, והצלעות הסובבות זוויות אחרות עומדות בפרופורציה, וכל אחת משתי הזוויות הנותרות כאחת קטנה מזווית ישרה או אינה קטנה מזווית ישרה, המשולשים יהיו שווי־זוויות, וזוויותיהם שסביבן הצלעות עומדות בפרופורציה תהיינה שוות; מש"ל.

אם במשולש ישר־זוויות מועבר מן הזווית הישרה אנך אל הבסיס, המשולשים הסמוכים לאנך דומים הן למשולש השלם והן זה לזה.

יהי $AB\Gamma$ משולש ישר-זווית שזוויתו BAG ישרה, ומ- A יועבר אל $B\Gamma$ האנך AD . אומר אני שכל אחד מן המשולשים $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ דומה למשולש השלם $AB\Gamma$, ועוד שהם דומים זה לזה.

מאחר שהזווית BAG שווה לזווית $A\Delta B$, שכן כל אחת מהן ישרה, והזווית שב- B משותפת לשני המשולשים $AB\Gamma$, $AB\Delta$, הזווית הנותרת $\Gamma B A$ שווה לזווית הנותרת $B A \Delta$. לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה-זווית למשולש $AB\Delta$. לכן כפי ש- $B\Gamma$, המתוחה מול הזווית הישרה במשולש $AB\Gamma$, אל BA , המתוחה מול הזווית הישרה במשולש $AB\Delta$, כך AB עצמה, המתוחה מול הזווית שב- Γ במשולש $AB\Gamma$, אל BA , המתוחה מול הזווית השווה לה $B A \Delta$ במשולש $AB\Delta$; ועוד כפי ש- ΓA אל $A\Delta$, המתוחה מול הזווית שב- B המשותפת לשני המשולשים. לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה-זווית למשולש $AB\Delta$, והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה; לכן המשולש $AB\Gamma$ דומה למשולש $AB\Delta$. בדומה נוכיח שהמשולש $AB\Gamma$ דומה גם למשולש $A\Delta\Gamma$. לפיכך כל אחד מן המשולשים $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ דומה למשולש השלם $AB\Gamma$.

אומר אני שגם המשולשים $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ דומים זה לזה.

מאחר שהזווית הישרה $B A \Delta$ שווה לזווית הישרה $A\Delta\Gamma$, וגם הזווית $B A \Delta$ הוכחה שווה לזווית שב- Γ , הזווית הנותרת שב- B שווה לזווית הנותרת $\Delta A \Gamma$. לכן המשולש $AB\Delta$ שווה-זווית למשולש $A\Delta\Gamma$. לפיכך כפי ש- BA במשולש $AB\Delta$, המתוחה מול הזווית $B A \Delta$, אל $A\Delta$ במשולש $A\Delta\Gamma$, המתוחה מול הזווית שב- Γ השווה ל- $B A \Delta$, כך $A\Delta$ עצמה במשולש $AB\Delta$, המתוחה מול הזווית שב- B , אל $\Delta\Gamma$, המתוחה מול הזווית $\Delta A \Gamma$ השווה לזווית

שב $^{\circ}B$; ועוד כפי ש $^{\circ}BA$ אל AG , המתוחות מול הזוויות הישרות. לפיכך המשולש ABA דומה למשולש ADA .

לפיכך, אם במשולש ישר $^{\circ}$ זווית מועבר מן הזווית הישרה אנך אל הבסיס, המשולשים הסמוכים לאנך דומים הן למשולש השלם והן זה לזה.

מסקנה

מכאן ברור שאם במשולש ישר $^{\circ}$ זווית מועבר מן הזווית הישרה אנך אל הבסיס, האנך המועבר הוא ממוצע פרופורציונלי בין קטעי הבסיס; מש"ל.

להסיר מן הקו הישר הנתון את החלק שנקבע.

יהי הקו הישר הנתון AB . נדרש אפוא להסיר מ $^{\circ}AB$ את החלק שנקבע.

ייקבע אפוא השליש. מ $^{\circ}A$ יועבר קו ישר כלשהו AG , היוצר עם AB זווית כלשהי; על AG תילקח נקודה כלשהי Δ , ויונחו AE , EF שווים ל $^{\circ}AD$. יחובר BF , ודרך Δ יועבר ΔZ במקביל לו.

ומאחר שבמשולש ABF הועבר ΔZ במקביל לצלע BF , מתקבל בפרופורציה: כפי ש $^{\circ}\Gamma A$ אל ΔA , כך BZ אל ZA . אך ΓA הוא פי שניים מ $^{\circ}\Delta A$; לכן גם BZ הוא פי שניים מ $^{\circ}ZA$, ומכאן BA הוא פי שלושה מ $^{\circ}AZ$.

לפיכך הוסר מן הקו הישר הנתון AB החלק השלישי שנקבע, AZ ; כנדרש לעשות.

לחלק קו ישר נתון שאינו מחולק בדומה לקו ישר נתון מחולק.

יהי הקו הישר הנתון שאינו מחולק AB , והקו המחולק AG יהיה מחולק בנקודות E, Δ ; ויונחו כך שיכילו זווית כלשהי. יחובר ΓB ; דרך E, Δ יועברו ΔZ , EH מקבילים ל- ΓB , ודרך Δ יועבר ΔK במקביל ל- AB .

לפיכך כל אחד מן ΘB , $Z\Theta$ הוא מקבילית; ולכן $\Delta\Theta$ שווה ל- ZH ו- ΘK שווה ל- HB . ומאחר שבמשולש $\Delta K\Gamma$ הועבר ΘE במקביל לצלע $K\Gamma$, כפי ש- ΓE אל EA , כך $K\Theta$ אל $\Theta\Delta$. אך $K\Theta$ שווה ל- BH ו- $\Theta\Delta$ שווה ל- HZ ; לפיכך כפי ש- ΓE אל EA , כך BH אל HZ . ושוב, מאחר שבמשולש AHE הועבר ZA במקביל לצלע HE , כפי ש- EA אל ΔA , כך HZ אל ZA . והוכח גם שכפי ש- ΓE אל EA , כך BH אל HZ . לפיכך כפי ש- ΓE אל EA , כך BH אל HZ , וכפי ש- EA אל ΔA , כך HZ אל ZA .

לפיכך הקו הישר הנתון שאינו מחולק AB חולק בדומה לקו הישר הנתון המחולק AG ; כנדרש לעשות.

למצוא שלישי פרופורציונלי לשני קווים ישרים נתונים.

יהיו הקווים הישרים הנתונים BA, AG , ויונחו כך שיכילו זווית כלשהי. נדרש אפוא למצוא שלישי פרופורציונלי ל- BA, AG . יוארכו עד הנקודות E, Δ ; יונח $B\Delta$ שווה ל- AG ; יחובר ΓB ; ודרך Δ יועבר ΔE במקביל לו.

ומאחר שבמשולש $A\Delta E$ הועבר $B\Gamma$ במקביל לצלע ΔE , מתקבל בפרופורציה: כפי ש- AB אל $B\Delta$, כך AG אל ΓE . אך $B\Delta$ שווה ל- AG ; לפיכך כפי ש- AB אל AG , כך AG אל ΓE .

לפיכך נמצא לשני הקווים הישרים הנתונים AB, AG שלישי פרופורציונלי להם, ΓE ; כנדרש לעשות.

למצוא רביעי פרופורציונלי לשלושה קווים ישרים נתונים.

יהיו שלושת הקווים הישרים הנתונים A, B, Γ . נדרש אפוא למצוא רביעי פרופורציונלי ל $^{-}A, B, \Gamma$.

יונחו שני קווים ישרים $\Delta E, \Delta Z$ המכילים את הזווית $E\Delta Z$; יונח ΔH שווה ל ^{-}A , HE שווה ל ^{-}B , ועוד $\Delta \Theta$ שווה ל $^{-}\Gamma$. יחובר $H\Theta$, ודרך E יעבר EZ במקביל לו.

ומאחר שבמשולש ΔEZ הועבר $H\Theta$ במקביל לצלע EZ , כפי ש $^{-}\Delta H$ אל HE , כך $\Delta \Theta$ אל ΘZ . אך ΔH שווה ל ^{-}HE , A שווה ל ^{-}B ו $^{-}\Delta \Theta$ שווה ל $^{-}\Gamma$; לפיכך כפי ש ^{-}A אל B , כך Γ אל ΘZ .

לפיכך נמצא לשלושת הקווים הישרים הנתונים A, B, Γ רביעי פרופורציונלי, ΘZ ; כנדרש לעשות.

למצוא ממוצע פרופורציונלי לשני קווים ישרים נתונים.

יהיו שני הקווים הישרים הנתונים $AB, B\Gamma$. נדרש אפוא למצוא ממוצע פרופורציונלי ל $^{-}AB, B\Gamma$.

יונחו בקו ישר אחד; על $A\Gamma$ יתואר חצי־המעגל $A\Delta\Gamma$; מן הנקודה B יעבר $B\Delta$ בזווית ישרה לקו הישר $A\Gamma$; ויחוברו $A\Delta, \Delta\Gamma$.

מאחר שהזווית $A\Delta\Gamma$ נמצאת בחצי־מעגל, היא ישרה. ומאחר שבמשולש ישר־הזווית $A\Delta\Gamma$ הועבר מן הזווית הישרה אל הבסיס האנך ΔB , הרי ΔB הוא ממוצע פרופורציונלי בין קטעי הבסיס $AB, B\Gamma$.

לפיכך נמצא לשני הקווים הישרים הנתונים AB , $B\Gamma$ ממוצע פרופורציונלי, ΔB ; כנדרש לעשות.

במקביליות שוות ושוות־זוויות, הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי; ומקביליות שוות־זוויות שבהן הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי הן שוות.

יהיו AB , $B\Gamma$ מקביליות שוות ושוות־זוויות, שזוויתיהן שב־ B שוות; ויונחו ΔB , BE בקו ישר אחד. לפיכך גם ZB , BH בקו ישר אחד. אומר אני שבמקביליות AB , $B\Gamma$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי, כלומר שכפי ש־ ΔB אל BE , כך HB אל BZ .

תושלם המקבילית ZE . ומאחר שהמקבילית AB שווה למקבילית $B\Gamma$, ו־ ZE היא גודל אחר כלשהו, כפי ש־ AB אל ZE , כך $B\Gamma$ אל ZE . אך כפי ש־ AB אל ZE , כך ΔB אל BE , וכפי ש־ $B\Gamma$ אל ZE , כך HB אל BZ . לפיכך כפי ש־ ΔB אל BE , כך HB אל BZ . לכן במקביליות AB , $B\Gamma$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי.

עתה יהי כפי ש־ ΔB אל BE , כך HB אל BZ . אומר אני שהמקבילית AB שווה למקבילית $B\Gamma$.

מאחר שכפי ש־ ΔB אל BE , כך HB אל BZ , אך כפי ש־ ΔB אל BE , כך המקבילית AB אל המקבילית ZE , וכפי ש־ HB אל BZ , כך המקבילית $B\Gamma$ אל המקבילית ZE , לפיכך כפי ש־ AB אל ZE , כך $B\Gamma$ אל ZE . לכן המקבילית AB שווה למקבילית $B\Gamma$.

לפיכך, במקביליות שוות ושוות־זוויות הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי; ומקביליות שוות־זוויות שבהן הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי הן שוות; מש"ל.

במשולשים שווים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי; ומשולשים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, שבהם הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי, הם שווים.

יהיו $AB\Gamma$, $A\Delta E$ משולשים שווים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, הזווית $B\Delta\Gamma$ שווה לזווית ΔAE . אומר אני שבמשולשים $AB\Gamma$, $A\Delta E$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי, כלומר שכפי ש־ ΓA אל $A\Delta$, כך EA אל AB .

יונחו כך ש־ ΓA יהיה בקו ישר אחד עם $A\Delta$; לפיכך גם EA בקו ישר אחד עם AB . ויחובר BA .

ומאחר שהמשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $A\Delta E$, ו־ $BA\Delta$ הוא משולש אחר כלשהו, כפי שהמשולש ΓAB אל המשולש $BA\Delta$, כך המשולש $E\Delta A$ אל המשולש $BA\Delta$. אך כפי שהמשולש ΓAB אל $BA\Delta$, כך ΓA אל $A\Delta$, וכפי שהמשולש $E\Delta A$ אל $BA\Delta$, כך EA אל AB . לפיכך כפי ש־ ΓA אל $A\Delta$, כך EA אל AB . לכן במשולשים $AB\Gamma$, $A\Delta E$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי.

עתה תעמודנה צלעות המשולשים $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ביחס הדדי, ויהי כפי ש־ ΓA אל $A\Delta$, כך EA אל AB . אומר אני שהמשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש $A\Delta E$.

לאחר ששוב יחובר $B\Delta$, מאחר שכפי ש־ ΓA אל $A\Delta$, כך EA אל AB , אך כפי ש־ ΓA אל $A\Delta$, כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש BAA , וכפי ש־ EA אל AB , כך המשולש EAA אל המשולש BAA , לפיכך כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש BAA , כך המשולש EAA אל המשולש BAA . לכן לכל אחד מן המשולשים $AB\Gamma$, EAA אותו יחס אל BAA ; לפיכך המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש EAA .

לפיכך, במשולשים שווים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי; ומשולשים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת, שבהם הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי, הם שווים; מש"ל.

אם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים; ואם המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים, ארבעת הקווים הישרים יעמדו בפרופורציה.

יהיו ארבעת הקווים הישרים AB , ΓA , E , Z עומדים בפרופורציה, כפי ש־ AB אל ΓA , כך E אל Z . אומר אני שהמלבן הכלול בין AB , Z שווה למלבן הכלול בין ΓA , E .

מן הנקודות A , Γ יועברו AH , $\Gamma\Theta$ בזוויות ישרות לקווים הישרים AB , ΓA ; יונח AH שווה ל־ Z ו־ $\Gamma\Theta$ שווה ל־ E ; ותושלמנה המקביליות BH , $\Delta\Theta$.

ומאחר שכפי ש־ AB אל ΓA , כך E אל Z , ו־ E שווה ל־ $\Gamma\Theta$ ואילו Z שווה ל־ AH , כפי ש־ AB אל ΓA , כך $\Gamma\Theta$ אל AH . לפיכך במקביליות BH , $\Delta\Theta$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי. ומקביליות שוות־

זוויות שבהן הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי הן שוות; לכן המקבילית BH שווה למקבילית $\Delta\Theta$. ו־ BH היא המלבן הכלול בין AB, Z , שכן AH שווה ל־ Z ; ואילו $\Delta\Theta$ הוא המלבן הכלול בין $E, \Gamma\Delta$, שכן E שווה ל־ $\Gamma\Theta$. לפיכך המלבן הכלול בין AB, Z שווה למלבן הכלול בין $E, \Gamma\Delta$.

עתה יהי המלבן הכלול בין AB, Z שווה למלבן הכלול בין $E, \Gamma\Delta$. אומר אני שארבעת הקווים הישרים יעמדו בפרופורציה: כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך E אל Z .

לאחר אותה בנייה, מאחר שהמלבן הכלול בין AB, Z שווה למלבן הכלול בין $E, \Gamma\Delta$, והמלבן הכלול בין AB, Z הוא BH , שכן AH שווה ל־ Z , ואילו המלבן הכלול בין $E, \Gamma\Delta$ הוא $\Delta\Theta$, שכן $\Gamma\Theta$ שווה ל־ E , הרי BH שווה ל־ $\Delta\Theta$. והם שווי־זוויות. ובמקביליות שוות ושוות־זוויות הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי; לפיכך כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך $\Gamma\Theta$ אל AH . אך $\Gamma\Theta$ שווה ל־ E ו־ AH שווה ל־ Z ; לכן כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך E אל Z .

לפיכך, אם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים; ואם המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים, ארבעת הקווים הישרים יעמדו בפרופורציה; מש״ל.

אם שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה לריבוע שעל האמצעי; ואם המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה לריבוע שעל האמצעי, שלושת הקווים הישרים יעמדו בפרופורציה.

יהיו שלושת הקווים הישרים A, B, Γ עומדים בפרופורציה, כפי ש־ A אל B , כך B אל Γ . אומר אני שהמלבן הכלול בין A, Γ שווה לריבוע שעל B .

יונח Δ שווה ל- B .

ומאחר שכפי ש- A אל B , כך B אל Γ , ו- B שווה ל- Δ , כפי ש- A אל B , כך Δ אל Γ . ואם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים. לפיכך המלבן הכלול בין Γ ו- A , שווה למלבן הכלול בין Δ ו- B . אך המלבן הכלול בין Δ ו- B , הוא הריבוע שעל B , שכן B שווה ל- Δ ; לכן המלבן הכלול בין Γ ו- A שווה לריבוע שעל B .

עתה יהי המלבן הכלול בין Γ ו- A שווה לריבוע שעל B . אומר אני שכפי ש- A אל B , כך B אל Γ .

לאחר אותה בנייה, מאחר שהמלבן הכלול בין Γ ו- A שווה לריבוע שעל B , והריבוע שעל B הוא המלבן הכלול בין Δ ו- B , שכן B שווה ל- Δ , המלבן הכלול בין Γ ו- A שווה למלבן הכלול בין Δ ו- B . ואם המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה למלבן הכלול בין האמצעיים, ארבעת הקווים הישרים עומדים בפרופורציה. לפיכך כפי ש- A אל B , כך Δ אל Γ . אך B שווה ל- Δ ; לכן כפי ש- A אל B , כך B אל Γ .

לפיכך, אם שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה לריבוע שעל האמצעי; ואם המלבן הכלול בין הקיצוניים שווה לריבוע שעל האמצעי, שלושת הקווים הישרים יעמדו בפרופורציה; מש"ל.

לתאר על קו ישר נתון צורה קווית הדומה לצורה קווית נתונה ומונחת באותו אופן.

יהי הקו הישר הנתון AB , ותהי הצורה הקווית הנתונה ΓE . נדרש אפוא לתאר על הקו הישר AB צורה קווית הדומה לצורה הקווית ΓE ומונחת באותו אופן.

יחובר ΔZ ; ועל הקו הישר AB ובנקודות שעליו A, B תיבנה הזווית HAB שווה לזווית שב $^{\Gamma}$, והזווית ABH שווה לזווית $\Gamma\Delta Z$. לפיכך הזווית הנותרת $\Gamma Z\Delta$ שווה לזווית AHB ; ולכן המשולש $Z\Gamma\Delta$ שווה־זוויות למשולש HAB . מכאן שכפי ש $^{\Gamma}$ ΔZ אל HB , כך $Z\Gamma$ אל HA וגם $\Gamma\Delta$ אל AB . ושוב, על הקו הישר BH ובנקודות שעליו B, H תיבנה הזווית $BH\Theta$ שווה לזווית ΔZE , והזווית $HB\Theta$ שווה לזווית $Z\Delta E$. לפיכך הזווית הנותרת שב $^{\Gamma}$ E שווה לזווית הנותרת שב $^{\Theta}$; ולכן המשולש $Z\Delta E$ שווה־זוויות למשולש $H\Theta B$. מכאן שכפי ש $^{\Gamma}$ ΔZ אל HB , כך ZE אל $H\Theta$ וגם $E\Delta$ אל ΘB . והוכח גם שכפי ש $^{\Gamma}$ ΔZ אל HB , כך $Z\Gamma$ אל HA וגם $\Gamma\Delta$ אל AB . לפיכך כפי ש $^{\Gamma}$ $Z\Gamma$ אל AH , כך $\Gamma\Delta$ אל AB , וכן ZE אל $H\Theta$, ועוד $E\Delta$ אל ΘB . ומאחר שהזווית $\Gamma Z\Delta$ שווה לזווית AHB , והזווית ΔZE שווה לזווית $BH\Theta$, כל הזווית ΓZE שווה לכל הזווית $AH\Theta$. מאותם טעמים גם הזווית $\Gamma\Delta E$ שווה לזווית $AB\Theta$. וגם הזווית שב $^{\Gamma}$ שווה לזווית שב $^{\Gamma}$ A , והזווית שב $^{\Gamma}$ E לזווית שב $^{\Theta}$. לפיכך $A\Theta$ שווה־זוויות ל ΓE , והצלעות הסובבות את זוויתיהן השוות עומדות בפרופורציה. לכן הצורה הקווית $A\Theta$ דומה לצורה הקווית ΓE .

לפיכך תוארה על הקו הישר הנתון AB הצורה הקווית $A\Theta$, הדומה לצורה הקווית הנתונה ΓE ומונחת באותו אופן; כנדרש לעשות.

משולשים דומים עומדים זה אל זה ביחס הכפול מיחס הצלעות התואמות.

יהיו $AB\Gamma$, ΔEZ משולשים דומים, שבהם הזווית שב $^{\Gamma}$ B שווה לזווית שב $^{\Gamma}$ E , וכפי ש $^{\Gamma}$ AB אל $B\Gamma$, כך ΔE אל EZ , באופן שהצלע $B\Gamma$ תואמת לצלע EZ . אומר אני שלמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש ΔEZ יחס כפול מן היחס של $B\Gamma$ אל EZ .

יילקח BH שלישי פרופורציונלי ל- EZ , $B\Gamma$, כך שכפי ש- $B\Gamma$ אל EZ , כך EZ אל BH ; ויחובר AH .

ומאחר שכפי ש- AB אל $B\Gamma$, כך ΔE אל EZ , בחילוף כפי ש- AB אל ΔE , כך $B\Gamma$ אל EZ . אך כפי ש- $B\Gamma$ אל EZ , כך EZ אל BH ; לפיכך כפי ש- AB אל ΔE , כך EZ אל BH . לכן במשולשים ΔEZ , ABH הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי. ומשולשים בעלי זווית אחת השווה לזווית אחת שבהם הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי הם שווים; לפיכך המשולש ABH שווה למשולש ΔEZ . ומאחר שכפי ש- $B\Gamma$ אל EZ , כך EZ אל BH , ואם שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, לראשון אל השלישי יחס כפול מן היחס שלו אל השני, הרי ל- $B\Gamma$ אל BH יחס כפול מן היחס של ΓB אל EZ . אך כפי ש- ΓB אל BH , כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש ABH ; לכן גם למשולש $AB\Gamma$ אל ABH יחס כפול מן היחס של $B\Gamma$ אל EZ . והמשולש ABH שווה למשולש ΔEZ ; לפיכך גם למשולש $AB\Gamma$ אל המשולש ΔEZ יחס כפול מן היחס של $B\Gamma$ אל EZ .

לפיכך, משולשים דומים עומדים זה אל זה ביחס הכפול מיחס הצלעות התואמות.

מסקנה

מכאן ברור שאם שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, כפי שהראשון אל השלישי, כך הצורה המתוארת על הראשון אל הצורה הדומה לה והמתוארת באותו אופן על השני; מש"ל.

צורות רב־צלעיות דומות מתחלקות למשולשים דומים השווים במספרם ותואמים לשלמים; ולצורה הרב־צלעית אל הצורה הרב־צלעית יחס כפול מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת.

יהיו $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ צורות רב־צלעיות דומות, ותהא AB תואמת ל־ ZH . אומר אני שהצורות הרב־צלעיות $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ מתחלקות למשולשים דומים השווים במספרם ותואמים לשלמים, ושלצורה הרב־צלעית $AB\Gamma\Delta E$ אל הצורה הרב־צלעית $ZH\Theta\Lambda$ יחס כפול מן היחס של AB אל ZH .

יחוברו BE , EF , HA , $\Lambda\Theta$.

ומאחר שהצורה הרב־צלעית $AB\Gamma\Delta E$ דומה לצורה הרב־צלעית $ZH\Theta\Lambda$, הזווית BAE שווה לזווית HZA ; וכפי ש־ BA אל AE , כך HZ אל ZA . לפיכך, מאחר שבשני המשולשים ABE , ZHA זווית אחת שווה לזווית אחת והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, המשולש ABE שווה־זוויות למשולש ZHA , ולכן גם דומה לו. לפיכך הזווית ABE שווה לזווית ZHA . וגם כל הזווית $AB\Gamma$ שווה לכל הזווית $ZH\Theta$ מחמת דמיון הצורות הרב־צלעיות; לכן הזווית הנותרת $EB\Gamma$ שווה לזווית הנותרת $\Lambda H\Theta$. ומאחר שמחמת דמיון המשולשים ABE , ZHA , כפי ש־ EB אל BA , כך ΛH אל HZ , וגם מחמת דמיון הצורות הרב־צלעיות כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך ZH אל $H\Theta$, הרי בשוויון כפי ש־ EB אל $B\Gamma$, כך ΛH אל $H\Theta$. והצלעות הסובבות את הזוויות השוות $EB\Gamma$, $\Lambda H\Theta$ עומדות בפרופורציה; לפיכך המשולש $EB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש $\Lambda H\Theta$, ולכן גם דומה לו. מאותם טעמים גם המשולש $E\Gamma\Delta$ דומה למשולש $\Lambda\Theta K$. לפיכך הצורות הרב־צלעיות הדומות $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ חולקו למשולשים דומים השווים במספרם.

אומר אני שהם גם תואמים לשלמים, כלומר שהמשולשים עומדים בפרופורציה, כאשר $ABE, EBF, E\Gamma A$ הם הקודמים ו- $ZHA, AH\Theta, \Lambda\Theta K$ הם העוקבים להם; ועוד שלצורה הרב־צלעית $AB\Gamma\Delta E$ אל הצורה הרב־צלעית $ZH\Theta K\Lambda$ יחס כפול מן היחס של הצלע התואמת אל הצלע התואמת, כלומר של AB אל ZH .

יחברו $AG, Z\Theta$. ומאחר שמחמת דמיון הצורות הרב־צלעיות הזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית $ZH\Theta$, וכפי ש- AB אל $B\Gamma$, כך ZH אל $H\Theta$, המשולש $AB\Gamma$ שווה־זוויות למשולש $ZH\Theta$. לפיכך הזווית BAG שווה לזווית $HZ\Theta$, והזווית $B\Gamma A$ לזווית ΘZ . ומאחר שהזווית BAM שווה לזווית HZN , וגם הזווית ABM שווה לזווית ZHN , הזווית הנותרת AMB שווה לזווית הנותרת ZNH . לכן המשולש ABM שווה־זוויות למשולש ZHN . בדומה נוכיח שגם המשולש BMF שווה־זוויות למשולש $HN\Theta$. לפיכך כפי ש- AM אל MB , כך ZN אל NH , וכפי ש- BM אל MF , כך HN אל $N\Theta$; ולכן בשוויון כפי ש- AM אל MF , כך ZN אל $N\Theta$. אך כפי ש- AM אל MF , כך המשולש ABM אל MBF , וכן המשולש AME אל EMF , שכן הם עומדים זה אל זה כפי בסיסיהם. וכפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; לפיכך כפי שהמשולש AMB אל BMF , כך ABE אל ΓBE . אך כפי ש- AMB אל BMF , כך AM אל MF ; לכן כפי ש- AM אל MF , כך המשולש ABE אל המשולש EBF . מאותם טעמים, כפי ש- ZN אל $N\Theta$, כך המשולש ZHA אל המשולש $HA\Theta$. וכפי ש- AM אל MF , כך ZN אל $N\Theta$; לפיכך כפי שהמשולש ABE אל המשולש BEG , כך המשולש ZHA אל המשולש $HA\Theta$, ובחילוף, כפי שהמשולש ABE אל המשולש ZHA , כך המשולש BEG אל המשולש $HA\Theta$. בדומה נוכיח, לאחר שיחברו BA, HK , שכפי שהמשולש BEG אל

המשולש $\Lambda\Theta$, כך המשולש $E\Gamma\Delta$ אל המשולש $\Lambda\Theta K$. ומאחר שכפי שהמשולש ABE אל המשולש ZHA , כך $EB\Gamma$ אל $\Lambda\Theta$ ועוד $E\Gamma\Delta$ אל $\Lambda\Theta K$, וכפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד, כפי שהמשולש ABE אל המשולש ZHA , כך הצורה הרב־צלעית $AB\Gamma\Delta E$ אל הצורה הרב־צלעית $ZH\Theta K\Lambda$. אך למשולש ABE אל המשולש ZHA יחס כפול מן היחס של הצלע התואמת AB אל הצלע התואמת ZH , שכן משולשים דומים עומדים ביחס הכפול מיחס הצלעות התואמות. לפיכך גם לצורה הרב־צלעית $AB\Gamma\Delta E$ אל הצורה הרב־צלעית $ZH\Theta K\Lambda$ יחס כפול מן היחס של הצלע התואמת AB אל הצלע התואמת ZH .

לפיכך, צורות רב־צלעיות דומות מתחלקות למשולשים דומים השווים במספרם ותואמים לשלמים; ולצורה הרב־צלעית אל הצורה הרב־צלעית יחס כפול מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת.

מסקנה

ובאותו אופן יוכח גם במרובעים שהם עומדים ביחס הכפול מיחס הצלעות התואמות. והדבר הוכח גם במשולשים; לפיכך, באופן כללי, צורות קוויות דומות עומדות זו אל זו ביחס הכפול מיחס הצלעות התואמות; מש"ל.

צורות קוויות הדומות לאותה צורה קווית דומות גם זו לזו.

תהי כל אחת מן הצורות הקוויות A, B דומה ל־ Γ . אומר אני שגם A דומה ל־ B .

מאחר ש־ A דומה ל־ Γ , היא שווה־זוויות לה והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה. ושוב, מאחר ש־ B דומה ל־ Γ , היא שווה־זוויות לה

והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה. לפיכך כל אחת מן A, B שווה־זוויות ל־ Γ והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה. לכן A דומה ל־ B ; מש"ל.

אם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, גם הצורות הקוויות הדומות והמתוארות עליהן באותו אופן תעמודנה בפרופורציה; ואם הצורות הקוויות הדומות והמתוארות עליהן באותו אופן עומדות בפרופורציה, גם הקווים הישרים עצמם יעמדו בפרופורציה.

יהיו ארבעת הקווים הישרים $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ עומדים בפרופורציה, כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$. על $AB, \Gamma\Delta$ תתוארנה הצורות הקוויות הדומות והמונחות באותו אופן $KAB, \Lambda\Gamma\Delta$, ועל $EZ, H\Theta$ תתוארנה הצורות הקוויות הדומות והמונחות באותו אופן $MZ, N\Theta$. אומר אני שכפי ש־ KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, כך MZ אל $N\Theta$.

יילקח Ξ שלישי פרופורציונלי ל־ $AB, \Gamma\Delta$, ויילקח O שלישי פרופורציונלי ל־ $EZ, H\Theta$. ומאחר שכפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$, וכפי ש־ $\Gamma\Delta$ אל Ξ , כך $H\Theta$ אל O , הרי בשוויון כפי ש־ AB אל Ξ , כך EZ אל O . אך כפי ש־ AB אל Ξ , כך KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, וכפי ש־ EZ אל O , כך MZ אל $N\Theta$. לפיכך כפי ש־ KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, כך MZ אל $N\Theta$.

עתה יהי כפי ש־ KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, כך MZ אל $N\Theta$. אומר אני שגם כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$. שאם אין זה כך, יהי כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל ΠP , ועל ΠP תתואר הצורה הקווית ΣP , הדומה לאחת משתי הצורות $MZ, N\Theta$ ומונחת באותו אופן.

ומאחר שכפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל ΠP , ועל $\Gamma\Delta$, AB תוארו הצורות הדומות והמונחות באותו אופן KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, ועל ΠP , EZ תוארו הצורות הדומות והמונחות באותו אופן MZ , ΣP , כפי ש־ KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, כך MZ אל ΣP . אך הונח גם שכפי ש־ KAB אל $\Lambda\Gamma\Delta$, כך MZ אל $N\Theta$; לפיכך כפי ש־ MZ אל ΣP , כך MZ אל $N\Theta$. לכן ל־ MZ אותו יחס אל כל אחת מן ΣP , $N\Theta$; ומכאן $N\Theta$ שווה ל־ ΣP . והיא גם דומה לה ומונחת באותו אופן; לכן $H\Theta$ שווה ל־ ΠP . ומאחר שכפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל ΠP , ו־ ΠP שווה ל־ $H\Theta$, כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$.

לפיכך, אם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, גם הצורות הקוויות הדומות והמתוארות עליהן באותו אופן תעמודנה בפרופורציה; ואם הצורות הקוויות הדומות והמתוארות עליהן באותו אופן עומדות בפרופורציה, גם הקווים הישרים עצמם יעמדו בפרופורציה; מש״ל.

למקביליות שוות־זוויות יש זו אל זו יחס המורכב מיחסי הצלעותיהן.

יהיו AF , ΓZ מקביליות שוות־זוויות, שבהן הזווית $B\Gamma\Delta$ שווה לזווית $E\Gamma H$. אומר אני שלמקבילית AF אל המקבילית ΓZ יחס המורכב מיחסי הצלעות.

יונחו כך ש־ $B\Gamma$ יהיה בקו ישר אחד עם ΓH ; לפיכך גם $\Delta\Gamma$ בקו ישר אחד עם ΓE . תושלם המקבילית ΔH ; יונח קו ישר כלשהו K ; ויעשה כפי ש־ $B\Gamma$ אל ΓH , כך K אל Λ , וכפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓE , כך Λ אל M .

לפיכך היחסים של K אל Λ ושל Λ אל M זהים ליחסי הצלעות, של $B\Gamma$ אל ΓH ושל $\Delta\Gamma$ אל ΓE . אך היחס של K אל M מורכב מן היחס של K אל Λ ומן היחס של Λ אל M ; לכן ל־ K אל M יחס המורכב מיחסי הצלעות. ומאחר

שכפי ש- ΓH אל ΓH , כך המקבילית AG אל $\Gamma\Theta$, אך כפי ש- $B\Gamma$ אל ΓH , כך K אל Λ , לפיכך כפי ש- K אל Λ , כך AG אל $\Gamma\Theta$. ושוב, מאחר שכפי ש- $\Delta\Gamma$ אל ΓE , כך המקבילית $\Gamma\Theta$ אל ΓZ , אך כפי ש- $\Delta\Gamma$ אל ΓE , כך Λ אל M , לפיכך כפי ש- Λ אל M , כך המקבילית $\Gamma\Theta$ אל המקבילית ΓZ . ומאחר שהוכח שכפי ש- K אל Λ , כך המקבילית AG אל המקבילית $\Gamma\Theta$, וכפי ש- Λ אל M , כך המקבילית $\Gamma\Theta$ אל המקבילית ΓZ , הרי בשוויון כפי ש- K אל M , כך AG אל המקבילית ΓZ . אך ל- K אל M יחס המורכב מיחסי הצלעות; לפיכך גם ל- AG אל ΓZ יחס המורכב מיחסי הצלעות.

לפיכך, למקביליות שוות-זוויות יש זו אל זו יחס המורכב מיחסי צלעותיהן; מש"ל.

בכל מקבילית, המקביליות שסביב האלכסון דומות הן למקבילית השלמה והן זו לזו.

תהי $AB\Gamma\Delta$ מקבילית ויהי AG אלכסונה; ותהיינה ΘK , EH המקביליות שסביב AG . אומר אני שכל אחת מן המקביליות ΘK , EH דומה למקבילית השלמה $AB\Gamma\Delta$ וגם זו לזו.

מאחר שבמשולש $AB\Gamma$ הועבר EZ במקביל לצלע $B\Gamma$, כפי ש- BE אל EA , כך ΓZ אל ZA . ושוב, מאחר שבמשולש $A\Gamma\Delta$ הועבר ZH במקביל לצלע $\Gamma\Delta$, כפי ש- ΓZ אל ZA , כך ΔH אל HA . אך הוכח שכפי ש- ΓZ אל ZA , כך BE אל EA ; לפיכך כפי ש- BE אל EA , כך ΔH אל HA . ומכאן בצירוף כפי ש- BA אל AE , כך ΔA אל AH ; ובחילוף כפי ש- BA אל AE , כך EA אל AH . לכן במקביליות $AB\Gamma\Delta$, EH הצלעות הסובבות את הזווית המשותפת $BA\Delta$ עומדות בפרופורציה. ומאחר ש- HZ מקביל ל- $\Delta\Gamma$, הזווית AZH שווה לזווית

$\Delta\Gamma A$; והזווית $\Delta A\Gamma$ משותפת לשני המשולשים $\Delta A\Gamma$, $AH\Gamma$. לפיכך המשולש $\Delta\Gamma A$ שווה־זוויות למשולש $AH\Gamma$. מאותם טעמים גם המשולש $A\Gamma B$ שווה־זוויות למשולש AZE , וכל המקבילית $AB\Gamma\Delta$ שווה־זוויות למקבילית EH . לכן כפי ש־ $\Delta A\Gamma$ אל $\Delta\Gamma$, כך AH אל HZ ; כפי ש־ ΓA אל ΓA , כך HZ אל ZA ; כפי ש־ $A\Gamma$ אל ΓB , כך AZ אל ZE ; ועוד כפי ש־ ΓB אל BA , כך ZE אל EA . ומאחר שהוכח שכפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓA , כך HZ אל ZA , וכפי ש־ $A\Gamma$ אל ΓB , כך AZ אל ZE , הרי בשוויון כפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓB , כך HZ אל ZE . לפיכך במקביליות $AB\Gamma\Delta$, EH הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה; לכן המקבילית $AB\Gamma\Delta$ דומה למקבילית EH . מאותם טעמים המקבילית $AB\Gamma\Delta$ דומה גם למקבילית $K\Theta$; לפיכך כל אחת מן המקביליות EH , ΘK דומה ל־ $AB\Gamma\Delta$. וצורות קוויות הדומות לאותה צורה קווית דומות גם זו לזו; לכן גם המקבילית EH דומה למקבילית ΘK .

לפיכך, בכל מקבילית המקביליות שסביב האלכסון דומות הן למקבילית השלמה והן זו לזו; מש״ל.

לבנות צורה אחת הדומה לצורה קווית נתונה ושווה לצורה קווית נתונה אחרת.

תהי הצורה הקווית הנתונה שאליה יש לבנות צורה דומה $AB\Gamma$, ותהי הצורה שאליה עליה להיות שווה Δ . נדרש אפוא לבנות צורה אחת הדומה ל־ $AB\Gamma$ ושווה ל־ Δ .

תיבנה בצמוד ל־ $B\Gamma$ המקבילית BE השווה למשולש $AB\Gamma$; ובצמוד ל־ ΓE תיבנה המקבילית ΓM השווה ל־ Δ , בזווית $Z\Gamma E$ השווה לזווית $\Gamma B A$. לפיכך $B\Gamma$ בקו ישר אחד עם ΓZ , ו־ ΛE בקו ישר אחד עם EM . יילקח $H\Theta$ ממוצע

פרופורציונלי ל- ΓZ , $B\Gamma$, ועל $H\Theta$ תתואר הצורה $KH\Theta$, הדומה ל- $AB\Gamma$ ומונחת באותו אופן.

ומאחר שכפי ש- $B\Gamma$ אל $H\Theta$, כך $H\Theta$ אל ΓZ , ואם שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, כפי שהראשון אל השלישי כך הצורה שעל הראשון אל הצורה הדומה והמתוארת באותו אופן על השני, הרי כפי ש- $B\Gamma$ אל ΓZ , כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $KH\Theta$. אך גם כפי ש- $B\Gamma$ אל ΓZ , כך המקבילית BE אל המקבילית EZ . לפיכך כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $KH\Theta$, כך המקבילית BE אל המקבילית EZ ; ובחילוף כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המקבילית BE , כך המשולש $KH\Theta$ אל המקבילית EZ . אך המשולש $AB\Gamma$ שווה למקבילית BE ; לפיכך גם המשולש $KH\Theta$ שווה למקבילית EZ . והמקבילית EZ שווה ל- Δ ; לכן גם $KH\Theta$ שווה ל- Δ . ו- $KH\Theta$ גם דומה ל- $AB\Gamma$.

לפיכך נבנתה הצורה האחת $KH\Theta$, הדומה לצורה הקווית הנתונה $AB\Gamma$ ושווה לצורה הנתונה האחרת Δ ; כנדרש לעשות.

אם ממקבילית מוסרת מקבילית הדומה לשלמה, מונחת באותו אופן ובעלת זווית משותפת עמה, היא נמצאת סביב אותו אלכסון כמו המקבילית השלמה.

מן המקבילית $AB\Gamma\Delta$ תוסר המקבילית AZ , הדומה ל- $AB\Gamma\Delta$, מונחת באותו אופן ובעלת הזווית ΔAB המשותפת עמה. אומר אני שהמקביליות $AB\Gamma\Delta$, AZ נמצאות סביב אותו אלכסון.

שאם לא כן, אם אפשר, יהי $A\Theta\Gamma$ האלכסון; יוארך HZ עד Θ , ודרך Θ יועבר ΘK במקביל לאחד משני הקווים $B\Gamma$, $A\Delta$.

ומאחר שהמקביליות $AB\Gamma\Delta$, KH נמצאות סביב אותו אלכסון, כפי ש־ ΔA אל AB , כך HA אל AK . ומחמת דמיון המקביליות $AB\Gamma\Delta$, EH , גם כפי ש־ ΔA אל AB , כך HA אל AE . לפיכך כפי ש־ HA אל AK , כך HA אל AE . לכן ל־ HA אותו יחס אל כל אחת מן AK , AE ; ומכאן AE שווה ל־ AK , הקטנה לגדולה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך אין זה נכון ש־ $AB\Gamma\Delta$ ו־ AZ אינן סביב אותו אלכסון; לכן המקבילית $AB\Gamma\Delta$ והמקבילית AZ נמצאות סביב אותו אלכסון.

לפיכך, אם ממקבילית מוסרת מקבילית הדומה לשלמה, מונחת באותו אופן ובעלת זווית משותפת עמה, היא נמצאת סביב אותו אלכסון כמו המקבילית השלמה; מש״ל.

מכל המקביליות הנבנות בצמוד לאותו קו ישר וחסרות בצורות מקביליות הדומות ומונחות באותו אופן כמו זו המתוארת על מחצית הקו, הגדולה ביותר היא המקבילית הנבנית על המחצית, הדומה לחסר.

יהי הקו הישר AB וייחצה לשניים ב־ Γ ; ובצמוד ל־ AB תיבנה המקבילית $A\Delta$, החסרה בצורת המקבילית ΔB המתוארת על מחצית AB , כלומר ΓB . אומר אני שמכל המקביליות הנבנות בצמוד ל־ AB וחסרות בצורות הדומות ל־ ΔB ומונחות באותו אופן, $A\Delta$ היא הגדולה ביותר. שכן בצמוד לקו הישר AB תיבנה המקבילית AZ , החסרה בצורת המקבילית ZB הדומה ל־ ΔB ומונחת באותו אופן. אומר אני ש־ $A\Delta$ גדולה מ־ AZ .

מאחר שהמקבילית ΔB דומה למקבילית ZB , הן נמצאות סביב אותו אלכסון. יועבר אלכסון ΔB ותושלם הצורה.

ומאחר ש- ΓZ שווה ל- ZE ו- ZB משותף, כל $\Gamma\Theta$ שווה לכל KE . אך $\Gamma\Theta$ שווה ל- ΓH , מפני שגם AG שווה ל- ΓB ; לכן גם $H\Gamma$ שווה ל- EK . יתווסף לשניהם ΓZ המשותף; לפיכך כל AZ שווה לגנומון ΔMN . לכן המקבילית ΔB , כלומר ΔA , גדולה מן המקבילית AZ .

לפיכך, מכל המקביליות הנבנות בצמוד לאותו קו ישר וחסרות בצורות מקביליות הדומות ומונחות באותו אופן כמו זו המתוארת על המחצית, הגדולה ביותר היא המקבילית הנבנית על המחצית; מש"ל.

לבנות בצמוד לקו ישר נתון מקבילית השווה לצורה קווית נתונה וחסרה בצורת מקבילית הדומה לצורה נתונה; והצורה הקווית הנתונה צריכה שלא להיות גדולה מן המקבילית המתוארת על מחצית הקו ודומה לחסר.

יהי הקו הישר הנתון AB , ותהי הצורה הקווית הנתונה שלה יש לבנות בצמוד ל- AB מקבילית שווה, Γ , שאינה גדולה מן המקבילית המתוארת על מחצית AB ודומה לחסר; ותהי הצורה שאליה צריך החסר להיות דומה, Δ . נדרש אפוא לבנות בצמוד לקו הישר הנתון AB מקבילית השווה לצורה הקווית הנתונה Γ וחסרה בצורת מקבילית הדומה ל- Δ .

ייחצה AB לשניים בנקודה E ; על EB תתואר המקבילית $EBZH$, הדומה ל- Δ ומונחת באותו אופן; ותושלם המקבילית AH .

אם AH שווה ל- Γ , הרי נעשה הנדרש: שכן בצמוד לקו הישר הנתון AB נבנתה המקבילית AH השווה לצורה הקווית הנתונה Γ וחסרה בצורת המקבילית HB הדומה ל- Δ . ואם לא, יהי ΘE גדול מ- Γ . אך ΘE שווה ל- HB ; לכן גם HB גדול מ- Γ . תיבנה הצורה האחת $KAMN$, השווה לעודף שבו HB גדול מ- Γ , וגם

דומה ל־ Δ ומונחת באותו אופן. אך Δ דומה ל־ HB ; לכן גם KM דומה ל־ HB .
 תהי KA תואמת ל־ HE ו־ AM תואמת ל־ HZ . ומאחר ש־ HB שווה ל־ Γ
 ול־ KM יחד, HB גדול מ־ KM ; לכן גם HE גדול מ־ KA ו־ HZ גדול מ־ AM . יונח
 HE שווה ל־ KA ו־ HO שווה ל־ AM , ותושלם המקבילית $EHOP$. לכן היא
 שווה ודומה ל־ KM , ומכאן HP דומה ל־ HB . לפיכך HP ו־ HB נמצאות סביב
 אותו אלכסון. יהי אלכסון HPB ותושלם הצורה.

ומאחר ש־ BH שווה ל־ Γ ול־ KM יחד, ומתוכם HP שווה ל־ KM , הגנומון
 הנתון $YX\Phi$ שווה ל־ Γ הנתון. ומאחר ש־ OP שווה ל־ Σ , יתווסף לשניהם
 PIB המשותף; לפיכך כל OB שווה לכל EB . אך EB שווה ל־ TE , מפני שגם
 הצלע AE שווה לצלע EB ; לכן גם TE שווה ל־ OB . יתווסף לשניהם Σ
 המשותף; לפיכך כל TS שווה לכל הגנומון ΦXY . אך הגנומון ΦXY הוכח
 שווה ל־ Γ ; לכן גם TS שווה ל־ Γ .

לפיכך נבנתה בצמוד לקו הישר הנתון AB המקבילית ΣT , השווה לצורה
 הקווית הנתונה Γ וחסרה בצורת המקבילית PIB הדומה ל־ Δ ; כנדרש לעשות.

לבנות בצמוד לקו ישר נתון מקבילית השווה לצורה קווית נתונה ויתרה בצורת
 מקבילית הדומה לצורה נתונה.

יהי הקו הישר הנתון AB , ותהי הצורה הקווית הנתונה שלה יש לבנות בצמוד
 ל־ AB מקבילית שווה, Γ ; ותהי הצורה שאליה צריך העודף להיות דומה, Δ .
 נדרש אפוא לבנות בצמוד לקו הישר AB מקבילית השווה לצורה הקווית Γ
 ויתרה בצורת מקבילית הדומה ל־ Δ .

ייחצה AB לשניים ב־E; על EB תתואר המקבילית BZ, הדומה ל־Δ ומונחת באותו אופן; ותיבנה הצורה האחת HΘ, השווה ל־BZ ול־Γ יחד ודומה ל־Δ ומונחת באותו אופן. תהי KΘ תואמת ל־ZΛ ו־KH תואמת ל־ZE. ומאחר ש־HΘ גדול מ־ZB, גם KΘ גדול מ־ZΛ ו־KH גדול מ־ZE. יוארכו ZE, ZΛ; יהי ZAM שווה ל־KΘ ו־ZEN שווה ל־KH; ותושלם MN. לפיכך MN שווה לדומה ל־HΘ. אך HΘ דומה ל־EA; לכן גם MN דומה ל־EA, ומכאן EA ו־MN נמצאות סביב אותו אלכסון. יועבר אלכסון ZE ותושלם הצורה.

מאחר ש־HΘ שווה ל־EA ול־Γ יחד, אך HΘ שווה ל־MN, גם MN שווה ל־EA ול־Γ יחד. יוסר EA המשותף; לפיכך הגנומון הנתון ΨXΦ שווה ל־Γ. ומאחר ש־AE שווה ל־EB, גם AN שווה ל־NB, כלומר ל־AO. יתווסף לשניהם EE המשותף; לפיכך כל AE שווה לגנומון ΦXΨ. אך הגנומון ΦXΨ שווה ל־Γ; לכן גם AE שווה ל־Γ.

לפיכך נבנתה בצמוד לקו הישר הנתון AB המקבילית AE, השווה לצורה הקווית הנתונה Γ ויתרה בצורת המקבילית ΠO הדומה ל־Δ, שכן ΠO דומה גם ל־EA; כנדרש לעשות.

לחלק קו ישר סופי נתון ביחס קיצוני ואמצעי.

יהי הקו הישר הסופי הנתון AB. נדרש אפוא לחלק את הקו הישר AB ביחס קיצוני ואמצעי.

על AB יתואר הריבוע BΓ; ובצמוד ל־AΓ תיבנה המקבילית ΓΔ השווה ל־BΓ ויתרה בצורת AΔ הדומה ל־BΓ.

אך $B\Gamma$ הוא ריבוע; לכן גם $A\Delta$ הוא ריבוע. ומאחר ש $B\Gamma$ שווה ל $\Gamma\Delta$, יוסר ΓE המשותף; לפיכך השארית BZ שווה לשארית $A\Delta$. והן גם שוות־זוויות; לכן BZ , $A\Delta$ הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי. לפיכך כפי ש ZE אל EA , כך AE אל EB . אך ZE שווה ל AB ו EA שווה ל AE ; לכן כפי ש BA אל AE , כך AE אל EB . ו AB גדול מ AE ; לכן גם AE גדול מ EB .

לפיכך הקו הישר AB נחלק ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה E , והקטע הגדול שלו הוא AE ; כנדרש לעשות.

במשולשים ישר־זווית, הצורה המתוארת על הצלע המתוחה מול הזווית הישרה שווה לצורות הדומות והמתוארות באותו אופן על הצלעות הסובבות את הזווית הישרה.

יהי $AB\Gamma$ משולש ישר־זווית שזוויתו $BA\Gamma$ ישרה. אומר אני שהצורה המתוארת על $B\Gamma$ שווה לצורות הדומות והמתוארות באותו אופן על BA , $A\Gamma$.

יועבר האנך $A\Delta$.

מאחר שבמשולש ישר־הזווית $AB\Gamma$ הועבר מן הזווית הישרה שב A אל הבסיס $B\Gamma$ האנך $A\Delta$, המשולשים $ABA\Delta$, $A\Delta\Gamma$ הסמוכים לאנך דומים הן למשולש השלם $AB\Gamma$ והן זה לזה. ומאחר ש $AB\Gamma$ דומה ל $ABA\Delta$, כפי ש ΓB אל BA , כך AB אל $B\Delta$. וכאשר שלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, כפי שהראשון אל השלישי, כך הצורה שעל הראשון אל הצורה הדומה והמתוארת באותו אופן על השני. לפיכך כפי ש ΓB אל $B\Delta$, כך הצורה המתוארת על ΓB אל הצורה הדומה והמתוארת באותו אופן על BA . מאותם

טעמים גם כפי ש- $\Gamma\Delta$ אל $\Gamma\Delta$, כך הצורה המתוארת על $\Gamma\Delta$ אל הצורה המתוארת על $\Gamma\Delta$. לכן כפי ש- $\Gamma\Delta$ אל $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ יחד, כך הצורה המתוארת על $\Gamma\Delta$ אל הצורות הדומות והמתוארות באותו אופן על $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ יחד. אך $\Gamma\Delta$ שווה ל- $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ יחד; לפיכך הצורה המתוארת על $\Gamma\Delta$ שווה לצורות הדומות והמתוארות באותו אופן על $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ יחד.

לפיכך, במשולשים ישרי-זווית הצורה המתוארת על הצלע המתוחה מול הזווית הישרה שווה לצורות הדומות והמתוארות באותו אופן על הצלעות הסובבות את הזווית הישרה; מש"ל.

אם שני משולשים, ששתי צלעותיהם עומדות בפרופורציה לשתי צלעות מחוברים בזווית אחת כך שצלעותיהם התואמות גם מקבילות, הצלעות הנותרות של המשולשים תהיינה בקו ישר אחד.

יהיו שני המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, שבהם שתי הצלעות BA , AC עומדות בפרופורציה לשתי הצלעות DE , EF , כפי ש- AB אל AC , כך DE אל EF ; ויהי AB מקביל ל- DE ו- AC מקביל ל- EF . אומר אני ש- BC בקו ישר אחד עם FE .

מאחר ש- AB מקביל ל- DE והקו הישר AC נופל עליהם, הזוויות המתחלפות $\angle BAC$, $\angle ADE$ שוות זו לזו. מאותם טעמים גם הזווית $\angle ACB$ שווה לזווית $\angle AED$; ולכן גם $\angle ABC$ שווה ל- $\angle DEF$. ומאחר שבשני המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ הזווית שב- A שווה לזווית שב- D , והצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות בפרופורציה, כפי ש- BA אל AC , כך DE אל EF , המשולש $\triangle ABC$ שווה-זוויות למשולש $\triangle DEF$. לפיכך הזווית $\angle ABC$ שווה לזווית $\angle DEF$. והוכח גם שהזווית $\angle ACB$ שווה לזווית $\angle AED$; לכן כל הזוויות $\angle AFE$ שווה לשתי הזוויות $\angle ABC$, $\angle BAC$; לתווסף לשניהם הזווית $\angle ACB$ המשותפת; לפיכך הזוויות $\angle AFE$, $\angle ACB$ שוות

לשלוש הזוויות BAG, ABG, AGB . אך הזוויות BAG, ABG, GBA שוות לשתי זוויות ישרות; לכן גם הזוויות AGE, AGB שוות לשתי זוויות ישרות. ועל הקו הישר AG ובנקודה שעליו G , שני הקווים הישרים GE, BG , שאינם מונחים באותו צד, יוצרים זוויות סמוכות AGE, AGB השוות לשתי זוויות ישרות; לפיכך BG בקו ישר אחד עם GE .

לפיכך, אם שני משולשים, ששתי צלעותיהם עומדות בפרופורציה לשתי צלעות, מחוברים בזווית אחת כך שצלעותיהם התואמות גם מקבילות, הצלעות הנותרות של המשולשים תהיינה בקו ישר אחד; מש"ל.

במעגלים שווים, לזוויות אותו יחס כמו לקשתות שעליהן הן נשענות, בין שהן עומדות במרכזים ובין שהן עומדות בהיקפים.

יהיו $ABG, \Delta EZ$ מעגלים שווים; במרכזיהם H, Θ תהיינה הזוויות $BHG, E\Theta Z$, ובהיקפיהם תהיינה הזוויות $BAG, E\Delta Z$. אומר אני שכפי שהקשת BG אל הקשת EZ , כך הזווית BHG אל הזווית $E\Theta Z$, וכן הזווית BAG אל הזווית $E\Delta Z$.

יונחו ברצף מספר כלשהו של קשתות KA, GK , השוות לקשת BG , ומספר כלשהו של קשתות ZM, MN השוות לקשת EZ ; ויחברו $\Theta M, \Theta N, HK, HA$.

ומאחר שהקשתות KA, GK, BG שוות זו לזו, גם הזוויות KHA, GHK, BHG שוות זו לזו. לכן כפי שהקשת BA היא כפולה של הקשת BG , כך הזווית BHA היא כפולה של הזווית BHG . מאותם טעמים, כפי שהקשת NE היא כפולה של הקשת EZ , כך הזווית NOE היא כפולה של הזווית $E\Theta Z$. לפיכך אם הקשת BA שווה לקשת EN , גם הזווית BHA שווה לזווית $E\Theta N$; אם הקשת BA גדולה מן הקשת EN , גם הזווית BHA גדולה מן הזווית $E\Theta N$; ואם היא

קטנה, גם הזווית קטנה. לפיכך, בהיות ארבעה גדלים—שתי הקשתות $B\Gamma$, EZ ושתי הזוויות $E\Theta Z$, $BH\Gamma$ —נלקחו הקשת BA והזווית BHA כפולות באותו מספר פעמים של הקשת $B\Gamma$ ושל הזווית $BH\Gamma$, והקשת EN והזווית $E\Theta N$ כפולות באותו מספר פעמים של הקשת EZ ושל הזווית $E\Theta Z$. והוכח שאם הקשת BA עולה על הקשת EN , גם הזווית BHA עולה על הזווית $E\Theta N$; אם היא שווה, גם האחרת שווה; ואם היא קטנה, גם האחרת קטנה. לפיכך כפי שהקשת $B\Gamma$ אל EZ , כך הזווית $BH\Gamma$ אל $E\Theta Z$. אך כפי שהזווית $BH\Gamma$ אל $E\Theta Z$, כך הזווית $BA\Gamma$ אל $E\Delta Z$, שכן כל אחת מן הראשונות כפולה מן המתאימה לה. לפיכך כפי שהקשת $B\Gamma$ אל EZ , כך הזווית $BH\Gamma$ אל $E\Theta Z$, וכן הזווית $BA\Gamma$ אל $E\Delta Z$.

לפיכך, במעגלים שווים לזוויות אותו יחס כמו לקשתות שעליהן הן נשענות, בין שהן עומדות במרכזים ובין שהן עומדות בהיקפים; מש"ל.

ספר ז

יחידה היא הדבר שעל פיו כל אחד מן הדברים הקיימים נקרא אחד.

מספר הוא ריבוי המורכב מיחידות.

מספר הוא חלק של מספר, הקטן של הגדול, כאשר הוא מווד את הגדול.

והוא חלקים, כאשר אינו מווד אותו.

והגדול הוא כפולה של הקטן, כאשר הוא נמדד על ידי הקטן.

מספר זוגי הוא מספר הנחלק לשני חלקים שווים.

מספר אי־זוגי הוא מספר שאינו נחלק לשני חלקים שווים, או הנבדל ביחידה ממספר זוגי.

מספר זוגי פעמים זוגי הוא מספר הנמדד על ידי מספר זוגי מספר זוגי של פעמים.

מספר זוגי פעמים אי־זוגי הוא מספר הנמדד על ידי מספר זוגי מספר אי־זוגי של פעמים.

מספר אי־זוגי פעמים אי־זוגי הוא מספר הנמדד על ידי מספר אי־זוגי מספר אי־זוגי של פעמים.

מספר ראשוני הוא מספר הנמדד על ידי היחידה בלבד.

מספרים זרים זה לזה הם מספרים הנמדדים על ידי היחידה בלבד כמוודד משותף.

מספר מורכב הוא מספר הנמדד על ידי מספר כלשהו.

מספרים מורכבים זה לזה הם מספרים הנמדדים על ידי מספר כלשהו כמוודד משותף.

אומרים שמספר מכפיל מספר כאשר המספר המוכפל מצורף לעצמו מספר פעמים כמספר היחידות שבמספר המכפיל, וכך נוצר מספר כלשהו.

כאשר שני מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר כלשהו, הנוצר נקרא מספר מישורי, והמספרים שהכפילו זה את זה נקראים צלעותיו.

כאשר שלושה מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר כלשהו, הנוצר הוא מספר מוצק, והמספרים שהכפילו זה את זה נקראים צלעותיו.

מספר ריבועי הוא מספר שהוא שווה כפול שווה, או כלול בין שני מספרים שווים.

מספר מעוקב הוא מספר שהוא שווה כפול שווה כפול שווה, או כלול בין שלושה מספרים שווים.

מספרים עומדים בפרופורציה כאשר הראשון הוא כפולה של השני אותו מספר פעמים שהשלישי הוא כפולה של הרביעי, או כאשר הראשון הוא אותו חלק של השני שהשלישי הוא של הרביעי, או אותם חלקים.

מספרים מישוריים ומוצקים דומים הם מספרים שצלעותיהם עומדות בפרופורציה.

מספר משוכלל הוא מספר השווה לחלקיו שלו.

כאשר מונחים שני מספרים בלתי־שווים, ובחיסור חוזר מחסרים תמיד את הקטן מן הגדול, אם השארית לעולם אינה מודדת את הקודמת לה עד שנותרת יחידה, המספרים שהונחו בתחילה יהיו זרים זה לזה.

בשני המספרים $AB, \Gamma\Delta$, כאשר בחיסור חוזר מחסרים תמיד את הקטן מן הגדול, אל תמדוד השארית לעולם את הקודמת לה עד שתיוותר יחידה. אומר אני שהמספרים $AB, \Gamma\Delta$ זרים זה לזה, כלומר שהיחידה בלבד מודדת את $AB, \Gamma\Delta$.

שאם $AB, \Gamma\Delta$ אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי E . ו־ $\Gamma\Delta$ במדדו את BZ , ישאיר את ZA הקטן ממנו; AZ במדדו את ΔH , ישאיר את $H\Gamma$ הקטן ממנו; ו־ $H\Gamma$ במדדו את $Z\Theta$, ישאיר את היחידה ΘA .

ומאחר ש־ E מודד את $\Gamma\Delta$, ו־ $\Gamma\Delta$ מודד את BZ , גם E מודד את BZ . והוא מודד גם את BA השלם; לכן הוא ימדוד גם את השארית AZ . ו־ AZ מודד את ΔH ; לכן גם E מודד את ΔH . והוא מודד גם את $\Delta\Gamma$ השלם; לכן הוא ימדוד גם את השארית ΓH . ו־ ΓH מודד את $Z\Theta$; לכן גם E מודד את $Z\Theta$. והוא מודד גם את ZA השלם; לכן, בהיותו מספר, הוא ימדוד גם את היחידה הנותרת ΘA , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר אינו מודד את שני המספרים $AB, \Gamma\Delta$; ולכן $AB, \Gamma\Delta$ זרים זה לזה; מש״ל.

למצוא את המודד המשותף הגדול ביותר של שני מספרים נתונים שאינם זרים זה לזה.

יהיו שני המספרים הנתונים שאינם זרים זה לזה $AB, \Gamma\Delta$. נדרש אפוא למצוא את המודד המשותף הגדול ביותר של $AB, \Gamma\Delta$.

אם $\Gamma\Delta$ מודד את AB , והוא מודד גם את עצמו, $\Gamma\Delta$ הוא מודד משותף של $\Gamma\Delta, AB$. וברור שהוא גם הגדול ביותר, שכן שום מספר הגדול מ- $\Gamma\Delta$ לא ימדוד את $\Gamma\Delta$.

ואם $\Gamma\Delta$ אינו מודד את AB , כאשר מחסרים בחיסור חוזר תמיד את הקטן מן הגדול מבין $AB, \Gamma\Delta$, ייוותר מספר כלשהו שימדוד את הקודם לו. שכן לא תיוותר יחידה; שאם לא כן, $AB, \Gamma\Delta$ יהיו זרים זה לזה, בניגוד להנחה. לפיכך ייוותר מספר כלשהו שימדוד את הקודם לו. $\Gamma\Delta$, במדדו את BE , ישאיר את EA הקטן ממנו; EA , במדדו את ΔZ , ישאיר את $Z\Gamma$ הקטן ממנו; ו- ΓZ ימדוד את AE . מאחר ש- ΓZ מודד את AE , ו- AE מודד את ΔZ , גם ΓZ ימדוד את ΔZ ; והוא מודד גם את עצמו, ולכן ימדוד את $\Gamma\Delta$ השלם. ו- $\Gamma\Delta$ מודד את BE ; לכן גם ΓZ מודד את BE . והוא מודד גם את EA , ולכן ימדוד את BA השלם; והוא מודד גם את $\Gamma\Delta$. לפיכך ΓZ מודד את $AB, \Gamma\Delta$, ולכן הוא מודד משותף שלהם. אומר אני שהוא גם הגדול ביותר. שאם ΓZ אינו המודד המשותף הגדול ביותר של $AB, \Gamma\Delta$, מספר גדול ממנו ימדוד את שני המספרים $AB, \Gamma\Delta$. ימדוד אותם ויהי H . ומאחר ש- H מודד את $\Gamma\Delta$, ו- $\Gamma\Delta$ מודד את BE , גם H מודד את BE . והוא מודד גם את BA השלם; לכן הוא ימדוד את השארית AE . ו- AE מודד את ΔZ ; לכן גם H ימדוד את ΔZ . והוא מודד גם את $\Delta\Gamma$ השלם; לכן הגדול H ימדוד את הקטן ΓZ , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר

הגדול מ־ ΓZ אינו מודד את שני המספרים $AB, \Gamma\Delta$; לכן ΓZ הוא המודד המשותף הגדול ביותר שלהם.

מסקנה

מכאן ברור שאם מספר מודד שני מספרים, הוא ימדוד גם את המודד המשותף הגדול ביותר שלהם; מש"ל.

למצוא את המודד המשותף הגדול ביותר של שלושה מספרים נתונים שאינם זרים זה לזה.

יהיו שלושת המספרים הנתונים שאינם זרים זה לזה A, B, Γ . נדרש אפוא למצוא את המודד המשותף הגדול ביותר של A, B, Γ .

יילקח Δ , המודד המשותף הגדול ביותר של שני המספרים A, B . עתה Δ מודד את Γ או אינו מודד אותו. תחילה ימדוד אותו. והוא מודד גם את A, B ; לפיכך Δ מודד את A, B, Γ , ולכן הוא מודד משותף שלהם. אומר אני שהוא גם הגדול ביותר. שאם Δ אינו המודד המשותף הגדול ביותר של A, B, Γ , מספר הגדול מ־ Δ ימדוד את A, B, Γ . ימדוד אותם ויהי E . מאחר ש־ E מודד את A, B, Γ , הוא מודד גם את A, B ; לכן הוא ימדוד גם את המודד המשותף הגדול ביותר של A, B . אך המודד המשותף הגדול ביותר של A, B הוא Δ ; לכן הגדול E ימדוד את הקטן Δ , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר הגדול מ־ Δ אינו מודד את A, B, Γ ; ולכן Δ הוא המודד המשותף הגדול ביותר שלהם.

עתה אל ימדוד Δ את Γ . אומר אני תחילה ש־ Δ, Γ אינם זרים זה לזה. מאחר ש־ A, B, Γ אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד אותם. המספר המודד את A, B, Γ ימדוד גם את A, B , ולכן ימדוד את Δ , המודד המשותף הגדול ביותר

של A, B ; והוא מודד גם את Γ . לפיכך מספר כלשהו מודד את Δ, Γ , ולכן Δ, Γ אינם זרים זה לזה. יילקח אפוא E , המודד המשותף הגדול ביותר שלהם. ומאחר ש- E מודד את Δ , ו- Δ מודד את A, B , גם E מודד את A, B ; והוא מודד גם את Γ . לפיכך E מודד את A, B, Γ , ולכן הוא מודד משותף שלהם. אומר אני שהוא גם הגדול ביותר. שאם E אינו המודד המשותף הגדול ביותר של A, B, Γ , מספר הגדול מ- E ימדוד את A, B, Γ . ימדוד אותם ויהי Z . ומאחר ש- Z מודד את A, B, Γ , הוא מודד גם את A, B ; לכן הוא ימדוד את Δ , המודד המשותף הגדול ביותר של A, B . והוא מודד גם את Γ ; לפיכך Z מודד את Δ, Γ , ולכן ימדוד גם את E , המודד המשותף הגדול ביותר של Δ, Γ . כך הגדול Z ימדוד את הקטן E , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר הגדול מ- E אינו מודד את A, B, Γ ; לכן E הוא המודד המשותף הגדול ביותר שלהם; מש"ל.

כל מספר הקטן ממספר גדול ממנו הוא חלק או חלקים של הגדול.

יהיו שני המספרים $A, B\Gamma$, ויהי $B\Gamma$ הקטן. אומר אני ש- $B\Gamma$ הוא חלק או חלקים של A .

המספרים $A, B\Gamma$ זרים זה לזה או אינם זרים זה לזה. תחילה יהיו $A, B\Gamma$ זרים זה לזה. כאשר $B\Gamma$ מחולק ליחידות שבו, כל אחת מן היחידות שב- $B\Gamma$ היא חלק כלשהו של A ; לפיכך $B\Gamma$ הוא חלקים של A .

עתה אל יהיו $A, B\Gamma$ זרים זה לזה. $B\Gamma$ מודד את A או אינו מודד אותו. אם $B\Gamma$ מודד את A , הוא חלק של A . ואם לא, יילקח Δ , המודד המשותף הגדול ביותר של $A, B\Gamma$, ויחולק $B\Gamma$ ל- $BE, EZ, Z\Gamma$ השווים ל- Δ . ומאחר ש- Δ מודד את A , הוא חלק של A ; ו- Δ שווה לכל אחד מן $BE, EZ, Z\Gamma$. לפיכך כל אחד מן $BE, EZ, Z\Gamma$ הוא חלק של A ; ולכן $B\Gamma$ הוא חלקים של A .

לפיכך, כל מספר הקטן ממספר גדול ממנו הוא חלק או חלקים של הגדול; מש"ל.

אם מספר הוא חלק של מספר, ומספר אחר הוא אותו חלק של מספר אחר, גם שניהם יחד יהיו אותו חלק של שניהם יחד אשר האחד הוא של האחד.

יהי המספר A חלק של $B\Gamma$, ויהי המספר האחר Δ אותו חלק של המספר האחר EZ אשר A הוא של $B\Gamma$. אומר אני שגם Δ , A יחד הם אותו חלק של EZ , $B\Gamma$ יחד אשר A הוא של $B\Gamma$.

מאחר שאותו חלק אשר A הוא של $B\Gamma$, הוא גם החלק אשר Δ הוא של EZ , מספר המספרים השווים ל־ A המצויים ב־ $B\Gamma$ שווה למספר המספרים השווים ל־ Δ המצויים ב־ EZ . יחולק $B\Gamma$ ל־ BH , $H\Gamma$ השווים ל־ A , ו־ EZ ל־ $E\Theta$, ΘZ השווים ל־ Δ ; לפיכך מספרם של BH , $H\Gamma$ שווה למספרם של $E\Theta$, ΘZ . ומאחר ש־ BH שווה ל־ A ו־ $E\Theta$ שווה ל־ Δ , גם BH , $E\Theta$ יחד שווים ל־ A , Δ יחד. מאותם טעמים גם $H\Gamma$, ΘZ יחד שווים ל־ A , Δ יחד. לכן מספר המספרים השווים ל־ A המצויים ב־ $B\Gamma$ שווה למספר המספרים השווים ל־ Δ , A יחד. המצויים ב־ EZ , $B\Gamma$ יחד. לפיכך כפי ש־ $B\Gamma$ הוא כפולה של A , כך EZ , $B\Gamma$ יחד הם כפולה של Δ , A יחד. לכן אותו חלק אשר A הוא של $B\Gamma$, הוא גם החלק אשר Δ , A יחד הם של EZ , $B\Gamma$ יחד; מש"ל.

אם מספר הוא חלקים של מספר, ומספר אחר הוא אותם חלקים של מספר אחר, גם שניהם יחד יהיו אותם חלקים של שניהם יחד אשר האחד הוא של האחד.

יהי המספר AB חלקים של המספר Γ , ויהי המספר האחר ΔE אותם חלקים של המספר האחר Z אשר AB הוא של Γ . אומר אני שגם ΔE , AB יחד הם אותם חלקים של Γ , Z יחד אשר AB הוא של Γ .

מאחר שאותם חלקים אשר AB הוא של Γ , הם גם החלקים אשר ΔE הוא של Z , מספר חלקי Γ המצויים ב- AB שווה למספר חלקי Z המצויים ב- ΔE . יחולק AB לחלקי Γ , AH , HB , Γ , ΔE לחלקי Θ , $\Delta\Theta$, Z ; לפיכך מספרם של AH , HB שווה למספרם של $\Delta\Theta$, ΘE . ומאחר שאותו חלק אשר AH הוא של Γ , הוא גם החלק אשר $\Delta\Theta$ הוא של Z , אותו חלק אשר AH הוא של Γ הוא גם החלק אשר $\Delta\Theta$, AH יחד הם של Γ , Z יחד. מאותם טעמים, אותו חלק אשר HB הוא של Γ הוא גם החלק אשר ΘE , HB יחד הם של Γ , Z יחד. לפיכך אותם חלקים אשר AB הוא של Γ , הם גם החלקים אשר ΔE , AB יחד הם של Γ , Z יחד; מש"ל.

אם מספר הוא חלק של מספר, אותו חלק אשר חלק מוסר הוא מן החלק המוסר, גם השארית תהיה מן השארית אותו חלק אשר השלם הוא מן השלם.

יהי המספר AB חלק של המספר $\Gamma\Delta$, אותו חלק אשר החלק המוסר AE הוא מן החלק המוסר ΓZ . אומר אני שגם השארית EB היא מן השארית $Z\Delta$ אותו חלק אשר השלם AB הוא מן השלם $\Gamma\Delta$.

יהי EB של ΓH אותו חלק אשר AE הוא של ΓZ . ומאחר שאותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר EB הוא של ΓH , אותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר AB הוא של HZ . אך הונח שאותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר AB הוא של $\Gamma\Delta$; לכן אותו חלק אשר AB הוא של HZ הוא גם החלק אשר AB הוא של $\Gamma\Delta$. לפיכך HZ שווה ל- $\Gamma\Delta$. יוסר

ΓZ המשותף; לכן השארית $H\Gamma$ שווה לשארית $Z\Delta$. ומאחר שאותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר EB הוא של $H\Gamma$, ו- $H\Gamma$ שווה ל- $Z\Delta$, אותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר EB הוא של $Z\Delta$. אך אותו חלק אשר AE הוא של ΓZ הוא גם החלק אשר AB הוא של $\Gamma\Delta$; לפיכך גם השארית EB היא מן השארית $Z\Delta$ אותו חלק אשר השלם AB הוא מן השלם $\Gamma\Delta$; מש"ל.

אם מספר הוא חלקים של מספר, אותם חלקים אשר חלק מוסר הוא מן החלק המוסר, גם השארית תהיה מן השארית אותם חלקים אשר השלם הוא מן השלם.

יהי המספר AB חלקים של המספר $\Gamma\Delta$, אותם חלקים אשר החלק המוסר AE הוא מן החלק המוסר ΓZ . אומר אני שגם השארית EB היא מן השארית $Z\Delta$ אותם חלקים אשר השלם AB הוא מן השלם $\Gamma\Delta$.

יונח $H\Theta$ שווה ל- AB . לפיכך אותם חלקים אשר $H\Theta$ הוא של $\Gamma\Delta$ הם גם החלקים אשר AE הוא של ΓZ . יחולק $H\Theta$ לחלקי $K\Theta$, HK , $\Gamma\Delta$, ו- AE לחלקי AE , AL , ΓZ ; לפיכך מספרם של $K\Theta$, HK שווה למספרם של AE , AL . ומאחר שאותו חלק אשר HK הוא של $\Gamma\Delta$ הוא גם החלק אשר AL הוא של ΓZ , $\Gamma\Delta$ גדול מ- ΓZ , גם HK גדול מ- AL . יונח HM שווה ל- AL . לפיכך אותו חלק אשר HK הוא של $\Gamma\Delta$ הוא גם החלק אשר HM הוא של ΓZ ; ולכן השארית MK היא מן השארית $Z\Delta$ אותו חלק אשר השלם HK הוא מן השלם $\Gamma\Delta$. ושוב, מאחר שאותו חלק אשר $K\Theta$ הוא של $\Gamma\Delta$ הוא גם החלק אשר EA הוא של ΓZ , $\Gamma\Delta$ גדול מ- ΓZ , גם ΘK גדול מ- EA . יונח KN שווה ל- EA . לפיכך אותו חלק אשר $K\Theta$ הוא של $\Gamma\Delta$ הוא גם החלק אשר KN הוא של ΓZ ;

ולכן השארית $N\Theta$ היא מן השארית $Z\Delta$ אותו חלק אשר השלם $K\Theta$ הוא מן השלם $\Gamma\Delta$. והוכח גם שהשארית MK היא מן השארית $Z\Delta$ אותו חלק אשר השלם HK הוא מן השלם $\Gamma\Delta$. לפיכך $N\Theta$, MK יחד הם של ΔZ אותם חלקים אשר כל ΘH הוא של כל $\Gamma\Delta$. אך $N\Theta$, MK יחד שווים ל- EB , ו- ΘH שווה ל- BA . לפיכך גם השארית EB היא מן השארית $Z\Delta$ אותם חלקים אשר השלם AB הוא מן השלם $\Gamma\Delta$; מש"ל.

אם מספר הוא חלק של מספר, ומספר אחר הוא אותו חלק של מספר אחר, אז בחילוף יהיה השני מן הרביעי אותו חלק או אותם חלקים אשר הראשון הוא מן השלישי.

יהי המספר A חלק של המספר $B\Gamma$, ויהי המספר האחר Δ אותו חלק של המספר האחר EZ אשר A הוא של $B\Gamma$. אומר אני שבחילוף $B\Gamma$ הוא של EZ אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של Δ .

מאחר שאותו חלק אשר A הוא של $B\Gamma$ הוא גם החלק אשר Δ הוא של EZ , מספר המספרים השווים ל- A המצויים ב- $B\Gamma$ שווה למספר המספרים השווים ל- Δ המצויים ב- EZ . יחולק $B\Gamma$ ל- BH , $H\Gamma$ השווים ל- A , ו- EZ ל- ΘZ , $E\Theta$ השווים ל- Δ ; לפיכך מספרם של BH , $H\Gamma$ שווה למספרם של ΘZ , $E\Theta$.

ומאחר שהמספרים BH , $H\Gamma$ שווים זה לזה, וגם המספרים ΘZ , $E\Theta$ שווים זה לזה, ומספרם של BH , $H\Gamma$ שווה למספרם של ΘZ , $E\Theta$ הוא של ΘZ אותו חלק או אותם חלקים אשר BH הוא של $E\Theta$. לפיכך גם $B\Gamma$ השלם הוא של EZ השלם אותו חלק או אותם חלקים אשר BH הוא של $E\Theta$. אך BH שווה ל- A ו- $E\Theta$ שווה ל- Δ ; לכן $B\Gamma$ הוא של EZ אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של Δ ; מש"ל.

אם מספר הוא חלקים של מספר, ומספר אחר הוא אותם חלקים של מספר אחר, אזו בחילוף יהיה השני מן הרביעי אותם חלקים או אותו חלק אשר הראשון הוא מן השלישי.

יהי המספר AB חלקים של המספר Γ , ויהי המספר האחר ΔE אותם חלקים של המספר האחר Z . אומר אני שבחילוף Γ הוא של Z אותם חלקים או אותו חלק אשר AB הוא של ΔE .

מאחר שאותם חלקים אשר AB הוא של Γ הם גם החלקים אשר ΔE הוא של Z , מספר חלקי Γ המצויים ב־ AB שווה למספר חלקי Z המצויים ב־ ΔE . יחולק AB לחלקי Γ , AH , HB , Γ , ו־ ΔE לחלקי ΘE , $\Delta \Theta$, Z ; לפיכך מספרם של AH , HB שווה למספרם של ΘE , $\Delta \Theta$. ומאחר שאותו חלק אשר AH הוא של Γ הוא גם החלק אשר $\Delta \Theta$ הוא של Z , בחילוף Γ הוא של Z אותו חלק או אותם חלקים אשר AH הוא של $\Delta \Theta$. מאותם טעמים, Γ הוא של Z אותו חלק או אותם חלקים אשר HB הוא של ΘE . לפיכך Γ הוא של Z אותם חלקים או אותו חלק אשר AB הוא של ΔE ; מש״ל.

אם כפי שהשלם אל השלם, כך החלק המוסר אל החלק המוסר, גם השארית אל השארית תהיה כפי שהשלם אל השלם.

יהי כפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma \Delta$, כך החלק המוסר AE אל החלק המוסר ΓZ . אומר אני שגם השארית EB אל השארית $Z \Delta$ היא כפי שהשלם AB אל השלם $\Gamma \Delta$.

מאחר שכפי ש־ AB אל $\Gamma \Delta$, כך AE אל ΓZ , אותו חלק או אותם חלקים אשר AB הוא של $\Gamma \Delta$, הוא גם החלק או החלקים אשר AE הוא של ΓZ . לפיכך גם

השארית EB היא מן השארית ZA אותו חלק או אותם חלקים אשר AB הוא של $\Gamma\Delta$. לכן כפי ש- EB אל Δ , כך AB אל $\Gamma\Delta$; מש"ל.

אם מספר כלשהו של מספרים עומדים בפרופורציה, כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך יהיו כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד.

יהיו מספר כלשהו של מספרים A, B, Γ, Δ עומדים בפרופורציה, כפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ . אומר אני שכפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ , יחד A, Γ יחד אל B, Δ יחד.

מאחר שכפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ , אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של B , הוא גם החלק או החלקים אשר Γ הוא של Δ . לפיכך גם Γ, A יחד הם של Δ, B יחד אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של B . לכן כפי ש- A אל B , כך Γ, A יחד אל Δ, B יחד; מש"ל.

אם ארבעה מספרים עומדים בפרופורציה, הם יעמדו בפרופורציה גם בחילוף.

יהיו ארבעת המספרים A, B, Γ, Δ עומדים בפרופורציה, כפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ . אומר אני שהם יעמדו בפרופורציה גם בחילוף: כפי ש- A אל Γ , כך B אל Δ .

מאחר שכפי ש- A אל B , כך Γ אל Δ , אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של B , הוא גם החלק או החלקים אשר Γ הוא של Δ . לפיכך בחילוף, אותו חלק או אותם חלקים אשר A הוא של Γ , הוא גם החלק או החלקים אשר B הוא של Δ . לכן כפי ש- A אל Γ , כך B אל Δ ; מש"ל.

אם יש מספר כלשהו של מספרים ומספר שווה של מספרים אחרים, והם נלקחים שניים־שניים באותו יחס, גם בשוויון הם יהיו באותו יחס.

יהיו מספר כלשהו של מספרים A, B, Γ ומספר שווה של מספרים אחרים Δ, E, Z , הנלקחים שניים־שניים באותו יחס: כפי ש־ A אל B , כך Δ אל E , וכפי ש־ B אל Γ , כך E אל Z . אומר אני שגם בשוויון כפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל Z .

מאחר שכפי ש־ A אל B , כך Δ אל E , בחילוף כפי ש־ A אל Δ , כך B אל E . ושוב, מאחר שכפי ש־ B אל Γ , כך E אל Z , בחילוף כפי ש־ B אל E , כך Γ אל Z . אך כפי ש־ B אל E , כך A אל Δ ; לפיכך כפי ש־ A אל Δ , כך Γ אל Z . ובחילוף כפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל Z ; מש״ל.

אם יחידה מודדת מספר כלשהו אותו מספר פעמים שמספר אחר מודד מספר אחר, אז בחילוף היחידה תמדוד את המספר השלישי אותו מספר פעמים שהמספר השני מודד את הרביעי.

תמדוד היחידה A את המספר $B\Gamma$ אותו מספר פעמים שהמספר האחר Δ מודד את המספר האחר EZ . אומר אני שבחילוף היחידה A מודדת את המספר Δ אותו מספר פעמים ש־ $B\Gamma$ מודד את EZ .

מאחר שהיחידה A מודדת את המספר $B\Gamma$ אותו מספר פעמים ש־ Δ מודד את EZ , מספר היחידות ש־ $B\Gamma$ שווה למספר המספרים השווים ל־ Δ ש־ EZ . יחולק $B\Gamma$ ליחידות שבו $\Theta\Gamma, H\Theta, BH, \Gamma Z$ למספרים EK, KA, AZ השווים ל־ Δ . לפיכך מספרן של היחידות $\Theta\Gamma, H\Theta, BH$ שווה למספרם של המספרים EK, KA, AZ . ומאחר שהיחידות $\Theta\Gamma, H\Theta, BH$ שוות זו לזו, וגם המספרים EK, KA, AZ שווים זה לזה, ומספר היחידות שווה למספר המספרים, כפי שהיחידה BH אל המספר EK , כך היחידה $H\Theta$ אל המספר KA וגם היחידה $\Theta\Gamma$ אל המספר AZ . לפיכך כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; ולכן כפי שהיחידה BH אל המספר EK ,

כך $B\Gamma$ אל EZ . אך היחידה BH שווה ליחידה A , והמספר EK שווה למספר Δ . לפיכך כפי שהיחידה A אל המספר Δ , כך $B\Gamma$ אל EZ . לכן היחידה A מודדת את המספר Δ אותו מספר פעמים ש Γ מודד את EZ ; מש"ל.

אם שני מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספרים כלשהם, המספרים הנוצרים מהם יהיו שווים זה לזה.

יהיו שני המספרים A, B ; יכפיל A את B ויצור את Γ , ויכפיל B את A ויצור את Δ . אומר אני ש Γ שווה ל Δ .

מאחר ש A הכפיל את B ויצר את Γ , מודד את Γ כמספר היחידות שב A . וגם היחידה E מודדת את המספר A כמספר היחידות שבו; לפיכך היחידה E מודדת את המספר A אותו מספר פעמים ש B מודד את Γ . לכן בחילוף היחידה E מודדת את המספר B אותו מספר פעמים ש A מודד את Γ . ושוב, מאחר ש B הכפיל את A ויצר את Δ , מודד את Δ כמספר היחידות שב B . וגם היחידה E מודדת את B כמספר היחידות שבו; לפיכך היחידה E מודדת את המספר B אותו מספר פעמים ש A מודד את Δ . אך היחידה E מדדה את המספר B אותו מספר פעמים ש A מדד את Γ ; לכן A מודד כל אחד מן Γ, Δ אותו מספר פעמים. לפיכך Γ שווה ל Δ ; מש"ל.

אם מספר מכפיל שני מספרים ויוצר מהם מספרים כלשהם, לנוצרים מהם יהיה אותו יחס כמו למספרים שהוכפלו.

יכפיל המספר A את שני המספרים Γ, B ויצור את E, Δ . אומר אני שכפי ש B אל Γ , כך Δ אל E .

מאחר ש־ A הכפיל את B ויצר את B , Δ מודד את Δ כמספר היחידות שב־ A .
 וגם היחידה Z מודדת את המספר A כמספר היחידות שבו; לפיכך היחידה Z
 מודדת את המספר A אותו מספר פעמים ש־ B מודד את Δ . לכן כפי שהיחידה
 Z אל המספר A , כך B אל Δ . מאותם טעמים, כפי שהיחידה Z אל המספר A ,
 כך Γ אל E . לפיכך כפי ש־ B אל Δ , כך Γ אל E ; ובחילוף כפי ש־ B אל Γ , כך Δ
 אל E ; מש״ל.

אם שני מספרים מכפילים מספר כלשהו ויוצרים ממנו מספרים כלשהם,
 לנוצרים מהם יהיה אותו יחס כמו למספרים המכפילים.

יכפילו שני המספרים A , B את המספר Γ ויצרו את E , Δ . אומר אני שכפי
 ש־ A אל B , כך Δ אל E .

מאחר ש־ A הכפיל את Γ ויצר את Δ , גם Γ הכפיל את A ויצר את Δ . מאותם
 טעמים גם Γ הכפיל את B ויצר את E . לפיכך המספר Γ הכפיל את שני
 המספרים A , B ויצר את E , Δ . לכן כפי ש־ A אל B , כך Δ אל E ; מש״ל.

אם ארבעה מספרים עומדים בפרופורציה, המספר הנוצר מן הראשון והרביעי
 יהיה שווה למספר הנוצר מן השני והשלישי; ואם המספר הנוצר מן הראשון
 והרביעי שווה למספר הנוצר מן השני והשלישי, ארבעת המספרים יעמדו
 בפרופורציה.

יהיו ארבעת המספרים A , B , Γ , Δ עומדים בפרופורציה, כפי ש־ A אל B , כך Γ
 אל Δ ; יכפיל A את Δ ויצור את E , ויכפיל B את Γ ויצור את Z . אומר אני ש־ E
 שווה ל־ Z .

יכפיל A את Γ ויצור את H . מאחר ש A^- הכפיל את Γ ויצר את H , והכפיל את Δ ויצר את E , המספר A הכפיל את שני המספרים Δ , Γ ויצר את H , E . לפיכך כפי ש Γ^- אל Δ , כך H אל E . אך כפי ש Γ^- אל Δ , כך A אל B ; לכן כפי ש A^- אל B , כך H אל E . ושוב, מאחר ש A^- הכפיל את Γ ויצר את H , וגם B הכפיל את Γ ויצר את Z , שני המספרים A , B הכפילו את המספר Γ ויצרו את H , Z . לפיכך כפי ש A^- אל B , כך H אל Z . אך גם כפי ש A^- אל B , כך H אל E ; לכן כפי ש H^- אל E , כך H אל Z . לפיכך ל H אותו יחס אל כל אחד מן E , Z ; ולכן E שווה ל Z .

עתה יהי שוב E שווה ל Z . אומר אני שכפי ש A^- אל B , כך Γ אל Δ .

לאחר אותה בנייה, מאחר ש E^- שווה ל Z , כפי ש H^- אל E , כך H אל Z . אך כפי ש H^- אל E , כך Γ אל Δ , וכפי ש H^- אל Z , כך A אל B . לפיכך כפי ש A^- אל B , כך Γ אל Δ ; מש"ל.

המספרים הקטנים ביותר מבין המספרים בעלי אותו יחס מודדים את המספרים בעלי אותו יחס מספר פעמים: הגדול את הגדול והקטן את הקטן.

יהיו EZ , $\Gamma\Delta$ המספרים הקטנים ביותר מבין המספרים בעלי אותו יחס כמו A , B . אומר אני ש $\Gamma\Delta^-$ מודד את A אותו מספר פעמים ש EZ^- מודד את B .

$\Gamma\Delta$ אינו חלקים של A . שאם אפשר, יהי חלקים; אז גם EZ הוא של B אותם חלקים אשר $\Gamma\Delta$ הוא של A . לפיכך מספר חלקי A המצויים ב $\Gamma\Delta^-$ שווה למספר חלקי B המצויים ב EZ^- . יחולק $\Gamma\Delta$ לחלקי HA , ΓH , A , ו EZ^- לחלקי B , $E\Theta$, ΘZ ; לכן מספרם של HA , ΓH שווה למספרם של ΘZ , $E\Theta$. ומאחר

שהמספרים ΓH , $H\Delta$ שווים זה לזה, וגם המספרים $E\Theta$, ΘZ שווים זה לזה, ומספרם של ΓH , $H\Delta$ שווה למספרם של $E\Theta$, ΘZ , כפי ש- ΓH אל $E\Theta$, כך $H\Delta$ אל ΘZ . לפיכך כפי שאחד הקודמים אל אחד העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; לכן כפי ש- ΓH אל $E\Theta$, כך $\Gamma\Delta$ אל EZ . מכאן ש- $E\Theta$, ΓH קטנים מ- EZ , $\Gamma\Delta$ ובעלי אותו יחס כמוהם; ודבר זה בלתי־אפשרי, שכן EZ , $\Gamma\Delta$ הונחו המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס. לפיכך $\Gamma\Delta$ אינו חלקים של A ; לכן הוא חלק. וגם EZ הוא של B אותו חלק אשר $\Gamma\Delta$ הוא של A . לפיכך $\Gamma\Delta$ מודד את A אותו מספר פעמים ש- EZ מודד את B ; מש"ל.

מספרים זרים זה לזה הם המספרים הקטנים ביותר מבין המספרים בעלי אותו יחס כמוהם.

יהיו A , B מספרים זרים זה לזה. אומר אני ש- B , A הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם.

שאם לא כן, יהיו מספרים כלשהם הקטנים מ- B , A ובעלי אותו יחס כמו A , B . יהיו אלה Γ , Δ .

מאחר שהמספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הגדול את הגדול והקטן את הקטן, כלומר הקודם את הקודם והעוקב את העוקב, Γ מודד את A אותו מספר פעמים ש- Δ מודד את B . יהי מספר היחידות שב- E כמספר הפעמים ש- Γ מודד את A . לכן גם Δ מודד את B כמספר היחידות שב- E . ומאחר ש- Γ מודד את A כמספר היחידות שב- E , גם E מודד את A כמספר היחידות שב- Γ . מאותם טעמים E מודד גם את B כמספר היחידות שב- Δ . לפיכך E מודד את שני המספרים A , B , אף שהם זרים זה לזה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן לא יהיו מספרים הקטנים מ- A ,

B ובעלי אותו יחס כמוהם. לפיכך A, B הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם; מש"ל.

המספרים הקטנים ביותר מבין המספרים בעלי אותו יחס כמוהם זרים זה לזה.

יהיו A, B המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם. אומר אני ש- A, B זרים זה לזה.

שאם אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי Γ . יהי מספר היחידות שב- Δ כמספר הפעמים ש- Γ מודד את A , ויהי מספר היחידות שב- E כמספר הפעמים ש- Γ מודד את B .

מאחר ש- Γ מודד את A כמספר היחידות שב- Γ , Δ הכפיל את Δ ויצר את A . מאותם טעמים Γ הכפיל גם את E ויצר את B . לפיכך המספר Γ הכפיל את שני המספרים E, Δ ויצר את A, B ; לכן כפי ש- Δ אל E , כך A אל B . מכאן ש- E, Δ קטנים מ- A, B ובעלי אותו יחס כמוהם, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר אינו מודד את שני המספרים A, B ; ולכן A, B זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה, מספר המודד אחד מהם יהיה זר למספר הנותר.

יהיו A, B שני מספרים זרים זה לזה, וימדוד המספר Γ את A . אומר אני שגם Γ, B זרים זה לזה.

שאם Γ, B אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי Δ . מאחר ש- Δ מודד את Γ , ו- Γ מודד את A , גם Δ מודד את A . והוא מודד גם את B ; לפיכך Δ מודד את שני המספרים A, B , אף שהם זרים זה

לזה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן שום מספר אינו מודד את Γ, B ; ולפיכך Γ, B זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים זרים למספר כלשהו, גם המספר הנוצר מהם יהיה זר לאותו מספר.

יהיו שני המספרים A, B זרים למספר Γ , ויכפיל A את B ויצור את Δ . אומר אני ש־ Γ, Δ זרים זה לזה.

שאם Γ, Δ אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי E . ומאחר ש־ Γ, A זרים זה לזה, ומספר E מודד את Γ , גם A, E זרים זה לזה. יהי מספר היחידות שב־ Z כמספר הפעמים ש־ E מודד את Δ ; לכן גם Z מודד את Δ כמספר היחידות שב־ E . לפיכך E הכפיל את Z ויצר את Δ . אך גם A הכפיל את B ויצר את Δ ; לכן המספר הנוצר מ־ E, Z שווה למספר הנוצר מ־ A, B . ואם המספר הנוצר מן הקיצוניים שווה לנוצר מן האמצעיים, ארבעת המספרים עומדים בפרופורציה; לכן כפי ש־ E אל A , כך B אל Z . אך A, E זרים זה לזה, ומספרים זרים זה לזה הם גם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב; לפיכך E מודד את B . והוא מודד גם את Γ ; לכן E מודד את Γ, B , אף שהם זרים זה לזה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך שום מספר אינו מודד את Γ, Δ ; ולכן Γ, Δ זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה, המספר הנוצר מאחד מהם בהכפילו את עצמו יהיה זר למספר הנותר.

יהיו שני המספרים A, B זרים זה לזה, וכפיל A את עצמו ויצור את Γ . אומר אני ש- Γ, B זרים זה לזה.

ינוח Δ שווה ל- A . מאחר ש- A, B זרים זה לזה ו- A שווה ל- Δ , גם B, Δ זרים זה לזה. לפיכך כל אחד מן A, Δ זר ל- B ; ולכן גם המספר הנוצר מ- Δ , יהיה זר ל- B . אך המספר הנוצר מ- A, Δ הוא Γ . לפיכך Γ, B זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים, כל אחד מהם, זרים לכל אחד משני מספרים אחרים, גם המספרים הנוצרים מכל זוג יהיו זרים זה לזה.

יהיו שני המספרים A, B , כל אחד מהם, זרים לכל אחד משני המספרים Γ, Δ ; יכפיל A את B ויצור את E , וכפיל Γ את Δ ויצור את Z . אומר אני ש- E, Z זרים זה לזה.

מאחר שכל אחד מן A, B זר ל- Γ , גם המספר הנוצר מ- B, A יהיה זר ל- Γ . והמספר הנוצר מ- B, A הוא E ; לכן Γ, E זרים זה לזה. מאותם טעמים גם Δ, E זרים זה לזה. לפיכך כל אחד מן Γ, Δ זר ל- E ; ולכן גם המספר הנוצר מ- Γ, Δ יהיה זר ל- E . והמספר הנוצר מ- Γ, Δ הוא Z . לפיכך E, Z זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה, וכל אחד מכפיל את עצמו ויוצר מספר כלשהו, המספרים הנוצרים מהם יהיו זרים זה לזה; ואם המספרים הראשונים מכפילים את הנוצרים ויוצרים מספרים כלשהם, גם אלה יהיו זרים זה לזה.

יהיו שני המספרים A, B זרים זה לזה; יכפיל A את עצמו ויצור את Γ , ולאחר מכן יכפיל את Γ ויצור את Δ ; וכפיל B את עצמו ויצור את E , ולאחר מכן יכפיל את E ויצור את Z . אומר אני שגם Γ, E וגם Δ, Z זרים זה לזה.

מאחר ש־ A, B זרים זה לזה, A הכפיל את עצמו ויצר את Γ, B זרים זה לזה. ומאחר ש־ Γ, B זרים זה לזה, B הכפיל את עצמו ויצר את E, Γ זרים זה לזה. ושוב, מאחר ש־ A, B זרים זה לזה, B הכפיל את עצמו ויצר את E, A, E זרים זה לזה. לפיכך שני המספרים A, Γ , כל אחד מהם, זרים לכל אחד משני המספרים B, E ; ולכן המספר הנוצר מ־ A, Γ זר למספר הנוצר מ־ B, E . הראשון הוא Δ והשני Z ; לפיכך Δ, Z זרים זה לזה; מש״ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה, גם שניהם יחד יהיו זרים לכל אחד מהם; ואם שניהם יחד זרים לאחד מהם, גם המספרים הראשונים יהיו זרים זה לזה.

יורכבו שני המספרים הזרים זה לזה $AB, B\Gamma$. אומר אני שגם שניהם יחד, $A\Gamma$, זרים לכל אחד מן $AB, B\Gamma$.

שאם $\Gamma A, AB$ אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי Δ . מאחר ש־ Δ מודד את $\Gamma A, AB$, הוא ימדוד גם את השארית $B\Gamma$. והוא מודד גם את BA ; לפיכך Δ מודד את $AB, B\Gamma$, אף שהם זרים זה לזה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן שום מספר אינו מודד את $\Gamma A, AB$; ולפיכך $\Gamma A, AB$ זרים זה לזה. מאותם טעמים גם $A\Gamma, \Gamma B$ זרים זה לזה. לכן ΓA זר לכל אחד מן $AB, B\Gamma$.

עתה יהיו שוב $\Gamma A, AB$ זרים זה לזה. אומר אני שגם $AB, B\Gamma$ זרים זה לזה.

שאם $AB, B\Gamma$ אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי Δ . ומאחר ש־ Δ מודד כל אחד מן $AB, B\Gamma$, הוא ימדוד גם את ΓA השלם. והוא מודד גם את AB ; לפיכך Δ מודד את $\Gamma A, AB$, אף שהם זרים זה

לזה, ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן שום מספר אינו מודד את $AB, B\Gamma$; ולפיכך $AB, B\Gamma$ זרים זה לזה; מש"ל.

כל מספר ראשוני זר לכל מספר שאינו מודד.

יהי A מספר ראשוני ואל ימדוד את B . אומר אני ש־ A, B זרים זה לזה.

שאם A, B אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם Γ . מאחר ש־ Γ מודד את B ואילו A אינו מודד את Γ , B אינו זהה ל־ A . ומאחר ש־ Γ מודד את A, B , הוא מודד גם את A הראשוני, אף שאינו זהה לו, ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן שום מספר אינו מודד את A, B ; ולפיכך A, B זרים זה לזה; מש"ל.

אם שני מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר כלשהו, ומספר ראשוני כלשהו מודד את המספר הנוצר מהם, הוא ימדוד גם אחד מן המספרים הראשונים.

יכפילו שני המספרים A, B זה את זה ויצרו את Γ , וימדוד המספר הראשוני Δ את Γ . אומר אני ש־ Δ מודד אחד מן A, B .

אל ימדוד Δ את A . ומאחר ש־ Δ ראשוני, A, Δ זרים זה לזה. יהי מספר היחידות שב־ E כמספר הפעמים ש־ Δ מודד את Γ . מאחר ש־ Δ מודד את Γ כמספר היחידות שב־ Δ , E הכפיל את E ויצר את Γ . אך גם A הכפיל את B ויצר את Γ ; לכן המספר הנוצר מ־ E, Δ שווה למספר הנוצר מ־ A, B . לפיכך כפי ש־ Δ אל A , כך B אל E . אך A, Δ זרים זה לזה, ומספרים זרים זה לזה הם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב; לפיכך Δ מודד את B .

בדומה נוכיח שאם אינו מודד את B , הוא ימדוד את A . לכן Δ מודד אחד מן A , B ; מש"ל.

כל מספר מורכב נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו.

יהי A מספר מורכב. אומר אני ש- A נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו.

מאחר ש- A מורכב, מספר כלשהו ימדוד אותו. ימדוד אותו ויהי B . אם B ראשוני, נעשה הנדרש. ואם הוא מורכב, מספר כלשהו ימדוד אותו. ימדוד אותו ויהי Γ . ומאחר ש- Γ מודד את B , ו- B מודד את A , גם Γ מודד את A . אם Γ ראשוני, נעשה הנדרש. ואם הוא מורכב, מספר כלשהו ימדוד אותו. אם נמשיך בבדיקה זו, יילקח מספר ראשוני כלשהו שימדוד. שכן אם לא יילקח, אינסוף מספרים ימדדו את המספר A , כל אחד קטן מקודמו, ודבר זה בלתי אפשרי במספרים. לפיכך יילקח מספר ראשוני כלשהו שימדוד את הקודם לו, והוא ימדוד גם את A .

לפיכך, כל מספר מורכב נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו; מש"ל.

כל מספר הוא ראשוני או נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו.

יהי המספר A . אומר אני ש- A הוא ראשוני או נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו.

אם A ראשוני, נעשה הנדרש. ואם הוא מורכב, מספר ראשוני כלשהו ימדוד אותו.

לפיכך, כל מספר הוא ראשוני או נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו; מש"ל.

למצוא, למספר כלשהו של מספרים נתונים, את המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם.

יהיו המספרים הנתונים A, B, Γ , במספר כלשהו. נדרש אפוא למצוא את המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ .

המספרים A, B, Γ זרים זה לזה או אינם זרים זה לזה. אם A, B, Γ זרים זה לזה, הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם.

ואם לא, יילקח Δ , המודד המשותף הגדול ביותר של A, B, Γ ; ובכל אחד מן E, Z, H יהיה מספר יחידות כמספר הפעמים ש- Δ מודד כל אחד מן A, B, Γ בהתאמה. לפיכך כל אחד מן E, Z, H מודד כל אחד מן A, B, Γ בהתאמה כמספר היחידות ש- Δ . לכן E, Z, H מודדים את A, B, Γ אותו מספר פעמים, ומכאן שהם בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ . אומר אני שהם גם הקטנים ביותר. שאם E, Z, H אינם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ , יהיו מספרים Θ, K, Λ הקטנים מהם ובעלי אותו יחס כמו A, B, Γ . לפיכך Θ מודד את A אותו מספר פעמים שכל אחד מן K, Λ מודד כל אחד מן B, Γ בהתאמה. יהי מספר היחידות ש- M כמספר הפעמים ש- Θ מודד את A ; לכן גם כל אחד מן K, Λ מודד כל אחד מן B, Γ בהתאמה כמספר היחידות ש- M . ומאחר ש- Θ מודד את A כמספר היחידות ש- M , גם M מודד את A כמספר היחידות ש- Θ . מאותם טעמים M מודד גם כל אחד מן B, Γ כמספר היחידות ש- Θ שבכל אחד מן K, Λ בהתאמה. לפיכך M מודד את A, B, Γ . ומאחר ש- Θ מודד את A כמספר היחידות ש- Θ , M , הכפיל את M ויצר את A . מאותם טעמים גם E הכפיל את Δ ויצר את A . לכן המספר הנוצר מ- Δ , E , שווה למספר הנוצר מ- M, Θ ; ומכאן כפי ש- E אל Θ , כך M אל Δ . אך E גדול מ- Θ ;

לכן גם M גדול מ- Δ . והוא מודד את A, B, Γ , ודבר זה בלתי־אפשרי, שכן Δ הונח המודד המשותף הגדול ביותר של A, B, Γ . לפיכך לא יהיו מספרים הקטנים מ- E, Z, H ובעלי אותו יחס כמו A, B, Γ . לכן E, Z, H הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ ; מש"ל.

למצוא, לשני מספרים נתונים, את המספר הקטן ביותר שהם מודדים.

יהיו שני המספרים הנתונים A, B . נדרש אפוא למצוא את המספר הקטן ביותר שהם מודדים.

המספרים A, B זרים זה לזה או אינם זרים זה לזה. תחילה יהיו A, B זרים זה לזה, ויכפיל A את B ויצור את Γ ; לכן גם B הכפיל את A ויצר את Γ . לפיכך A, B מודדים את Γ . אומר אני שהוא גם הקטן ביותר. שאם לא, A, B ימדדו מספר כלשהו Δ הקטן מ- Γ . יהי מספר היחידות שב- E כמספר הפעמים ש- A מודד את Δ , ויהי מספר היחידות שב- Z כמספר הפעמים ש- B מודד את Δ . לפיכך A הכפיל את E ויצר את Δ , ו- B הכפיל את Z ויצר את Δ ; לכן המספר הנוצר מ- A, E שווה לנוצר מ- B, Z . מכאן כפי ש- A אל B , כך Z אל E . אך A, B זרים זה לזה, ולכן גם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הגדול את הגדול והקטן את הקטן. לפיכך B מודד את E , כעוקב המודד את העוקב. ומאחר ש- A הכפיל את B, E ויצר את Δ, Γ , כפי ש- B אל E , כך Γ אל Δ . אך B מודד את E ; לכן גם הגדול Γ מודד את הקטן Δ , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך A, B אינם מודדים שום מספר הקטן מ- Γ . לכן Γ הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B .

עתה אל יהיו A, B זרים זה לזה, ויילקחו Z, E , המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, B . לפיכך המספר הנוצר מ- A, E שווה למספר הנוצר

מִ⁻ B, Z. יכפיל A את E ויצור את Γ ; לכן גם B הכפיל את Z ויצר את Γ . לפיכך A, B מודדים את Γ . אומר אני שהוא גם הקטן ביותר. שאם לא, A, B מספר כלשהו Δ הקטן מִ⁻. יהי מספר היחידות שב־ H כמספר הפעמים ש־ A מודד את Δ , ויהי מספר היחידות שב־ Θ כמספר הפעמים ש־ B מודד את Δ . לפיכך A הכפיל את H ויצר את Δ , ו־B הכפיל את Θ ויצר את Δ . לכן המספר הנוצר מִ⁻ H, A שווה לנוצר מִ⁻ Θ , B, ומכאן כפי ש־ A אל B, כך Θ אל H. אך כפי ש־ A אל B, כך Z אל E; ולכן כפי ש־ Z אל E, כך Θ אל H. ו־Z, E הם הקטנים ביותר; לכן E מודד את H. ומאחר ש־ A הכפיל את H, E ויצר את Γ , Δ כפי ש־ E אל H, כך Γ אל Δ . אך E מודד את H; לכן גם הגדול Γ מודד את הקטן Δ , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך A, B אינם מודדים שום מספר הקטן מִ⁻. לכן Γ הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B; מש״ל.

אם שני מספרים מודדים מספר כלשהו, גם המספר הקטן ביותר הנמדד על ידיהם ימדוד אותו.

ימדדו שני המספרים A, B את המספר $\Gamma\Delta$, ויהי E המספר הקטן ביותר הנמדד על ידיהם. אומר אני שגם E מודד את $\Gamma\Delta$.

שאם E אינו מודד את $\Gamma\Delta$, ימדוד E את ΔZ וישאיר את ΓZ הקטן ממנו. ומאחר ש־ A , B מודדים את E, ו־E מודד את ΔZ , גם A, B ימדדו את ΔZ . והם מודדים גם את $\Gamma\Delta$ השלם; לכן הם ימדדו את השארית ΓZ הקטנה מִ⁻ E, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך אין זה נכון ש־ E אינו מודד את $\Gamma\Delta$; לכן הוא מודד אותו; מש״ל.

למצוא, לשלושה מספרים נתונים, את המספר הקטן ביותר שהם מודדים.

יהיו שלושת המספרים הנתונים A, B, Γ . נדרש אפוא למצוא את המספר הקטן ביותר שהם מודדים.

יילקח Δ , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי שני המספרים A, B . עתה Γ מודד את Δ או אינו מודד אותו. תחילה ימדוד אותו. וגם A, B מודדים את Δ ; לפיכך A, B, Γ מודדים את Δ . אומר אני שהוא גם הקטן ביותר. שאם לא, A, B, Γ ימדדו מספר E הקטן מ- Δ . מאחר ש- A, B, Γ מודדים את E , גם A, B מודדים אותו; ולכן המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B ימדוד אותו. אך המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B הוא Δ ; לכן הגדול Δ ימדוד את הקטן E , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך A, B, Γ אינם מודדים שום מספר הקטן מ- Δ ; לכן Δ הוא המספר הקטן ביותר שהם מודדים.

עתה אל ימדוד Γ את Δ , ויילקח E , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Δ, Γ . מאחר ש- A, B מודדים את Δ , ו- Γ מודד את E , גם A, B מודדים את E . וגם Γ מודד אותה; לפיכך A, B, Γ מודדים את E . אומר אני שהוא גם הקטן ביותר. שאם לא, A, B, Γ ימדדו מספר Z הקטן מ- E . מאחר ש- A, B, Γ מודדים את Z , גם A, B מודדים אותו; ולכן Δ , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B , ימדוד את Z . וגם Γ מודד את Z ; לפיכך Δ, Γ מודדים את Z , ולכן גם המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Δ, Γ הוא E ; לכן הגדול E ימדוד את הקטן Z , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך A, B, Γ אינם מודדים שום מספר הקטן מ- E . לכן E הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B, Γ ; מש"ל.

אם מספר נמדד על ידי מספר כלשהו, למספר הנמדד יהיה חלק בעל אותו שם כמו המספר המודד.

יהי המספר A נמדד על ידי המספר B . אומר אני של- A יש חלק בעל אותו שם כמו B .

יהי מספר היחידות שב- Γ כמספר הפעמים ש- B מודד את A . מאחר ש- B מודד את A כמספר היחידות שב- Γ , וגם היחידה Δ מודדת את המספר Γ כמספר היחידות שבו, היחידה Δ מודדת את Γ אותו מספר פעמים ש- B מודד את A . לכן בחילוף היחידה Δ מודדת את המספר B אותו מספר פעמים ש- Γ מודד את A . לפיכך אותו חלק אשר היחידה Δ היא של המספר B , הוא גם החלק אשר Γ הוא של A . אך היחידה Δ היא של המספר B חלק בעל אותו שם כמוהו; לכן גם Γ הוא של A חלק בעל אותו שם כמו B . מכאן של- A יש את Γ כחלק בעל אותו שם כמו B ; מש"ל.

אם למספר יש חלק כלשהו, הוא יימדד על ידי מספר בעל אותו שם כמו החלק.

יהי למספר A חלק כלשהו B , ויהי Γ בעל אותו שם כמו החלק B . אומר אני ש- Γ מודד את A .

מאחר ש- B הוא של A חלק בעל אותו שם כמו Γ , וגם היחידה Δ היא של Γ חלק בעל אותו שם כמוהו, אותו חלק אשר היחידה Δ היא של המספר Γ הוא גם החלק אשר B הוא של A . לכן היחידה Δ מודדת את המספר Γ אותו מספר פעמים ש- B מודד את A . ובחילוף היחידה Δ מודדת את המספר B אותו מספר פעמים ש- Γ מודד את A . לפיכך Γ מודד את A ; מש"ל.

למצוא מספר שהוא הקטן ביותר מבין המספרים שיש להם החלקים הנתונים.

יהיו החלקים הנתונים A, B, Γ . נדרש אפוא למצוא מספר שהוא הקטן ביותר מבין המספרים שיש להם החלקים A, B, Γ .

יהיו המספרים Δ, E, Z בעלי אותם שמות כמו החלקים A, B, Γ , ויילקח H , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Δ, E, Z .

לפיכך ל־ H יש חלקים בעלי אותם שמות כמו Δ, E, Z . אך החלקים A, B, Γ הם בעלי אותם שמות כמו Δ, E, Z ; לכן ל־ H יש החלקים A, B, Γ . אומר אני שהוא גם הקטן ביותר. שאם לא, יהיה מספר Θ הקטן מ־ H ובעל החלקים A, B, Γ . מאחר של־ Θ יש החלקים A, B, Γ, Θ יימדד על ידי מספרים בעלי אותם שמות כמו החלקים A, B, Γ . אך המספרים בעלי אותם שמות כמו החלקים A, B, Γ הם Δ, E, Z ; לכן Θ נמדד על ידי Δ, E, Z . והוא קטן מ־ H , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך לא יהיה מספר הקטן מ־ H ובעל החלקים A, B, Γ ; מש״ל.

ספר ח

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה, והקיצוניים שלהם זרים זה לזה, הם הקטנים ביותר מבין המספרים בעלי אותו יחס כמוהם.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים ברצף בפרופורציה, ויהיו הקיצוניים שלהם A, Δ זרים זה לזה. אומר אני ש־ A, B, Γ, Δ הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם.

שאם לא, יהיו E, Z, H, Θ קטנים מ־ A, B, Γ, Δ ובעלי אותו יחס כמוהם. ומאחר ש־ A, B, Γ, Δ בעלי אותו יחס כמו E, Z, H, Θ ומספרם שווה, בשוויון כפי ש־ A אל Δ , כך E אל Θ . אך A, Δ זרים זה לזה, ולכן הם גם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הגדול את הגדול והקטן את הקטן, כלומר הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך הגדול A מודד את הקטן E , ודבר זה בלתי־אפשרי. לכן E, Z, H, Θ אינם קטנים מ־ A, B, Γ, Δ ובעלי אותו יחס כמוהם. לפיכך A, B, Γ, Δ הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם; מש״ל.

למצוא מספרים רבים ככל שייקבע, העומדים ברצף בפרופורציה ביחס נתון והקטנים ביותר.

יהי היחס הנתון, המבוטא במספרים הקטנים ביותר, היחס של A אל B . נדרש אפוא למצוא מספרים רבים ככל שייקבע, העומדים ברצף בפרופורציה ביחס של A אל B והקטנים ביותר.

יִקְבְּעוּ אַרְבַּעַה. יִכְפִּיל A אֶת עֲצֻמוֹ וִיצוֹר אֶת Γ , יִכְפִּיל אֶת B וִיצוֹר אֶת Δ ; יִכְפִּיל B אֶת עֲצֻמוֹ וִיצוֹר אֶת E ; וְעוֹד יִכְפִּיל A אֶת Δ , E , Γ וִיצוֹר אֶת Θ , H , Z , וְאִילוֹ B יִכְפִּיל אֶת E וִיצוֹר אֶת K .

וּמֵאַחֵר שֶׁ־ A הִכְפִּיל אֶת עֲצֻמוֹ וִיצוֹר אֶת Γ , וְהִכְפִּיל אֶת B וִיצוֹר אֶת Δ , כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ Γ אֵל Δ . וְשׁוּב, מֵאַחֵר שֶׁ־ A הִכְפִּיל אֶת B וִיצוֹר אֶת Δ , וְאִילוֹ B הִכְפִּיל אֶת עֲצֻמוֹ וִיצוֹר אֶת E , כֵּל אֶחָד מִן A , B הִכְפִּיל אֶת B וִיצוֹר בַּהֲתַאמָּה אֶת E , Δ . לְפִיכֵךְ כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ Δ אֵל E . אֲךָ כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ Γ אֵל Δ ; לִכֵּן כִּי שֶׁ־ Γ אֵל Δ , כֵּךְ Δ אֵל E . וּמֵאַחֵר שֶׁ־ A הִכְפִּיל אֶת Δ , Γ וִיצוֹר אֶת H , Z , כִּי שֶׁ־ Γ אֵל Δ , כֵּךְ Z אֵל H . אֲךָ כִּי שֶׁ־ Γ אֵל Δ , כֵּךְ A אֵל B ; לִכֵּן כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ Z אֵל H . וְשׁוּב, מֵאַחֵר שֶׁ־ A הִכְפִּיל אֶת E , Δ וִיצוֹר אֶת Θ , H , כִּי שֶׁ־ Δ אֵל E , כֵּךְ H אֵל Θ . אֲךָ כִּי שֶׁ־ Δ אֵל E , כֵּךְ A אֵל B ; לִכֵּן כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ H אֵל Θ . וּמֵאַחֵר שֶׁ־ A , B הִכְפִּילוּ אֶת E וִיצְרוּ אֶת K , Θ , כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ Θ אֵל K . אֲךָ כִּי שֶׁ־ A אֵל B , כֵּךְ גַּם Z אֵל H וְגַם H אֵל Θ . לְפִיכֵךְ כִּי שֶׁ־ Z אֵל H , כֵּךְ H אֵל Θ וְגַם Θ אֵל K . לִכֵּן E , Δ , Γ וְכֵן K , Θ , H , Z עוֹמְדִים בַּפְּרוֹפּוֹרְצִיָּה בִּיחֹס שֶׁל A אֵל B . אוֹמֵר אֲנִי שֶׁהֵם גַּם הַקְטָנִים בְּיוֹתֵר. מֵאַחֵר שֶׁ־ A , B הֵם הַקְטָנִים בְּיוֹתֵר מִבֵּין בְּעֲלֵי אוֹתוֹ יֹחֵס זֶה לְזֶה, A , B זֵרִים זֶה לְזֶה. וְכֵל אֶחָד מִן A , B הִכְפִּיל אֶת עֲצֻמוֹ וִיצוֹר בַּהֲתַאמָּה אֶת E , Γ , וְכֵל אֶחָד מִן A , B הִכְפִּיל בַּהֲתַאמָּה אֶת E , Γ , K ; לִכֵּן E , Γ וְגַם K , Z זֵרִים זֶה לְזֶה. וְאִם יִהְיוּ מִסְפָּרִים רַבִּים כֵּל שִׁיְהִי הָעוֹמְדִים בַּרְצָף בַּפְּרוֹפּוֹרְצִיָּה וְהַקִּיצוֹנִיִּים שֶׁלֵּהֶם זֵרִים זֶה לְזֶה, הֵם הַקְטָנִים בְּיוֹתֵר מִבֵּין בְּעֲלֵי אוֹתוֹ יֹחֵס כְּמוֹהֶם. לְפִיכֵךְ E , Δ , Γ וְכֵן K , Θ , H , Z הֵם הַקְטָנִים בְּיוֹתֵר מִבֵּין הַמְּסַפְּרִים בְּעֲלֵי אוֹתוֹ יֹחֵס כְּמוֹ A , B ; מִשָּׁל.

מסקנה

מכאן ברור שאם שלושה מספרים עומדים ברצף בפרופורציה והם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם, הקיצוניים שלהם הם מספרים ריבועיים; ואם הם ארבעה, הקיצוניים הם מספרים מעוקבים.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה והם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם, הקיצוניים שלהם זרים זה לזה.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים ברצף בפרופורציה והקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם. אומר אני שהקיצוניים שלהם A, Δ זרים זה לזה.

יילקחו שני מספרים E, Z , הקטנים ביותר ביחס של A, B, Γ, Δ ; שלושה מספרים H, Θ, K ; ובהמשך בכל פעם אחד נוסף, עד שמספר הנלקחים ישתווה למספרם של A, B, Γ, Δ . יילקחו ויהיו Λ, M, N, Ξ .

ומאחר ש- E, Z הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם, הם זרים זה לזה. ומאחר שכל אחד מן E, Z הכפיל את עצמו ויצר בהתאמה את H, K , וכל אחד מן H, K הכפיל את עצמו ויצר בהתאמה את Λ, Ξ , גם H, K וגם Λ, Ξ זרים זה לזה. ומאחר ש- A, B, Γ, Δ הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם, וגם Λ, M, N, Ξ הם הקטנים ביותר ובעלי אותו יחס כמו A, B, Γ, Δ , ומספרם שווה, כל אחד מן A, B, Γ, Δ שווה למתאים לו מבין Λ, M, N, Ξ . לכן A שווה ל- Λ ו- Δ שווה ל- Ξ . ו- Λ, Ξ זרים זה לזה; לפיכך גם A, Δ זרים זה לזה; מש"ל.

למצוא, ליחסים נתונים רבים ככל שיהיו המבוטאים במספרים הקטנים ביותר, מספרים עוקבים בפרופורציה שהם הקטנים ביותר ביחסים הנתונים.

יהיו היחסים הנתונים, המבוטאים במספרים הקטנים ביותר, היחס של A אל B , היחס של Γ אל Δ , ועוד היחס של E אל Z . נדרש אפוא למצוא מספרים עוקבים בפרופורציה, הקטנים ביותר ביחס של A אל B , ביחס של Γ אל Δ , ועוד ביחס של E אל Z .

יילקח H , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי B , Γ ויהי Θ נמדד על ידי A אותו מספר פעמים ש- H נמדד על ידי B , ויהי K נמדד על ידי Δ אותו מספר פעמים ש- H נמדד על ידי Γ . עתה E מודד את K או אינו מודד אותו. תחילה ימדוד אותו. יהי Λ נמדד על ידי Z אותו מספר פעמים ש- K נמדד על ידי E . ומאחר ש- A מודד את Θ אותו מספר פעמים ש- B מודד את H , כפי ש- A אל B , כך Θ אל H . מאותם טעמים כפי ש- Γ אל Δ , כך H אל K , ועוד כפי ש- E אל Z , כך K אל Λ . לפיכך Λ , H , K , Θ עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של A אל B , ביחס של Γ אל Δ , ועוד ביחס של E אל Z . אומר אני שהם גם הקטנים ביותר. שאם Λ , H , K , Θ אינם המספרים העוקבים הקטנים ביותר ביחסים של A אל B , Γ אל Δ , E אל Z , יהיו N , Ξ , M , O כאלה. ומאחר שכפי ש- A אל B , כך N אל Ξ , B ו- A מודד את B , מאותם טעמים גם Γ מודד את Ξ ; לפיכך B , Γ מודדים את Ξ , ולכן גם המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי B , Γ ימדוד את Ξ . אך H הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי B , Γ ; לכן הגדול H ימדוד את הקטן Ξ , ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך לא יהיו מספרים הקטנים מ- Λ , H , K , Θ העומדים ברצף ביחסים של A אל B , Γ אל Δ , ועוד E אל Z .

עתה אל ימדוד E את K , ויילקח M , המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי E , K . יהי כל אחד מן N , Ξ נמדד בהתאמה על ידי H , Θ אותו מספר פעמים ש- M נמדד על ידי K ; ויהי O נמדד על ידי Z אותו מספר פעמים ש- M נמדד על ידי

E. מאחר ש- Θ מודד את N אותו מספר פעמים ש- H מודד את E, כפי ש- Θ אל H, כך N אל E. אך כפי ש- Θ אל H, כך A אל B; לכן כפי ש- A אל B, כך N אל E. מאותם טעמים כפי ש- Γ אל Δ , כך E אל M. ושוב, מאחר ש- E מודד את M אותו מספר פעמים ש- Z מודד את O, כפי ש- E אל Z, כך M אל O. לפיכך N, E, M, O עומדים ברצף בפרופורציה ביחסים של A אל B, Γ אל Δ , ועוד E אל Z. אומר אני שהם גם הקטנים ביותר ביחסים AB, $\Gamma\Delta$, EZ. לא, יהיו מספרים T, S, P, Π הקטנים מ-O, E, M, N ועומדים ברצף בפרופורציה ביחסים AB, $\Gamma\Delta$, EZ. ומאחר שכפי ש- Π אל P, כך A אל B, ו-A, B הם הקטנים ביותר, B מודד את P. מאותם טעמים גם Γ מודד את P; לכן Γ , B מודדים את P, ומכאן שהמספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Γ , B ימדוד את P. אך H הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Γ , B; לכן H מודד את P. וכפי ש- H אל P, כך K אל S; לפיכך גם K מודד את S. וגם E מודד את S; לכן E, K מודדים את S, ומכאן שהמספר הקטן ביותר הנמדד על ידי E, K ימדוד את S. אך M הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי E, K; לכן הגדול M ימדוד את הקטן S, ודבר זה בלתי־אפשרי. לפיכך לא יהיו מספרים הקטנים מ-O, E, M, N ועומדים ברצף בפרופורציה ביחסים של A אל B, Γ אל Δ , ועוד E אל Z. לכן N, E, M, O הם המספרים העוקבים הקטנים ביותר ביחסים AB, $\Gamma\Delta$, EZ; מש"ל.

למספרים מישוריים יש זה אל זה יחס המורכב מיחסי צלעותיהם.

יהיו A, B מספרים מישוריים; יהיו המספרים Γ , Δ צלעותיו של A, ו-Z, E צלעותיו של B. אומר אני של-A אל B יחס המורכב מיחסי הצלעות.

ליחסים הנתונים של Γ אל E ושל Δ אל Z יילקחו המספרים העוקבים הקטנים ביותר ביחסים ΓE , ΔZ , והם Θ , H , כך שכפי ש- Γ אל E , כך H אל Θ , וכפי ש- Δ אל Z , כך Θ אל K . וכפיל Δ את E ויצור את Λ .

ומאחר ש- Δ הכפיל את Γ ויצר את A , והכפיל את E ויצר את Λ , כפי ש- Γ אל E , כך A אל Λ . אך כפי ש- Γ אל E , כך H אל Θ ; לכן כפי ש- H אל Θ , כך A אל Λ . ושוב, מאחר ש- E הכפיל את Δ ויצר את Λ , וגם הכפיל את Z ויצר את B , כפי ש- Δ אל Z , כך Λ אל B . אך כפי ש- Δ אל Z , כך Θ אל K ; לכן כפי ש- Θ אל K , כך Λ אל B . והוכח שכפי ש- H אל Θ , כך A אל Λ ; לפיכך בשוויון כפי ש- H אל K , כך A אל B . אך ל- H אל K יחס המורכב מיחסי הצלעות; לכן גם ל- A אל B יחס המורכב מיחסי הצלעות; מש"ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה, והראשון אינו מודד את השני, גם שום מספר אחר לא ימדוד שום מספר אחר מהם.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ, E , העומדים ברצף בפרופורציה, ואל ימדוד A את B . אומר אני שגם שום מספר אחר לא ימדוד שום מספר אחר מהם.

ברור ש- A, B, Γ, Δ, E אינם מודדים זה את זה ברצף, שכן A אינו מודד את B . אומר אני שגם שום מספר אחר אינו מודד שום מספר אחר. שאם אפשר, ימדוד A את Γ . יילקחו Θ, H, Z , במספר השווה למספרם של A, B, Γ , והם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ . ומאחר ש- H, Z, Θ בעלי אותו יחס כמו A, B, Γ ומספרם שווה, בשוויון כפי ש- A אל Γ , כך Z אל Θ . ומאחר שכפי ש- A אל B , כך Z אל H , ו- A אינו מודד את B , גם Z אינו מודד את H ; לפיכך Z אינו יחידה, שכן היחידה מודדת כל מספר. ו- Θ, Z זרים

זה לזה. וכפי ש־Z אל Θ , כך A אל Γ ; לכן גם A אינו מודד את Γ . בדומה נוכיח ששום מספר אחר אינו מודד שום מספר אחר מהם; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים בפרופורציה, והראשון מודד את האחרון, הוא ימדוד גם את השני.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים ברצף בפרופורציה, וימדוד A את Δ . אומר אני ש־A מודד גם את B.

שאם A אינו מודד את B, שום מספר אחר אינו מודד שום מספר אחר מהם. אך A מודד את Δ . לפיכך A מודד גם את B; מש״ל.

אם בין שני מספרים נופלים מספרים בפרופורציה רצופה, אז בין כל שני מספרים בעלי אותו יחס ייפלו בפרופורציה רצופה מספרים רבים כמספר הנופלים בין הראשונים.

בין שני המספרים A, B ייפלו Γ, Δ בפרופורציה רצופה; וייעשה כפי ש־A אל B, כך E אל Z. אומר אני שכמספר המספרים שנפלו בפרופורציה רצופה בין A, B, כך מספר המספרים שיפלו בפרופורציה רצופה בין E, Z.

יילקחו H, Θ, K, Λ , במספר השווה למספרם של A, B, Γ, Δ , והם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, Γ, Δ, B . לפיכך הקיצוניים שלהם H, Λ זרים זה לזה. ומאחר ש־A, Γ, Δ, B בעלי אותו יחס כמו H, Θ, K, Λ ומספרם שווה, בשוויון כפי ש־A אל B, כך H אל Λ . אך כפי ש־A אל B, כך E אל Z; לכן כפי ש־H אל Λ , כך E אל Z. ו־ H, Λ זרים זה לזה, ולכן הם גם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו יחס אותו מספר פעמים, הגדול את הגדול והקטן את הקטן, כלומר הקודם את הקודם והעוקב

את העוקב. לפיכך H מודד את E אותו מספר פעמים ש- Λ מודד את Z. יהי כל אחד מן Θ , K, Λ מודד בהתאמה את M, N אותו מספר פעמים ש- H מודד את E. לפיכך Λ , Θ , K, H מודדים את E, M, N, Z אותו מספר פעמים, ולכן יש להם אותו יחס. אך Λ , Θ , K, H בעלי אותו יחס כמו A, Γ , Δ ; לכן גם A, Γ , Δ , B בעלי אותו יחס כמו E, M, N, Z. ו- A , Γ , Δ , B עומדים ברצף בפרופורציה; לפיכך גם E, M, N, Z עומדים ברצף בפרופורציה. לכן כמספר המספרים שנפלו בפרופורציה רצופה בין A, B, כך מספר המספרים שנפלו בין E, Z; מש"ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה ונופלים ביניהם מספרים בפרופורציה רצופה, כמספר המספרים הנופלים ביניהם בפרופורציה רצופה כך ייפלו גם בין כל אחד מהם ובין היחידה.

יהיו A, B שני מספרים זרים זה לזה, וביניהם ייפלו Γ , Δ בפרופורציה רצופה; ותונח היחידה E. אומר אני שכמספר המספרים שנפלו בפרופורציה רצופה בין A, B, כך ייפלו גם בין כל אחד מן A, B ובין היחידה E.

יילקחו שני מספרים Z, H, הקטנים ביותר ביחס של A, Γ , Δ , B; שלושה מספרים Θ , K, Λ ; ובהמשך בכל פעם אחד נוסף, עד שמספרם ישתווה למספרם של A, Γ , Δ , B. יילקחו ויהיו M, N, Ξ , O. ברור ש- Z הכפיל את עצמו ויצר את Θ ואחר כך הכפיל את Θ ויצר את M; וכן H הכפיל את עצמו ויצר את Λ ואחר כך הכפיל את Λ ויצר את O. ומאחר ש- M , N, Ξ , O הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו Z, H, וגם A, Γ , Δ , B הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו Z, H, ומספרם שווה, כל אחד מן M, N, Ξ , O שווה למתאים לו מבין A, Γ , Δ , B. לכן M שווה ל-A ו-O שווה ל-B. ומאחר

שֶׁ־ Z הכפיל את עצמו ויצר את Z , Θ מודד את Θ כמספר היחידות שב־ Z . וגם היחידה E מודדת את Z כמספר היחידות שבו; לכן היחידה E מודדת את Z אותו מספר פעמים שֶׁ־ Z מודד את Θ . לפיכך כפי שהיחידה E אל המספר Z , כך Z אל Θ . ושוב, מאחר שֶׁ־ Z הכפיל את Θ ויצר את Θ , M מודד את M כמספר היחידות שב־ Z . וגם היחידה E מודדת את Z כמספר היחידות שבו; לכן היחידה E מודדת את Z אותו מספר פעמים שֶׁ־ Θ מודד את M . לפיכך כפי שהיחידה E אל המספר Z , כך Θ אל M . והוכח גם שכפי שהיחידה E אל Z , כך Z אל Θ ; ולכן כפי שהיחידה E אל Z , כך Z אל Θ וגם Θ אל M . אך M שווה ל־ A ; לפיכך כפי שהיחידה E אל Z , כך Z אל Θ וגם Θ אל A . מאותם טעמים כפי שהיחידה E אל המספר H , כך H אל Λ וגם Λ אל B . לכן כמספר המספרים שנפלו בפרופורציה רצופה בין A, B , כך מספר הנופלים בין כל אחד מן A, B ובין היחידה E ; מש״ל.

אם בין כל אחד משני מספרים ובין היחידה נופלים מספרים בפרופורציה רצופה, כמספר המספרים הנופלים בין כל אחד מהם ובין היחידה כך ייפלו גם בין שני המספרים עצמם.

בין כל אחד משני המספרים A, B ובין היחידה Γ ייפלו בפרופורציה רצופה המספרים E, Δ והמספרים Z, H . אומר אני שכמספר המספרים שנפלו בין כל אחד מן A, B ובין היחידה Γ , כך ייפלו גם בין A, B .

יכפיל Δ את Z ויצור את Θ ; וכל אחד מן Z, Δ יכפיל את Θ ויצור בהתאמה את K, Λ .

ומאחר שכפי שהיחידה Γ אל המספר Δ , כך Δ אל E , היחידה Γ מודדת את Δ אותו מספר פעמים שֶׁ־ Δ מודד את E . אך היחידה Γ מודדת את Δ כמספר

היחידות שב Δ ; לכן גם Δ מודד את E כמספר היחידות שב Δ , ומכאן Δ הכפיל את עצמו ויצר את E . ושוב, מאחר שכפי ש Γ אל המספר Δ , כך E אל A , היחידה Γ מודדת את Δ אותו מספר פעמים ש E מודד את A . אך היחידה Γ מודדת את Δ כמספר היחידות שב Δ ; לכן E מודד את A כמספר היחידות שב Δ , ומכאן Δ הכפיל את E ויצר את A . מאותם טעמים Z הכפיל את עצמו ויצר את H , ואחר כך הכפיל את H ויצר את B . ומאחר ש Δ הכפיל את עצמו ויצר את E , והכפיל את Z ויצר את Θ , כפי ש Δ אל Z , כך E אל Θ . מאותם טעמים כפי ש Δ אל Z , כך Θ אל H ; ולכן כפי ש E אל Θ , כך Θ אל H . ושוב, מאחר ש Δ הכפיל כל אחד מן Θ , E ויצר בהתאמה את A , K , כפי ש E אל Θ , כך A אל K . אך כפי ש E אל Θ , כך Δ אל Z ; לכן כפי ש Δ אל Z , כך A אל K . ושוב, מאחר שכל אחד מן Z , Δ הכפיל את Θ ויצר בהתאמה את Λ , K , כפי ש Δ אל Z , כך K אל Λ . אך כפי ש Δ אל Z , כך A אל K ; לכן כפי ש A אל K , כך K אל Λ . ועוד, מאחר ש Z הכפיל כל אחד מן H , Θ ויצר בהתאמה את Λ , B , כפי ש Θ אל H , כך Λ אל B . אך כפי ש Θ אל H , כך Δ אל Z ; לכן כפי ש Δ אל Z , כך Λ אל B . והוכח גם שכפי ש Δ אל Z , כך A אל K וגם K אל Λ ; לפיכך כפי ש A אל K , כך K אל Λ וגם Λ אל B . לכן A , K , Λ , B עומדים ברצף בפרופורציה. לפיכך כמספר המספרים הנופלים בפרופורציה רצופה בין כל אחד מן A , B ובין היחידה Γ , כך ייפלו גם בין A , B ; מש"ל.

בין שני מספרים ריבועיים יש ממוצע פרופורציונלי אחד, ולמספר הריבועי אל המספר הריבועי יחס כפול מן היחס של הצלע אל הצלע.

יהיו A , B מספרים ריבועיים; תהי Γ צלעו של A ו Δ צלעו של B . אומר אני שבין A , B יש ממוצע פרופורציונלי אחד, ושל Δ אל B יחס כפול מן היחס של Γ אל Δ .

יכפיל Γ את Δ ויצור את E . ומאחר ש A ריבועי וצלעו Γ , Γ הכפיל את עצמו ויצר את A . מאותם טעמים Δ הכפיל את עצמו ויצר את B . ומאחר ש Γ הכפיל כל אחד מן Δ , Γ ויצר בהתאמה את A , E , כפי ש Γ אל Δ , כך A אל E . מאותם טעמים גם כפי ש Γ אל Δ , כך E אל B . לפיכך כפי ש A אל E , כך E אל B . לכן E הוא ממוצע פרופורציונלי אחד בין A , B .

אומר אני גם של A אל B יחס כפול מן היחס של Γ אל Δ . מאחר ששלושת המספרים A , E , B עומדים בפרופורציה, ל A אל B יחס כפול מן היחס של A אל E . אך כפי ש A אל E , כך Γ אל Δ . לפיכך ל A אל B יחס כפול מן היחס של הצלע Γ אל הצלע Δ ; מש"ל.

בין שני מספרים מעוקבים יש שני ממוצעים פרופורציונליים, ולמספר המעוקב אל המספר המעוקב יחס משולש מן היחס של הצלע אל הצלע.

יהיו A , B מספרים מעוקבים; תהי Γ צלעו של A ו Δ צלעו של B . אומר אני שבין A , B יש שני ממוצעים פרופורציונליים, ושל A אל B יחס משולש מן היחס של Γ אל Δ .

יכפיל Γ את עצמו ויצור את E , ויכפיל את Δ ויצור את Z ; יכפיל Δ את עצמו ויצור את H ; וכל אחד מן Γ , Δ יכפיל את Z ויצור בהתאמה את Θ , K .

ומאחר ש A מעוקב וצלעו Γ , ו Γ הכפיל את עצמו ויצר את E , הרי Γ הכפיל את עצמו ויצר את E , ואחר כך הכפיל את E ויצר את A . מאותם טעמים Δ הכפיל את עצמו ויצר את H , ואחר כך הכפיל את H ויצר את B . ומאחר ש Γ הכפיל כל אחד מן Δ , Γ ויצר בהתאמה את E , Z , כפי ש Γ אל Δ , כך E אל Z . מאותם טעמים כפי ש Γ אל Δ , כך Z אל H . ושוב, מאחר ש Γ הכפיל כל אחד

מן E, Z ויצר בהתאמה את Θ, A , כפי ש־ E אל Z , כך A אל Θ . אך כפי ש־ E אל Z , כך Γ אל Δ ; לכן כפי ש־ Γ אל Δ , כך A אל Θ . ושוב, מאחר שכל אחד מן Γ, Δ הכפיל את Z ויצר בהתאמה את K, Θ , כפי ש־ Γ אל Δ , כך Θ אל K . ושוב, מאחר ש־ Δ הכפיל כל אחד מן Z, H ויצר בהתאמה את B, K , כפי ש־ Z אל H , כך K אל B . אך כפי ש־ Z אל H , כך Γ אל Δ ; לפיכך כפי ש־ Γ אל Δ , כך A אל Θ , Θ אל K , וגם K אל B . לכן Θ, K הם שני ממוצעים פרופורציונליים בין A, B .

אומר אני גם של־ A אל B יחס משולש מן היחס של Γ אל Δ . מאחר שארבעת המספרים B, K, Θ, A עומדים בפרופורציה, ל־ A אל B יחס משולש מן היחס של A אל Θ . אך כפי ש־ A אל Θ , כך Γ אל Δ ; לפיכך ל־ A אל B יחס משולש מן היחס של Γ אל Δ ; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה, וכל אחד מכפיל את עצמו ויוצר מספר כלשהו, המספרים הנוצרים מהם יעמדו בפרופורציה; ואם המספרים הראשונים מכפילים את הנוצרים ויוצרים מספרים כלשהם, גם אלה יעמדו בפרופורציה.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ , העומדים ברצף בפרופורציה, כפי ש־ A אל B , כך B אל Γ ; יכפילו A, B, Γ את עצמם ויצרו את E, Z, Δ , ואחר כך יכפילו את E, Z, Δ ויצרו את K, Θ, H . אומר אני שגם E, Z, Δ וגם Θ, H, K עומדים ברצף בפרופורציה.

יכפיל A את B ויצור את Λ , וכל אחד מן A, B יכפיל את Λ ויצור בהתאמה את M, N . ושוב, יכפיל B את Γ ויצור את Ξ , וכל אחד מן B, Γ יכפיל את Ξ ויצור בהתאמה את O, Π .

בדומה למה שהוכח למעלה נוכיח ש- Δ, Λ, E וכן Θ, H, M, N עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של A אל B ; ועוד ש- E, Ξ, Z וכן Θ, O, Π, K עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של B אל Γ . וכפי ש- A אל B , כך B אל Γ ; לפיכך Δ, Λ, E בעלי אותו יחס כמו E, Ξ, Z , וכן Θ, H, M, N בעלי אותו יחס כמו Θ, O, Π, K . ומספרם של Δ, Λ, E שווה למספרם של E, Ξ, Z , ומספרם של H, M, N, Θ שווה למספרם של Θ, O, Π, K ; לכן בשוויון כפי ש- Δ אל E , כך E אל Z , וכפי ש- H אל Θ , כך Θ אל K ; מש"ל.

אם מספר ריבועי מודד מספר ריבועי, גם הצלע תמדוד את הצלע; ואם הצלע מודדת את הצלע, גם המספר הריבועי ימדוד את המספר הריבועי.

יהיו A, B מספרים ריבועיים וצלעותיהם Δ, Γ ; וימדוד A את B . אומר אני שגם Γ מודד את Δ .

יכפיל Γ את Δ ויצור את E . לפיכך A, E, B עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של Γ אל Δ . ומאחר ש- A, E, B עומדים ברצף בפרופורציה ו- A מודד את B , A מודד גם את E . וכפי ש- A אל E , כך Γ אל Δ ; לכן גם Γ מודד את Δ .

עתה ימדוד Γ את Δ . אומר אני שגם A מודד את B .

ללאחר אותה בנייה נוכיח בדומה ש- A, E, B עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של Γ אל Δ . ומאחר שכפי ש- Γ אל Δ , כך A אל E , ו- Γ מודד את Δ , גם A מודד את E . ו- A, E, B עומדים ברצף בפרופורציה; לפיכך A מודד גם את B .

לפיכך, אם מספר ריבועי מודד מספר ריבועי, גם הצלע תמדוד את הצלע; ואם הצלע מודדת את הצלע, גם המספר הריבועי ימדוד את המספר הריבועי; מש"ל.

אם מספר מעוקב מודד מספר מעוקב, גם הצלע תמדוד את הצלע; ואם הצלע מודדת את הצלע, גם המספר המעוקב ימדוד את המספר המעוקב.

ימדוד המספר המעוקב A את המספר המעוקב B ; תהי Γ צלעו של A ו- Δ צלעו של B . אומר אני ש- Γ מודד את Δ .

יכפיל Γ את עצמו ויצור את E , יכפיל Δ את עצמו ויצור את H , ועוד יכפיל Γ את Δ ויצור את Z ; וכל אחד מן Δ , Γ יכפיל את Z ויצור בהתאמה את K , Θ . ברור ש- E , Z , H וכן B , K , Θ , A עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של Γ אל Δ . ומאחר ש- B , K , Θ , A עומדים ברצף בפרופורציה ו- A מודד את B , A מודד גם את Θ . וכפי ש- A אל Θ , כך Γ אל Δ ; לכן גם Γ מודד את Δ .

עתה ימדוד Γ את Δ . אומר אני שגם A ימדוד את B .

לאחר אותה בנייה נוכיח בדומה ש- B , K , Θ , A עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של Γ אל Δ . ומאחר ש- Γ מודד את Δ , וכפי ש- Γ אל Δ , כך A אל Θ , גם A מודד את Θ ; ולכן A מודד גם את B ; מש"ל.

אם מספר ריבועי אינו מודד מספר ריבועי, גם הצלע לא תמדוד את הצלע; ואם הצלע אינה מודדת את הצלע, גם המספר הריבועי לא ימדוד את המספר הריבועי.

יהיו A , B מספרים ריבועיים וצלעותיהם Δ , Γ , ואל ימדוד A את B . אומר אני שגם Γ אינו מודד את Δ .

שאם Γ מודד את Δ , גם A ימדוד את B . אך A אינו מודד את B ; לפיכך גם Γ אינו מודד את Δ .

ושוב, אל ימדוד Γ את Δ . אומר אני שגם A אינו מודד את B .

שאם A מודד את B , גם Γ ימדוד את Δ . אך Γ אינו מודד את Δ ; לפיכך גם A אינו מודד את B ; מש"ל.

אם מספר מעוקב אינו מודד מספר מעוקב, גם הצלע לא תמדוד את הצלע; ואם הצלע אינה מודדת את הצלע, גם המספר המעוקב לא ימדוד את המספר המעוקב.

אל ימדוד המספר המעוקב A את המספר המעוקב B ; תהי Γ צלעו של A ו- Δ צלעו של B . אומר אני ש- Γ אינו מודד את Δ .

שאם Γ מודד את Δ , גם A ימדוד את B . אך A אינו מודד את B ; לפיכך גם Γ אינו מודד את Δ .

עתה אל ימדוד Γ את Δ . אומר אני שגם A אינו מודד את B .

שאם A מודד את B , גם Γ ימדוד את Δ . אך Γ אינו מודד את Δ ; לפיכך גם A אינו מודד את B ; מש"ל.

בין שני מספרים מישוריים דומים יש ממוצע פרופורציונלי אחד; ולמספר המישורי אל המספר המישורי יחס כפול מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת.

יהיו A, B שני מספרים מישוריים דומים; יהיו המספרים Δ, Γ צלעותיו של A , ו- E, Z צלעותיו של B . ומאחר שמספרים מישוריים דומים הם אלה שצלעותיהם עומדות בפרופורציה, כפי ש- Γ אל Δ , כך E אל Z . אומר אני שבין

A, B יש ממוצע פרופורציונלי אחד, ושל A אל B יחס כפול מן היחס של Γ אל E או של Δ אל Z, כלומר מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת.

ומאחר שכפי ש Γ אל Δ , כך E אל Z, בחילוף כפי ש Γ אל E, כך Δ אל Z. ומאחר ש A הוא מספר מישורי וצלעותיו Δ , Γ , הכפיל את Γ ויצר את A. מאותם טעמים E הכפיל את Z ויצר את B. יכפיל Δ את E ויצור את H. ומאחר ש Δ הכפיל את Γ ויצר את A, והכפיל את E ויצר את H, כפי ש Γ אל E, כך A אל H. אך כפי ש Γ אל E, כך Δ אל Z; לכן כפי ש Δ אל Z, כך A אל H. ושוב, מאחר ש E הכפיל את Δ ויצר את H, והכפיל את Z ויצר את B, כפי ש Δ אל Z, כך H אל B. והוכח גם שכפי ש Δ אל Z, כך A אל H; לפיכך כפי ש A אל H, כך H אל B. לכן A, H, B עומדים ברצף בפרופורציה, ומכאן H הוא ממוצע פרופורציונלי אחד בין A, B.

אומר אני גם של A אל B יחס כפול מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת, כלומר מן היחס של Γ אל E או של Δ אל Z. מאחר ש A , H, B עומדים ברצף בפרופורציה, ל A אל B יחס כפול מן היחס שלו אל H. וכפי ש A אל H, כך גם Γ אל E וגם Δ אל Z. לפיכך ל A אל B יחס כפול מן היחס של Γ אל E או של Δ אל Z; מש"ל.

בין שני מספרים מוצקים דומים נופלים שני ממוצעים פרופורציונליים; ולמספר המוצק אל המספר המוצק הדומה לו יחס משולש מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת.

יהיו A, B שני מספרים מוצקים דומים; יהיו Γ , Δ , E צלעותיו של A, ו Θ , Z, H צלעותיו של B. ומאחר שמספרים מוצקים דומים הם אלה שצלעותיהם עומדות בפרופורציה, כפי ש Γ אל Δ , כך Z אל H, וכפי ש Δ אל E, כך H אל Z.

Θ. אומר אני שבין A, B נופלים שני ממוצעים פרופורציונליים, ושל A אל B יחס משולש מן היחס של Γ אל Z, של Δ אל H, ועוד של E אל Θ.

יכפיל Γ את Δ ויצור את K, ויכפיל Z את H ויצור את Λ. ומאחר ש-Γ, Δ בעלי אותו יחס כמו Z, H, ו- K נוצר מ-Γ, Δ ואילו Λ נוצר מ-Z, H, המספרים K, Λ הם מספרים מישוריים דומים; לפיכך ביניהם יש ממוצע פרופורציונלי אחד. יהי זה M. לכן M הוא המספר הנוצר מ-Z, Δ, כפי שהוכח במשפט הקודם. ומאחר ש-Δ הכפיל את Γ ויצר את K, והכפיל את Z ויצר את M, כפי ש-Γ אל Z, כך K אל M. אך כפי ש-K אל M, כך M אל Λ. לכן K, M, Λ עומדים ברצף בפרופורציה ביחס של Γ אל Z. ומאחר שכפי ש-Γ אל Δ, כך Z אל H, בחילוף כפי ש-Γ אל Z, כך Δ אל H. מאותם טעמים כפי ש-Δ אל H, כך E אל Θ. לפיכך K, M, Λ עומדים ברצף בפרופורציה הן ביחס של Γ אל Z, הן ביחס של Δ אל H, ועוד ביחס של E אל Θ. יכפיל כל אחד מן Θ, E את M ויצור בהתאמה את N, E. ומאחר ש-A הוא מספר מוצק וצלעותיו E, Δ, E הכפיל את המספר הנוצר מ-Γ, Δ ויצר את A. אך המספר הנוצר מ-Γ, Δ הוא K; לכן E הכפיל את K ויצר את A. מאותם טעמים Θ הכפיל את Λ ויצר את B. ומאחר ש-E הכפיל את K ויצר את A, וגם הכפיל את M ויצר את N, כפי ש-K אל M, כך A אל N. אך כפי ש-K אל M, כך Γ אל Δ, Z אל H, ועוד E אל Θ; לכן כפי שכל אחד מן היחסים Θ: E, Δ: H, Γ: Z, כך A אל N. ושוב, מאחר שכל אחד מן Θ, E הכפיל את M ויצר בהתאמה את N, E, כפי ש-E אל Θ, כך N אל E. אך כפי ש-E אל Θ, כך גם Γ אל Z וגם Δ אל H; לפיכך כפי שכל אחד מן היחסים Θ: E, Δ: H, Γ: Z, כך גם A אל N וגם N אל E. ושוב, מאחר ש-Θ הכפיל את M ויצר את E, וגם הכפיל את Λ ויצר את B, כפי ש-M אל Λ, כך E אל B. אך כפי ש-M אל Λ, כך גם Γ אל Δ, Z אל H, ועוד E אל

Θ. לפיכך כפי שכל אחד מן היחסים האלה, כך לא רק Ξ אל B אלא גם A אל N ו- N אל Ξ . לכן A, N, Ξ , B עומדים ברצף בפרופורציה ביחסי הצלעות האמורים.

אומר אני גם של- A אל B יחס משולש מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת, כלומר מן היחס של Γ אל Z, של Δ אל H, ועוד של E אל Θ . מאחר שארבעת המספרים A, N, Ξ , B עומדים ברצף בפרופורציה, ל- A אל B יחס משולש מן היחס של A אל N. אך הוכח שכפי ש- A אל N, כך Γ אל Δ , Z אל H, ועוד E אל Θ . לפיכך ל- A אל B יחס משולש מן היחס של צלע תואמת אל צלע תואמת, כלומר של Γ אל Z, של Δ אל H, ועוד של E אל Θ ; מש"ל.

אם בין שני מספרים נופל ממוצע פרופורציונלי אחד, המספרים יהיו מספרים מישוריים דומים.

בין שני המספרים A, B ייפול המספר Γ כממוצע פרופורציונלי אחד. אומר אני ש- A , B הם מספרים מישוריים דומים.

יילקחו Δ , E, המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו Γ , A; לפיכך Δ מודד את A אותו מספר פעמים ש- E מודד את Γ . יהי מספר היחידות שב- Z כמספר הפעמים ש- Δ מודד את A. לכן Z הכפיל את Δ ויצר את A; ומכאן A הוא מספר מישורי וצלעותיו Δ , Z, ושוב, מאחר ש- E , Δ הם המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו Γ , B, Δ מודד את Γ אותו מספר פעמים ש- E מודד את B. יהי מספר היחידות שב- H כמספר הפעמים ש- E מודד את B. לפיכך E מודד את B כמספר היחידות שב- H ; ולכן H הכפיל את E ויצר את B. מכאן B הוא מספר מישורי וצלעותיו E, H. לפיכך A, B הם מספרים מישוריים. אומר אני שהם גם דומים. מאחר ש- Z הכפיל את Δ ויצר

את A , והכפיל את E ויצר את Γ , כפי ש־ Δ אל E , כך A אל Γ , כלומר Γ אל B .
 ושוב, מאחר ש־ E הכפיל כל אחד מן H , Z ויצר את B , Γ , כפי ש־ Z אל H , כך Γ אל B . אך כפי ש־ Γ אל B , כך Δ אל E ; לפיכך כפי ש־ Δ אל E , כך Z אל H ,
 ובחילוף כפי ש־ Δ אל Z , כך E אל H . לכן A , B הם מספרים מישוריים דומים,
 שכן צלעותיהם עומדות בפרופורציה; מש"ל.

אם בין שני מספרים נופלים שני מספרים ממוצעים בפרופורציה, המספרים
 הם מספרים מוצקים דומים.

בין שני המספרים A , B ייפלו שני המספרים Γ , Δ כממוצעים בפרופורציה.
 אומר אני ש־ B , A הם מספרים מוצקים דומים.

יילקחו שלושה מספרים E , Z , H , הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A ,
 Γ , Δ . לפיכך הקיצוניים שבהם, E , H , זרים זה לזה. ומאחר שבין E , H נפל
 המספר Z כממוצע פרופורציונלי אחד, E , H הם מספרים מישוריים דומים.
 יהיו אפוא K , Θ צלעותיו של E , M , Λ צלעותיו של H . ברור מן המשפט
 הקודם ש־ E , Z , H עומדים ברצף בפרופורציה הן ביחס של Θ אל Λ והן ביחס
 של K אל M . ומאחר ש־ E , Z , H הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו
 A , Γ , Δ , ומספרם של E , Z , H שווה למספרם של A , Γ , Δ , הרי בשוויון כפי
 ש־ E אל H , כך A אל Δ . אך E , H זרים זה לזה; והזרים זה לזה הם גם הקטנים
 ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מוודים את בעלי אותו היחס להם אותו
 מספר פעמים, הגדול את הגדול והקטן את הקטן, כלומר הקודם את הקודם
 והעוקב את העוקב. לכן מודד את A אותו מספר פעמים ש־ H מודד את Δ .
 יהי מספר היחידות שב־ N כמספר הפעמים ש־ E מודד את A . לפיכך N הכפיל
 את E ויצר את A . אך E הוא המספר הנוצר מ־ K , Θ ; לכן N הכפיל את

המספר הנוצר מ־ K, Θ ויצר את A . מכאן A הוא מספר מוצק, וצלעותיו K, Θ , N . ושוב, מאחר ש־ H, Z, E הם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו Δ, Γ , B , הרי E מודד את Γ אותו מספר פעמים ש־ H מודד את B . יהי מספר היחידות שב־ E כמספר הפעמים ש־ E מודד את Γ . לפיכך H מודד את B כמספר היחידות שב־ E ; ולכן E הכפיל את H ויצר את B . אך H הוא המספר הנוצר מ־ M, Λ ; לכן E הכפיל את המספר הנוצר מ־ M, Λ ויצר את B . מכאן B הוא מספר מוצק, וצלעותיו E, M, Λ . לפיכך A, B הם מספרים מוצקים.

אומר אני שהם גם דומים. מאחר ש־ E, N הכפילו את E ויצרו בהתאמה את Γ, A , כפי ש־ N אל E , כך A אל Γ , כלומר E אל Z . אך כפי ש־ E אל Z , כך Θ אל Λ וגם K אל M ; לפיכך כפי ש־ Θ אל Λ , כך K אל M וגם N אל E . והמספרים K, N, Θ הם צלעותיו של A , ואילו E, M, Λ הם צלעותיו של B . לכן A, B הם מספרים מוצקים דומים; מש״ל.

אם שלושה מספרים עומדים ברצף בפרופורציה והראשון ריבועי, גם השלישי יהיה ריבועי.

יהיו שלושה מספרים Γ, B, A עומדים ברצף בפרופורציה, ויהי הראשון, A , ריבועי. אומר אני שגם השלישי, Γ , ריבועי.

מאחר שבין Γ, A נמצא המספר B כממוצע פרופורציונלי אחד, Γ, A הם מספרים מישוריים דומים. אך A ריבועי; לפיכך גם Γ ריבועי; מש״ל.

אם ארבעה מספרים עומדים ברצף בפרופורציה והראשון מעוקב, גם הרביעי יהיה מעוקב.

יהיו ארבעה מספרים A, B, Γ, Δ עומדים ברצף בפרופורציה, ויהי A מעוקב. אומר אני שגם Δ מעוקב.

מאחר שבין A, Δ נמצאים שני המספרים B, Γ כממוצעים בפרופורציה, A, Δ הם מספרים מוצקים דומים. אך A מעוקב; לפיכך גם Δ מעוקב; מש"ל.

אם היחס בין שני מספרים הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, והראשון ריבועי, גם השני יהיה ריבועי.

יהי היחס בין שני המספרים A, B כיחס שבין המספר הריבועי Γ למספר הריבועי Δ , ויהי A ריבועי. אומר אני שגם B ריבועי.

מאחר ש- Δ, Γ ריבועיים, הרי Δ, Γ הם מספרים מישוריים דומים. לפיכך בין Γ, Δ נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. וכפי ש- Γ אל Δ , כך A אל B ; לכן גם בין A, B נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. ו- A ריבועי; לפיכך גם B ריבועי; מש"ל.

אם היחס בין שני מספרים הוא כיחס שבין מספר מעוקב למספר מעוקב, והראשון מעוקב, גם השני יהיה מעוקב.

יהי היחס בין שני המספרים A, B כיחס שבין המספר המעוקב Γ למספר המעוקב Δ , ויהי A מעוקב. אומר אני שגם B מעוקב.

מאחר ש- Δ, Γ מעוקבים, Δ, Γ הם מספרים מוצקים דומים; לפיכך ביניהם נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. וכמספר הנופלים בין Δ, Γ ברצף בפרופורציה, כך מספר הנופלים גם בין בעלי אותו יחס להם. לכן גם בין A, B נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. ייפלו E, Z . מאחר אפוא שארבעת

המספרים A, E, Z, B עומדים ברצף בפרופורציה, ו- A מעוקב, גם B מעוקב; מש"ל.

היחס בין מספרים מישוריים דומים הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

יהיו A, B מספרים מישוריים דומים. אומר אני שהיחס בין A ל- B הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

מאחר ש- A, B הם מספרים מישוריים דומים, בין A, B נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. ייפול ויהי Γ ; ויילקחו Δ, E, Z , המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, Γ, B . לפיכך הקיצוניים שבהם, Δ, Z , ריבועיים. ומאחר שכפי ש- Δ אל Z , כך A אל B , ו- Δ, Z ריבועיים, הרי היחס בין A ל- B הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי; מש"ל.

היחס בין מספרים מוצקים דומים הוא כיחס שבין מספר מעוקב למספר מעוקב.

יהיו A, B מספרים מוצקים דומים. אומר אני שהיחס בין A ל- B הוא כיחס שבין מספר מעוקב למספר מעוקב.

מאחר ש- A, B הם מספרים מוצקים דומים, בין A, B נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. ייפלו Γ, Δ ; ויילקחו Θ, E, Z, H , המספרים הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A, Γ, Δ, B ושווים להם במספרם. לפיכך הקיצוניים שבהם, Θ, E , מעוקבים. וכפי ש- E אל Θ , כך A אל B ; לכן גם היחס בין A ל- B הוא כיחס שבין מספר מעוקב למספר מעוקב; מש"ל.

ספר ט

אם שני מספרים מישוריים דומים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה ריבועי.

יהיו A, B שני מספרים מישוריים דומים, וכפיל A את B ויצור את Γ . אומר אני ש Γ ריבועי.

יכפיל A את עצמו ויצור את Δ . לפיכך Δ ריבועי. ומאחר ש A הכפיל את עצמו ויצר את Δ , והכפיל את B ויצר את Γ , כפי ש A אל B , כך Δ אל Γ . ומאחר ש A, B הם מספרים מישוריים דומים, בין A, B נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. ואם בין שני מספרים נופלים מספרים ברצף בפרופורציה, כמספר הנופלים ביניהם כך מספר הנופלים גם בין בעלי אותו יחס להם; לכן גם בין Δ, Γ נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. ו Δ ריבועי; לפיכך גם Γ ריבועי; מש"ל.

אם שני מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר ריבועי, הם מספרים מישוריים דומים.

יהיו A, B שני מספרים, וכפיל A את B ויצור את המספר הריבועי Γ . אומר אני ש A, B הם מספרים מישוריים דומים.

יכפיל A את עצמו ויצור את Δ ; לפיכך Δ ריבועי. ומאחר ש A הכפיל את עצמו ויצר את Δ , והכפיל את B ויצר את Γ , כפי ש A אל B , כך Δ אל Γ . ומאחר ש Δ ריבועי וגם Γ ריבועי, Δ, Γ הם מספרים מישוריים דומים. לפיכך בין Δ, Γ נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. וכפי ש Δ אל Γ , כך A אל B ; לכן גם בין A, B נופל ממוצע פרופורציונלי אחד. ואם בין שני מספרים נופל ממוצע

פרופורציונלי אחד, הם מספרים מישוריים דומים; לפיכך A, B הם מספרים מישוריים דומים; מש"ל.

אם מספר מעוקב מכפיל את עצמו ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה מעוקב.

יכפיל המספר המעוקב A את עצמו ויצור את B . אומר אני ש־ B מעוקב.

תילקח Γ , צלעו של A , ויכפיל Γ את עצמו ויצור את Δ . ברור אפוא ש־ Γ הכפיל את Δ ויצר את A . ומאחר ש־ Γ הכפיל את עצמו ויצר את Δ , מודד את Δ כמספר היחידות שבו. אך גם היחידה מודדת את Γ כמספר היחידות שבו; לכן כפי שהיחידה אל Γ , כך Γ אל Δ . ושוב, מאחר ש־ Γ הכפיל את Δ ויצר את A , מודד את A כמספר היחידות שבו־ Γ . וגם היחידה מודדת את Γ כמספר היחידות שבו; לכן כפי שהיחידה אל Γ , כך Δ אל A . אך כפי שהיחידה אל Γ , כך Γ אל Δ ; לפיכך כפי שהיחידה אל Γ , כך Γ אל Δ וגם Δ אל A . לכן בין היחידה ובין המספר A נפלו Γ, Δ כשני ממוצעים ברצף בפרופורציה. ושוב, מאחר ש־ A הכפיל את עצמו ויצר את B, A מודד את B כמספר היחידות שבו. וגם היחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו; לכן כפי שהיחידה אל A , כך A אל B . אך בין היחידה ובין A נפלו שני ממוצעים בפרופורציה; לפיכך גם בין A, B ייפלו שני ממוצעים בפרופורציה. ואם בין שני מספרים נופלים שני ממוצעים בפרופורציה והראשון מעוקב, גם השני יהיה מעוקב. ו־ A מעוקב; לכן גם B מעוקב; מש"ל.

אם מספר מעוקב מכפיל מספר מעוקב ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה מעוקב.

יכפיל המספר המעוקב A את המספר המעוקב B ויצור את Γ . אומר אני ש Γ מעוקב.

יכפיל A את עצמו ויצור את Δ ; לפיכך Δ מעוקב. ומאחר ש A הכפיל את עצמו ויצר את Δ , והכפיל את B ויצר את Γ , כפי ש A אל B , כך Δ אל Γ . ומאחר ש A, B מעוקבים, A, B הם מספרים מוצקים דומים. לכן בין A, B נופלים שני ממוצעים בפרופורציה; ומכאן שגם בין Γ, Δ ייפלו שני ממוצעים בפרופורציה. ו Δ מעוקב; לפיכך גם Γ מעוקב; מש"ל.

אם מספר מעוקב מכפיל מספר כלשהו ויצר מספר מעוקב, גם המספר שהוכפל יהיה מעוקב.

יכפיל המספר המעוקב A מספר כלשהו, B , ויצור את המספר המעוקב Γ . אומר אני ש B מעוקב.

יכפיל A את עצמו ויצור את Δ ; לפיכך Δ מעוקב. ומאחר ש A הכפיל את עצמו ויצר את Δ , והכפיל את B ויצר את Γ , כפי ש A אל B , כך Δ אל Γ . ומאחר ש Γ, Δ מעוקבים, הם מספרים מוצקים דומים. לכן בין Γ, Δ נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. וכפי ש Δ אל Γ , כך A אל B ; לפיכך גם בין A, B נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. ו A מעוקב; לכן גם B מעוקב; מש"ל.

אם מספר מכפיל את עצמו ויצר מספר מעוקב, גם הוא עצמו יהיה מעוקב.

יכפיל המספר A את עצמו ויצור את המספר המעוקב B . אומר אני שגם A מעוקב.

יכפיל A את B ויצור את Γ . ומאחר ש־ A הכפיל את עצמו ויצר את B , ואחר כך הכפיל את B ויצר את Γ , Γ מעוקב. ומאחר ש־ A הכפיל את עצמו ויצר את B , B מודד את B כמספר היחידות שבו. וגם היחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו. לכן כפי שהיחידה אל A , כך A אל B . ומאחר ש־ A הכפיל את B ויצר את Γ , B מודד את Γ כמספר היחידות שבו. וגם היחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו. לכן כפי שהיחידה אל A , כך B אל Γ . אך כפי שהיחידה אל A , כך A אל B ; לפיכך כפי ש־ A אל B , כך B אל Γ . ומאחר ש־ B , Γ מעוקבים, הם מספרים מוצקים דומים. לכן בין Γ ו- B נופלים שני ממוצעים בפרופורציה. וכפי ש־ B אל Γ , כך A אל B ; לפיכך גם בין A , B ו- Γ שני ממוצעים בפרופורציה. ו־ B מעוקב; לכן גם A מעוקב; מש״ל.

אם מספר מורכב מכפיל מספר כלשהו ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה מוצק.

יכפיל המספר המורכב A מספר כלשהו, B , ויצור את Γ . אומר אני ש־ Γ מוצק.

מאחר ש־ A מורכב, מספר כלשהו ימדוד אותו. ימדוד אותו Δ , ויהי מספר היחידות שבו־ E כמספר הפעמים ש־ Δ מודד את A . מאחר אפוא ש־ Δ מודד את A כמספר היחידות שבו־ E , E הכפיל את Δ ויצר את A . ומאחר ש־ A הכפיל את B ויצר את Γ , ו־ A הוא המספר הנוצר מ־ E , Δ , הרי המספר הנוצר מ־ Δ , הכפיל את B ויצר את Γ . לפיכך Γ הוא מספר מוצק, וצלעותיו E , Δ , B ; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, השלישי מן היחידה יהיה ריבועי וכן כל אלה שביניהם מדלגים על

אחד; הרביעי יהיה מעוקב וכן כל אלה שביניהם מדלגים על שניים; והשביעי יהיה גם מעוקב וגם ריבועי וכן כל אלה שביניהם מדלגים על חמישה.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה. אומר אני שהשלישי מן היחידה, B , ריבועי, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על אחד; שהרביעי, Γ , מעוקב, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על שניים; ושהשביעי, Z , גם מעוקב וגם ריבועי, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על חמישה.

מאחר שכפי שהיחידה אל A , כך A אל B , היחידה מודדת את A אותו מספר פעמים ש- A מודד את B . והיחידה מודדת את המספר A כמספר היחידות שבו; לכן גם A מודד את B כמספר היחידות שבו- A . לפיכך A הכפיל את עצמו ויצר את B ; ומכאן B ריבועי. ומאחר ש- Γ, Δ, E, Z עומדים ברצף בפרופורציה ו- B ריבועי, גם Δ ריבועי. מאותם טעמים גם Z ריבועי. בדומה נוכיח שכל המספרים שביניהם מדלגים על אחד ריבועיים. אומר אני שגם הרביעי מן היחידה, Γ , מעוקב, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על שניים. מאחר שכפי שהיחידה אל A , כך B אל Γ , היחידה מודדת את המספר A אותו מספר פעמים ש- B מודד את Γ . והיחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו; לכן גם B מודד את Γ כמספר היחידות שבו- A ; לפיכך A הכפיל את B ויצר את Γ . ומאחר ש- A הכפיל את עצמו ויצר את B , ואחר כך הכפיל את B ויצר את Γ , הרי Γ מעוקב. ומאחר ש- Z, E, Δ, Γ עומדים ברצף בפרופורציה ו- Γ מעוקב, גם Z מעוקב. אך כבר הוכח שהוא גם ריבועי; לכן השביעי מן היחידה הוא גם מעוקב וגם ריבועי. בדומה נוכיח שכל אלה שביניהם מדלגים על חמישה הם גם מעוקבים וגם ריבועיים; מש"ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, והמספר הבא אחרי היחידה ריבועי, גם כל הנותרים יהיו ריבועיים. ואם הבא אחרי היחידה מעוקב, גם כל הנותרים יהיו מעוקבים.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, ויהי הבא אחרי היחידה, A , ריבועי. אומר אני שגם כל הנותרים יהיו ריבועיים.

כבר הוכח שהשלישי מן היחידה, B , ריבועי, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על אחד. אומר אני שגם כל הנותרים ריבועיים. מאחר ש- A, B, Γ עומדים ברצף בפרופורציה ו- A ריבועי, גם Γ ריבועי. ושוב, מאחר ש- B, Γ, Δ עומדים ברצף בפרופורציה ו- B ריבועי, גם Δ ריבועי. בדומה נוכיח שגם כל הנותרים ריבועיים.

עתה יהי A מעוקב. אומר אני שגם כל הנותרים מעוקבים.

כבר הוכח שהרביעי מן היחידה, Γ , מעוקב, וכן כל אלה שביניהם מדלגים על שניים. אומר אני שגם כל הנותרים מעוקבים. מאחר שכפי שהיחידה אל A , כך A אל B , היחידה מודדת את A אותו מספר פעמים ש- A מודד את B . והיחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו; לפיכך גם A מודד את B כמספר היחידות שבו, ולכן A הכפיל את עצמו ויצר את B . ו- A מעוקב. אך אם מספר מעוקב מכפיל את עצמו ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר מעוקב; לפיכך גם B מעוקב. ומאחר שארבעת המספרים A, B, Γ, Δ עומדים ברצף בפרופורציה ו- A מעוקב, גם Δ מעוקב. מאותם טעמים גם E מעוקב, ובדומה כל הנותרים מעוקבים; מש"ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים בפרופורציה החל מן היחידה, והבא אחרי היחידה אינו ריבועי, שום מספר אחר לא יהיה ריבועי מלבד השלישי מן היחידה וכל אלה שביניהם מדלגים על אחד. ואם הבא אחרי היחידה אינו מעוקב, שום מספר אחר לא יהיה מעוקב מלבד הרביעי מן היחידה וכל אלה שביניהם מדלגים על שניים.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, ואל יהי הבא אחרי היחידה, A , ריבועי. אומר אני ששום מספר אחר לא יהיה ריבועי מלבד השלישי מן היחידה.

שאם אפשר, יהי Γ ריבועי. גם B ריבועי; לפיכך היחס בין B ל- Γ הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי. וכפי ש- B אל Γ , כך A אל B ; לכן גם היחס בין A ל- B הוא כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, ומכאן A, B מספרים מישוריים דומים. ו- B ריבועי; לפיכך גם A ריבועי, בניגוד להנחה. לכן Γ אינו ריבועי. בדומה נוכיח ששום מספר אחר אינו ריבועי מלבד השלישי מן היחידה וכל אלה שביניהם מדלגים על אחד.

עתה אל יהי A מעוקב. אומר אני ששום מספר אחר לא יהיה מעוקב מלבד הרביעי מן היחידה וכל אלה שביניהם מדלגים על שניים.

שאם אפשר, יהי Δ מעוקב. גם Γ מעוקב, שהרי הוא הרביעי מן היחידה. וכפי ש- Γ אל Δ , כך B אל Γ ; לכן היחס בין B ל- Γ הוא כיחס שבין מספר מעוקב למספר מעוקב. ו- Γ מעוקב; לפיכך גם B מעוקב. ומאחר שכפי שהיחידה אל A , כך A אל B , והיחידה מודדת את A כמספר היחידות שבו, גם A מודדת את B כמספר היחידות שבו; לפיכך A הכפיל את עצמו ויצר את המספר המעוקב B . אך אם מספר מכפיל את עצמו ויוצר מספר מעוקב, גם הוא מעוקב; לכן גם

A מעוקב, בניגוד להנחה. לפיכך Δ אינו מעוקב. בדומה נוכיח ששום מספר אחר אינו מעוקב מלבד הרביעי מן היחידה וכל אלה שביניהם מדלגים על שניים; מש"ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, הקטן מודד את הגדול לפי אחד המספרים המצויים בסדרה הפרופורציונלית.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, B, Γ, Δ, E , העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה A. אומר אני שהקטן ביותר מבין B, Γ, Δ, E , הוא B, מודד את E לפי אחד מן Γ, Δ .

מאחר שכפי שהיחידה A אל B, כך Δ אל E, היחידה A מודדת את המספר B אותו מספר פעמים ש־ Δ מודד את E; ולחלופין, היחידה A מודדת את Δ אותו מספר פעמים ש־B מודד את E. אך היחידה A מודדת את Δ כמספר היחידות שבו; לפיכך גם B מודד את E כמספר היחידות ש־ Δ . לכן הקטן B מודד את הגדול E לפי מספר המצוי בסדרה הפרופורציונלית.

מסקנה. וברור כי המקום שיש למספר המודד מן היחידה, אותו מקום יש גם למספר שלפיו הוא מודד, החל מן המספר הנמדד ובכיוון הקודם לו; מש"ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, כל מספר ראשוני המודד את האחרון ימדוד גם את הסמוך ליחידה.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים בפרופורציה החל מן היחידה. אומר אני שכל מספר ראשוני המודד את Δ ימדוד גם את A.

ימדוד מספר ראשוני כלשהו, E , את Δ . אומר אני ש־ E מודד את A . שאם לא, ומאחר ש־ E ראשוני וכל מספר ראשוני זר לכל מספר שאינו מודד, E, A זרים זה לזה. ומאחר ש־ E מודד את Δ , ימדוד אותו לפי Z ; לפיכך E הכפיל את Z ויצר את Δ . ושוב, מאחר ש־ A מודד את Δ כמספר היחידות שב־ A , Γ הכפיל את Γ ויצר את Δ . אך גם E הכפיל את Z ויצר את Δ ; לכן המספר הנוצר מ־ A , Γ שווה למספר הנוצר מ־ Z, E . מכאן כפי ש־ A אל E , כך Z אל Γ . אך A, E זרים זה לזה, והזרים הם גם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך E מודד את Γ . ימדוד אותו לפי H ; לכן E הכפיל את H ויצר את Γ . אך לפי המשפט הקודם גם A הכפיל את B ויצר את Γ . לפיכך המספר הנוצר מ־ A, B שווה למספר הנוצר מ־ H, E . מכאן כפי ש־ A אל E , כך H אל B . ו־ A, E זרים זה לזה, ולכן הם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך E מודד את B . ימדוד אותו לפי Θ ; לכן E הכפיל את Θ ויצר את B . אך גם A הכפיל את עצמו ויצר את B . לפיכך המספר הנוצר מ־ E, Θ שווה לריבוע שעל A . מכאן כפי ש־ E אל A , כך A אל Θ . ו־ A, E זרים זה לזה, ולכן הם הקטנים ביותר; והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך E מודד את A , כקודם את הקודם. אך הונח גם שאינו מודד אותו, וזה בלתי אפשרי. לכן E, A אינם זרים זה לזה אלא מורכבים זה לזה; ומספרים המורכבים זה לזה נמדדים על ידי מודד משותף כלשהו. ומאחר שהונח כי E ראשוני, ומספר ראשוני אינו נמדד על ידי מספר אחר מלבד עצמו, E מודד את A ואת עצמו. לכן E מודד את A ; והוא מודד גם את Δ . לפיכך E מודד את A, Δ . בדומה נוכיח שכל מספר ראשוני המודד את Δ ימדוד גם את A ; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, והבא אחרי היחידה ראשוני, הגדול ביותר לא יימדד על ידי שום מספר מלבד המצויים בסדרה הפרופורציונלית.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, ויהי הבא אחרי היחידה, A , ראשוני. אומר אני שהגדול שבהם, Δ , לא יימדד על ידי שום מספר אחר מלבד A, B, Γ .

שאם אפשר, יימדד Δ על ידי E , ואל יהי E שווה לאחד מן A, B, Γ . ברור ש־ E אינו ראשוני. שאילו היה E ראשוני ומודד את Δ , היה מודד גם את A הראשוני אף שאינו שווה לו, וזה בלתי אפשרי. לכן E אינו ראשוני, ולפיכך הוא מורכב. וכל מספר מורכב נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו; לכן E נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו. אומר אני שלא יימדד על ידי שום ראשוני אחר מלבד A . שאם מספר ראשוני אחר מודד את E , ו־ E מודד את Δ , גם האחר ימדוד את Δ ; ולפיכך ימדוד גם את A הראשוני אף שאינו שווה לו, וזה בלתי אפשרי. לכן A מודד את E . ומאחר ש־ E מודד את Δ , ימדוד אותו לפי Z . אומר אני ש־ Z אינו שווה לאחד מן A, B, Γ . שאם Z שווה לאחד מהם ומודד את Δ לפי E , הרי אחד מן A, B, Γ מודד את Δ לפי E . אך אחד מן A, B, Γ מודד את Δ לפי אחד מן A, B, Γ ; לכן גם E שווה לאחד מן A, B, Γ , בניגוד להנחה. לפיכך Z אינו שווה לאחד מן A, B, Γ . בדומה נוכיח ש־ Z נמדד על ידי A : שוב נראה תחילה ש־ Z אינו ראשוני; שאילו היה ראשוני, מאחר שהוא מודד את Δ היה מודד גם את A הראשוני אף שאינו שווה לו, וזה בלתי אפשרי. לכן Z אינו ראשוני אלא מורכב, וכל מספר מורכב נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו. אומר אני שלא יימדד על ידי שום ראשוני אחר מלבד A ; שאם ראשוני אחר מודד את Z , ו־ Z מודד את Δ , גם הוא ימדוד את Δ , ולפיכך ימדוד את A

הראשוני אף שאינו שווה לו, וזה בלתי אפשרי. לכן A מודד את Z . ומאחר ש- E מודד את Δ לפי E , Z הכפיל את Z ויצר את Δ . אך גם A הכפיל את Γ ויצר את Δ ; לפיכך המספר הנוצר מ- Γ , A , שווה למספר הנוצר מ- Z , E . לכן כפי ש- A אל E , כך Z אל Γ . ו- A מודד את E ; לפיכך גם Z מודד את Γ . ימדוד אותו לפי H . בדומה נוכיח ש- H אינו שווה לאחד מן A , B ושהוא נמדד על ידי A . ומאחר ש- Z מודד את Γ לפי H , Z הכפיל את H ויצר את Γ . אך גם A הכפיל את B ויצר את Γ ; לפיכך המספר הנוצר מ- B , A , שווה למספר הנוצר מ- Z , H . לכן כפי ש- A אל Z , כך H אל B . ו- A מודד את Z ; לפיכך גם H מודד את B . ימדוד אותו לפי Θ . בדומה נוכיח ש- Θ אינו שווה ל- A . ומאחר ש- H מודד את B לפי Θ , H הכפיל את Θ ויצר את B . אך גם A הכפיל את עצמו ויצר את B ; לפיכך המספר הנוצר מ- H , Θ , שווה לריבוע שעל A . לכן כפי ש- Θ אל A , כך A אל H . ו- A מודד את H ; לפיכך גם Θ מודד את A הראשוני אף שאינו שווה לו, וזה מגוחך. לכן הגדול ביותר, Δ , לא ימדד על ידי שום מספר אחר מלבד A , B , Γ ; מש"ל.

אם המספר הקטן ביותר נמדד על ידי מספרים ראשוניים, הוא לא ימדד על ידי שום מספר ראשוני אחר מלבד המודדים אותו מלכתחילה.

יהי A המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי המספרים הראשוניים Δ , Γ , B . אומר אני ש- A לא ימדד על ידי שום מספר ראשוני אחר מלבד Δ , Γ , B .

שאם אפשר, ימדד על ידי המספר הראשוני E , ואל יהי E שווה לאחד מן B , Δ , Γ . ומאחר ש- E מודד את A , ימדוד אותו לפי Z ; לכן E הכפיל את Z ויצר את A . ו- A נמדד על ידי המספרים הראשוניים Δ , Γ , B . אך אם שני מספרים מכפילים זה את זה ויוצרים מספר כלשהו, ומספר ראשוני כלשהו מודד את

הנוצר מהם, הוא ימדוד גם אחד מן המספרים המקוריים. לפיכך Δ , Γ , B ימדדו אחד מן E , Z . את E לא ימדדו, שהרי E ראשוני ואינו שווה לאחד מן Δ , Γ , B . לכן הם מודדים את Z , הקטן מ־ A ; וזה בלתי אפשרי, שהרי הונח ש־ A הוא המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי Δ , Γ , B . לפיכך שום מספר ראשוני מלבד Δ , Γ , B לא ימדוד את A ; מש״ל.

אם שלושה מספרים עומדים ברצף בפרופורציה והם הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם, סכומם של כל שניים מהם זר למספר הנותר.

יהיו Δ , B , Γ שלושה מספרים העומדים ברצף בפרופורציה והקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמוהם. אומר אני שסכומם של כל שניים מבין Δ , B , Γ זר למספר הנותר: סכום A , B זר ל־ Γ ; סכום B , Γ זר ל־ A ; ועוד סכום A , Γ זר ל־ B .

יילקחו שני המספרים ΔE , EZ , הקטנים ביותר מבין בעלי אותו יחס כמו A , B , Γ . ברור ש־ ΔE הכפיל את עצמו ויצר את A , הכפיל את EZ ויצר את B , ועוד EZ הכפיל את עצמו ויצר את Γ . ומאחר ש־ ΔE , EZ הם הקטנים ביותר, הם זרים זה לזה. ואם שני מספרים זרים זה לזה, גם סכומם זר לכל אחד מהם; לכן ΔZ זר לכל אחד מן ΔE , EZ . אך גם ΔE זר ל־ EZ ; לפיכך ΔE , ΔZ שניהם זרים ל־ EZ . ואם שני מספרים זרים למספר כלשהו, גם המספר הנוצר מהם זר למספר הנותר; לכן המספר הנוצר מ־ ΔE , ΔZ זר ל־ EZ , ולפיכך הוא זר גם לריבוע שעל EZ . אך המספר הנוצר מ־ ΔE , ΔZ הוא הריבוע שעל ΔE יחד עם המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ . לפיכך הריבוע שעל ΔE יחד עם המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ זר לריבוע שעל EZ . והריבוע שעל ΔE הוא A , המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ הוא B , והריבוע שעל EZ הוא Γ ; לפיכך סכום A , B זר ל־ Γ . בדומה

נוכיח שגם סכום Γ , B זר ל־A. אומר אני שגם סכום Γ , A זר ל־B. מאחר ש־ ΔZ זר לכל אחד מן ΔE , EZ, גם הריבוע שעל ΔZ זר למספר הנוצר מ־ ΔE , EZ. אך הריבוע שעל ΔZ שווה לסכום הריבועים שעל ΔE , EZ יחד עם פעמיים המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ; לכן סכום הריבועים שעל ΔE , EZ יחד עם פעמיים המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ זר למספר הנוצר מ־ ΔE , EZ. בחיסור, סכום הריבועים שעל ΔE , EZ יחד עם פעם אחת המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ זר למספר הנוצר מ־ ΔE , EZ; ובחיסור נוסף, סכום הריבועים שעל ΔE , EZ זר למספר הנוצר מ־ ΔE , EZ. והריבוע שעל ΔE הוא A, המספר הנוצר מ־ ΔE , EZ הוא B, והריבוע שעל EZ הוא Γ . לפיכך סכום Γ , A זר ל־B; מש״ל.

אם שני מספרים זרים זה לזה, לא יהיה כפי שהראשון אל השני כך השני אל מספר אחר כלשהו.

יהיו A, B שני מספרים זרים זה לזה. אומר אני שלא יהיה כפי ש־A אל B כך B אל מספר אחר כלשהו.

שאם אפשר, יהי כפי ש־A אל B, כך B אל Γ . אך A, B זרים זה לזה; והזרים הם גם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך A מודד את B, כקודם את הקודם. והוא מודד גם את עצמו; לכן A מודד את A, B הזרים זה לזה, וזה מגוחך. לפיכך לא יהיה כפי ש־A אל B כך B אל Γ ; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה והקיצוניים שלהם זרים זה לזה, לא יהיה כפי שהראשון אל השני כך האחרון אל מספר אחר כלשהו.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, A, B, Γ, Δ , העומדים ברצף בפרופורציה, ויהיו הקיצוניים שלהם, A, Δ , זרים זה לזה. אומר אני שלא יהיה כפי ש־ A אל B כך Δ אל מספר אחר כלשהו.

שאם אפשר, יהי כפי ש־ A אל B , כך Δ אל E ; ולחלופין, כפי ש־ A אל Δ , כך B אל E . אך A, Δ זרים זה לזה; והזרים הם גם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך A מודד את B . וכפי ש־ A אל B , כך B אל Γ ; לכן גם B מודד את Γ , ומכאן A מודד את Γ . ומאחר שכפי ש־ B אל Γ , כך Γ אל Δ , ו־ B מודד את Γ , גם Γ מודד את Δ . אך A מדד את Γ ; לפיכך A מודד גם את Δ . והוא מודד גם את עצמו; לכן A מודד את Δ, A הזרים זה לזה, וזה בלתי אפשרי. לפיכך לא יהיה כפי ש־ A אל B כך Δ אל מספר אחר כלשהו; מש״ל.

בהינתן שני מספרים, לבדוק אם אפשר למצוא להם מספר שלישי בפרופורציה.

יהיו A, B שני המספרים הנתונים, ויהיה נדרש לבדוק אם אפשר למצוא להם מספר שלישי בפרופורציה.

המספרים A, B זרים זה לזה או שאינם. ואם הם זרים זה לזה, כבר הוכח שאי אפשר למצוא להם מספר שלישי בפרופורציה.

עתה אל יהיו A, B זרים זה לזה, וכפיל B את עצמו ויצור את Γ . אז A מודד את Γ או שאינו מודד אותו. תחילה ימדוד אותו לפי Δ ; לפיכך A הכפיל את Δ ויצר את Γ . אך גם B הכפיל את עצמו ויצר את Γ ; לכן המספר הנוצר מ־ Δ, A ,

שווה לריבוע שעל B . מכאן כפי ש־ A אל B , כך B אל Δ ; לפיכך נמצא ל־ A, B המספר השלישי בפרופורציה, Δ .

עתה אל ימדוד A את Γ . אומר אני שאי אפשר למצוא ל־ A, B מספר שלישי בפרופורציה. שאם אפשר, ימצא Δ . לפיכך המספר הנוצר מ־ Δ , A שווה לריבוע שעל B . אך הריבוע שעל B הוא Γ ; לכן המספר הנוצר מ־ Δ , A שווה ל־ Γ . מכאן A הכפיל את Δ ויצר את Γ ; לפיכך A מודד את Γ לפי Δ . אך הונח גם שאינו מודד אותו, וזה מגוחך. לכן אי אפשר למצוא ל־ A, B מספר שלישי בפרופורציה כאשר A אינו מודד את Γ ; מש״ל.

בהינתן שלושה מספרים, לבדוק מתי אפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה.

יהיו A, B, Γ שלושת המספרים הנתונים, ויהיה נדרש לבדוק מתי אפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה.

הרי אחת מארבע אפשרויות מתקיימת: או שאינם עומדים ברצף בפרופורציה והקיצוניים שלהם זרים זה לזה; או שהם עומדים ברצף בפרופורציה והקיצוניים שלהם אינם זרים זה לזה; או שאינם עומדים ברצף בפרופורציה וגם הקיצוניים שלהם אינם זרים זה לזה; או שהם עומדים ברצף בפרופורציה והקיצוניים שלהם זרים זה לזה.

אם A, B, Γ עומדים ברצף בפרופורציה והקיצוניים שלהם, A, Γ , זרים זה לזה, כבר הוכח שאי אפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה. עתה אל יעמדו A, B, Γ ברצף בפרופורציה, ושוב יהיו הקיצוניים זרים זה לזה. אומר אני שגם כך אי אפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה. שאם אפשר, ימצא Δ כך

שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ ; וייעשה כפי ש־ B אל Γ , כך Δ אל E . ומאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , וכפי ש־ B אל Γ , כך Δ אל E , הרי בשוויון כפי ש־ A אל Γ , כך Γ אל E . אך A , Γ זרים זה לזה; והזרים הם גם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב. לפיכך A מודד את Γ , כקודם את הקודם. והוא מודד גם את עצמו; לכן A מודד את Γ , A הזרים זה לזה, וזה בלתי אפשרי. לפיכך אי אפשר למצוא ל־ A , B , Γ מספר רביעי בפרופורציה.

עתה שוב יעמדו A , B , Γ ברצף בפרופורציה, ואל יהיו A , Γ זרים זה לזה. אומר אני שאפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה. יכפיל B את Γ ויצור את Δ . אז A מודד את Δ או שאינו מודד אותו. תחילה ימדוד אותו לפי E ; לפיכך A הכפיל את E ויצר את Δ . אך גם B הכפיל את Γ ויצר את Δ ; לכן המספר הנוצר מ־ E , A שווה למספר הנוצר מ־ Γ , B . מכאן כפי ש־ A אל B , כך Γ אל E ; לפיכך נמצא ל־ A , B , Γ המספר הרביעי בפרופורציה, E .

עתה אל ימדוד A את Δ . אומר אני שאי אפשר למצוא ל־ A , B , Γ מספר רביעי בפרופורציה. שאם אפשר, יימצא E ; לפיכך המספר הנוצר מ־ E , A שווה למספר הנוצר מ־ Γ , B . אך המספר הנוצר מ־ Γ , B הוא Δ ; לכן גם המספר הנוצר מ־ E , A שווה ל־ Δ . מכאן A הכפיל את E ויצר את Δ , ולפיכך A מודד את Δ לפי E . אך הוא גם אינו מודד אותו, וזה מגוחך. לכן אי אפשר למצוא ל־ A , B , Γ מספר רביעי בפרופורציה כאשר A אינו מודד את Δ . עתה אל יעמדו A , B , Γ ברצף בפרופורציה, וגם אל יהיו הקיצוניים זרים זה לזה; ויכפיל B את Γ ויצור את Δ . בדומה יוכח שאם A מודד את Δ אפשר למצוא להם מספר רביעי בפרופורציה, ואם אינו מודד — אי אפשר; מש״ל.

המספרים הראשוניים רבים מכל ריבוי נתון של מספרים ראשוניים.

יהיו A, B, Γ המספרים הראשוניים הנתונים. אומר אני שיש מספרים ראשוניים רבים יותר מן A, B, Γ .

יילקח המספר הקטן ביותר הנמדד על ידי A, B, Γ , ויהי ΔE ; ותתווסף אל ΔE היחידה ΔZ . המספר EZ הוא ראשוני או שאינו. תחילה יהי ראשוני; לפיכך נמצאו המספרים הראשוניים A, B, Γ, EZ , הרבים מן A, B, Γ .

עתה אל יהי EZ ראשוני; לפיכך הוא נמדד על ידי מספר ראשוני כלשהו. יימדד על ידי המספר הראשוני H . אומר אני ש- H אינו שווה לאחד מן A, B, Γ . שאם אפשר, יהי שווה לאחד מהם. אך A, B, Γ מודדים את ΔE ; לפיכך גם H ימדוד את ΔE . והוא מודד גם את EZ ; לכן H , בהיותו מספר, ימדוד גם את השארית, היחידה ΔZ , וזה מגוחך. לפיכך H אינו שווה לאחד מן A, B, Γ . והונח שהוא ראשוני. לכן נמצאו המספרים הראשוניים A, B, Γ, H , הרבים מן הריבוי הנתון A, B, Γ ; מש"ל.

אם מחברים מספרים זוגיים רבים ככל שיהיו, השלם זוגי.

יחברו מספרים זוגיים רבים ככל שיהיו, $\Delta E, \Gamma\Delta, B\Gamma, AB$. אומר אני שהשלם AE זוגי.

מאחר שכל אחד מן $\Delta E, \Gamma\Delta, B\Gamma, AB$ זוגי, החצי הוא חלק שלו; ולכן גם בשלם AE החצי הוא חלק שלו. ומספר זוגי הוא הנחלק לשני חלקים שווים; לפיכך AE זוגי; מש"ל.

אם מחברים מספרים אי־זוגיים רבים ככל שיהיו ומספרם זוגי, השלם יהיה זוגי.

יחברו מספרים אי־זוגיים רבים ככל שיהיו ומספרם זוגי, $AB, BF, \Gamma A, \Delta E$.
אומר אני שהשלם AE זוגי.

מאחר שכל אחד מן $AB, BF, \Gamma A, \Delta E$ אי־זוגי, אם תיגרע יחידה מכל אחד מהם, כל אחת מן השאריות תהיה זוגית; ולכן גם הסכום שלהן יהיה זוגי. וגם מספר היחידות זוגי. לפיכך גם השלם AE זוגי; מש"ל.

אם מחברים מספרים אי־זוגיים רבים ככל שיהיו ומספרם אי־זוגי, גם השלם יהיה אי־זוגי.

יחברו מספרים אי־זוגיים רבים ככל שיהיו ומספרם אי־זוגי, $AB, BF, \Gamma A$.
אומר אני שגם השלם AD אי־זוגי.

תיגרע מן ΓA היחידה ΔE ; לפיכך השארית ΓE זוגית. וגם ΓA זוגי; ולכן השלם AE זוגי. ו־ ΔE יחידה; לפיכך AD אי־זוגי; מש"ל.

אם גורעים מספר זוגי ממספר זוגי, השארית תהיה זוגית.

ייגרע המספר הזוגי BF מן המספר הזוגי AB . אומר אני שהשארית ΓA זוגית.

מאחר ש־ AB זוגי, החצי הוא חלק שלו. מאותם טעמים גם ב־ BF החצי הוא חלק שלו; לפיכך גם השארית AF זוגית; מש"ל.

אם גורעים מספר אי־זוגי ממספר זוגי, השארית תהיה אי־זוגית.

ייגרע המספר האי־זוגי BF מן המספר הזוגי AB . אומר אני שהשארית ΓA אי־זוגית.

תיגרע מן $B\Gamma$ היחידה $\Gamma\Delta$; לפיכך ΔB זוגי. וגם AB זוגי; לכן השארית $A\Delta$ זוגית. ו־ $\Gamma\Delta$ יחידה; לפיכך ΓA אי־זוגי; מש״ל.

אם גורעים מספר אי־זוגי ממספר אי־זוגי, השארית תהיה זוגית.

ייגרע המספר האי־זוגי $B\Gamma$ מן המספר האי־זוגי AB . אומר אני שהשארית ΓA זוגית.

מאחר ש־ AB אי־זוגי, תיגרע ממנו היחידה $B\Delta$; לפיכך השארית $A\Delta$ זוגית. מאותם טעמים גם $\Gamma\Delta$ זוגי; ולכן גם השארית ΓA זוגית; מש״ל.

אם גורעים מספר זוגי ממספר אי־זוגי, השארית תהיה אי־זוגית.

ייגרע המספר הזוגי $B\Gamma$ מן המספר האי־זוגי AB . אומר אני שהשארית ΓA אי־זוגית.

תיגרע היחידה $A\Delta$; לפיכך ΔB זוגי. וגם $B\Gamma$ זוגי; לכן השארית $\Gamma\Delta$ זוגית. לפיכך ΓA אי־זוגי; מש״ל.

אם מספר אי־זוגי מכפיל מספר זוגי ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה זוגי.

יכפיל המספר האי־זוגי A את המספר הזוגי B ויצור את Γ . אומר אני ש־ Γ זוגי.

מאחר ש־ A הכפיל את B ויצר את Γ , מורכב ממספרים השווים ל־ B , שמספרם כמספר היחידות שב־ A . ו־ B זוגי; לפיכך Γ מורכב ממספרים זוגיים. ואם מחברים מספרים זוגיים רבים ככל שיהיו, השלם זוגי. לכן Γ זוגי; מש״ל.

אם מספר אי־זוגי מכפיל מספר אי־זוגי ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה אי־זוגי.

כפיל המספר האי־זוגי A את המספר האי־זוגי B ויצור את Γ . אומר אני ש־ Γ אי־זוגי.

מאחר ש־ A הכפיל את B ויצר את Γ , מורכב ממספרים השווים ל־ B , שמספרם כמספר היחידות שב־ A . וכל אחד מן A , B אי־זוגי; לפיכך Γ מורכב ממספרים אי־זוגיים שמספרם אי־זוגי. לכן Γ אי־זוגי; מש״ל.

אם מספר אי־זוגי מודד מספר זוגי, הוא ימדוד גם את חציו.

ימדוד המספר האי־זוגי A את המספר הזוגי B . אומר אני שהוא ימדוד גם את חציו.

מאחר ש־ A מודד את B , ימדוד אותו לפי Γ . אומר אני ש־ Γ אינו אי־זוגי. שאם אפשר, יהי אי־זוגי. ומאחר ש־ A מודד את B לפי A , Γ הכפיל את Γ ויצר את B . לפיכך B מורכב ממספרים אי־זוגיים שמספרם אי־זוגי, ולכן B אי־זוגי; וזה מגוחך, שהרי הונח שהוא זוגי. לפיכך Γ אינו אי־זוגי, ולכן הוא זוגי. מכאן A מודד את B מספר זוגי של פעמים, ומשום כך ימדוד גם את חציו; מש״ל.

אם מספר אי־זוגי זר למספר כלשהו, הוא יהיה זר גם לכפולו.

יהי המספר האי־זוגי A זר למספר כלשהו, B , ויהי Γ כפולו של B . אומר אני ש־ A זר ל־ Γ .

שאם אינם זרים זה לזה, מספר כלשהו ימדוד את שניהם. ימדוד אותם ויהי Δ . ומאחר ש־ A אי־זוגי, גם Δ אי־זוגי. ומאחר ש־ Δ , בהיותו אי־זוגי, מודד את Γ ,

Γ זוגי, הוא ימדוד גם את חציו של Γ . אך חציו של Γ הוא B ; לכן Δ מודד את B . והוא מודד גם את A . לפיכך Δ מודד את A, B הזרים זה לזה, וזה בלתי אפשרי. לכן אין זה נכון ש- A אינו זר ל- Γ ; לפיכך Γ, A זרים זה לזה; מש"ל.

כל אחד מן המספרים המוכפלים בזה אחר זה החל מן הזוג הוא זוגי פעמים זוגי בלבד.

יוכפלו בזה אחר זה מספרים רבים ככל שיהיו, Δ, Γ, B , החל מן הזוג A . אומר אני ש- Δ, Γ, B הם זוגיים פעמים זוגיים בלבד.

ברור שכל אחד מהם זוגי פעמים זוגי, שהרי הוא הוכפל החל מן הזוג. אומר אני שהוא גם כזה בלבד. תונח היחידה. ומאחר שמספרים רבים ככל שיהיו עומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, והבא אחרי היחידה, A , ראשוני, הגדול שב- Δ, Γ, B, A , הוא Δ , לא יימדד על ידי שום מספר אחר מלבד Γ, B, A . וכל אחד מן Γ, B, A זוגי; לפיכך Δ זוגי פעמים זוגי בלבד. בדומה נוכיח שכל אחד מן Γ, B זוגי פעמים זוגי בלבד; מש"ל.

אם למספר יש חצי אי-זוגי, הוא זוגי פעמים אי-זוגי בלבד.

יהי למספר A חצי אי-זוגי. אומר אני ש- A זוגי פעמים אי-זוגי בלבד.

ברור שהוא זוגי פעמים אי-זוגי, שכן חציו, בהיותו אי-זוגי, מודד אותו מספר זוגי של פעמים. אומר אני שהוא גם כזה בלבד. שאם A יהיה גם זוגי פעמים זוגי, הוא יימדד על ידי מספר זוגי מספר זוגי של פעמים; ולכן גם חציו, בהיותו אי-זוגי, יימדד על ידי מספר זוגי, וזה מגוחך. לפיכך A זוגי פעמים אי-זוגי בלבד; מש"ל.

אם מספר אינו מן המספרים המוכפלים בזה אחר זה החל מן הזוג וגם אין לו חצי אי־זוגי, הוא גם זוגי פעמים זוגי וגם זוגי פעמים אי־זוגי.

יהי המספר A לא מן המספרים המוכפלים בזה אחר זה החל מן הזוג, וגם אל יהי חציו אי־זוגי. אומר אני ש־ A גם זוגי פעמים זוגי וגם זוגי פעמים אי־זוגי.

ברור ש־ A זוגי פעמים זוגי, שהרי חציו אינו אי־זוגי. אומר אני שהוא גם זוגי פעמים אי־זוגי. שאם נחלק את A לשני חלקים שווים, ואת חציו שוב לשני חלקים שווים, ונעשה זאת תמיד, נגיע למספר אי־זוגי כלשהו שימדוד את A מספר זוגי של פעמים. שאם לא, נגיע אל הזוג, ואז A יהיה מן המספרים המוכפלים בזה אחר זה החל מן הזוג, בניגוד להנחה. לפיכך A זוגי פעמים אי־זוגי. וכבר הוכח שהוא גם זוגי פעמים זוגי. לכן A גם זוגי פעמים זוגי וגם זוגי פעמים אי־זוגי; מש״ל.

אם יהיו מספרים רבים ככל שיהיו העומדים ברצף בפרופורציה, ומן השני ומן האחרון נגרעים מספרים השווים לראשון, יהיה כפי שעודף השני אל הראשון, כך עודף האחרון אל כל המספרים שלפניו.

יהיו מספרים רבים ככל שיהיו, $A, B\Gamma, \Delta, EZ$, העומדים ברצף בפרופורציה, החל מן הקטן ביותר A ; ומן $B\Gamma$ ומן EZ יגרעו בהתאמה $BH, Z\Theta$, שכל אחד מהם שווה ל־ A . אומר אני שכפי ש־ $H\Gamma$ אל A , כך $E\Theta$ אל $B\Gamma, \Delta$ יחד.

יונח ZK שווה ל־ $B\Gamma$, ו־ ZA שווה ל־ Δ . ומאחר ש־ ZK שווה ל־ $B\Gamma$, אשר מתוכם $Z\Theta$ שווה ל־ BH , השארית ΘK שווה לשארית $H\Gamma$. ומאחר שכפי ש־ EZ אל Δ , כך Δ אל $B\Gamma$ וגם $B\Gamma$ אל A , ואילו Δ שווה ל־ $B\Gamma$, ZA שווה ל־ ZK ו־ A שווה ל־ $Z\Theta$, הרי כפי ש־ EZ אל ZA , כך ΛZ אל ZK וגם ZK אל

$Z\Theta$. בהפרדה, כפי ש- $E\Lambda$ אל ΛZ , כך ΛK אל ZK וגם $K\Theta$ אל $Z\Theta$. ולפיכך, כפי שאחד מן הקודמים אל אחד מן העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד; לכן כפי ש- $K\Theta$ אל $Z\Theta$, כך $E\Lambda$, ΛK , $K\Theta$ יחד אל ΛZ , ZK , ΘZ יחד. אך $K\Theta$ שווה ל- $Z\Theta$, ΓH שווה ל- A , ו- ΘZ , ZK , ΛZ שווים בהתאמה ל- Δ , $B\Gamma$, A . לפיכך כפי ש- ΓH אל A , כך $E\Theta$ אל A , $B\Gamma$, Δ יחד. לכן כפי שעודף השני אל הראשון, כך עודף האחרון אל כל המספרים שלפניו; מש"ל.

אם ייפרשו מספרים רבים ככל שיהיו ברצף בפרופורציה כפולה החל מן היחידה, עד שסכומם נעשה ראשוני, והסכום כולו מכפיל את האחרון ויוצר מספר כלשהו, המספר הנוצר יהיה משוכלל.

ייפרשו מספרים רבים ככל שיהיו, Δ , Γ , B , A , בפרופורציה כפולה החל מן היחידה, עד שסכומם כולו נעשה ראשוני; ויהי E שווה לסכום כולו, ויכפיל E את Δ ויצור את ZH . אומר אני ש- ZH משוכלל.

כמספרם של Δ , Γ , B , A , כך יילקחו החל מ- E המספרים Λ , ΘK , M בפרופורציה כפולה. לפיכך בשוויון כפי ש- A אל Δ , כך E אל M . לכן המספר הנוצר מ- Δ , E שווה למספר הנוצר מ- Λ , M . והמספר הנוצר מ- Δ , E הוא ZH ; לפיכך גם המספר הנוצר מ- A , M הוא ZH . לכן A הכפיל את M ויצר את ZH , ומכאן M מווד את ZH כמספר היחידות שב- A . ו- A הוא הזוג; לפיכך ZH כפול מ- M . וגם E , ΘK , Λ , M כפולים זה מזה ברצף; לכן E , ΘK , Λ , M , ZH עומדים ברצף בפרופורציה כפולה. עתה מן השני, ΘK , ומן האחרון, ZH , ייגרעו בהתאמה ZE , ΘN , שכל אחד מהם שווה לראשון, E . לפיכך כפי שעודף המספר השני אל הראשון, כך עודף האחרון אל כל המספרים שלפניו. לכן כפי ש- NK אל E , כך ΞH אל E , $K\Theta$, Λ , M יחד. ו- NK שווה ל- E ; לפיכך

גם ΞH שווה ל־ E , ΘK , Λ , M יחד. וגם ΞE שווה ל־ E , ואילו E שווה ל־ A, B , Γ , Δ וליחידה יחד. לפיכך השלם ZH שווה הן ל־ $M, \Lambda, \Theta K, E$ יחד והן ל־ A, B, Γ, Δ וליחידה יחד; והוא נמדד על ידיהם. אומר אני ש־ ZH לא יימדד על ידי שום מספר אחר מלבד $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ והיחידה. שאם אפשר, ימדוד מספר כלשהו O את ZH , ואל יהי O שווה לאחד מן $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$. ויהי מספר היחידות ש־ Π כמספר הפעמים ש־ O מודד את ZH ; לפיכך Π הכפיל את O ויצר את ZH . אך גם E הכפיל את Δ ויצר את ZH ; לכן כפי ש־ E אל Π , כך O אל Δ . ומאחר ש־ A, B, Γ, Δ עומדים ברצף בפרופורציה החל מן היחידה, Δ לא יימדד על ידי שום מספר אחר מלבד A, B, Γ . והונח ש־ O אינו שווה לאחד מן A, B, Γ ; לכן O אינו מודד את Δ . אך כפי ש־ O אל Δ , כך E אל Π ; לפיכך גם E אינו מודד את Π . ו־ E ראשוני; וכל מספר ראשוני זר לכל מספר שאינו מודד. לכן E, Π זרים זה לזה. והזרים הם גם הקטנים ביותר, והמספרים הקטנים ביותר מודדים את בעלי אותו היחס להם אותו מספר פעמים, הקודם את הקודם והעוקב את העוקב; וכפי ש־ E אל Π , כך O אל Δ . לפיכך E מודד את O אותו מספר פעמים ש־ Π מודד את Δ . אך Δ אינו נמדד על ידי שום מספר אחר מלבד A, B, Γ ; לכן Π שווה לאחד מן A, B, Γ . יהי שווה ל־ B, Γ, Δ וכמספרם של B, Γ, Δ , כך יילקחו החל מ־ E המספרים $E, \Theta K, \Lambda$ והמספרים $E, \Theta K, \Lambda$ נמצאים באותו יחס כמו B, Γ, Δ ; לפיכך בשוויון כפי ש־ B אל Δ , כך E אל Λ . לכן המספר הנוצר מ־ Λ, B שווה למספר הנוצר מ־ Δ, E . אך המספר הנוצר מ־ E, Δ שווה למספר הנוצר מ־ O, Π ; לפיכך גם המספר הנוצר מ־ O, Π שווה למספר הנוצר מ־ Λ, B . מכאן כפי ש־ Π אל B , כך Λ אל O . ו־ Π שווה ל־ B ; לפיכך גם Λ שווה ל־ O , וזה בלתי אפשרי, שהרי הונח ש־ O אינו שווה לאחד המספרים שנפרשו. לכן שום מספר מלבד $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ והיחידה אינו מודד את ZH . וכבר הוכח ש־ ZH שווה ל־ A, B, Γ, Δ

$E, \Theta K, \Lambda, M$ וליחידה יחד. ומספר משוכלל הוא מספר השווה לחלקיו שלו;
לפיכך ZH משוכלל; מש"ל.

גדלים הנמדדים באותה מידה נקראים בני־מידה; וגדלים ששום מידה משותפת אינה יכולה להיות להם נקראים חסרי־מידה.

קווים ישרים הם בני־מידה בריבוע כאשר הריבועים שעליהם נמדדים על ידי אותו שטח; והם חסרי־מידה בריבוע כאשר שום שטח אינו יכול להיות מידה משותפת לריבועים שעליהם.

בהנחות אלה מוכח כי ביחס לקו ישר נתון יש קווים ישרים רבים לאין שיעור, בני־מידה וחסרי־מידה בהתאמה, מהם באורך בלבד ומהם גם בריבוע. לכן ייקרא הקו הישר הנתון רציונלי; והקווים בני־המידה עמו, בין באורך ובריבוע ובין בריבוע בלבד, ייקראו רציונליים; ואילו הקווים חסרי־המידה עמו ייקראו אי־רציונליים.

והריבוע שעל הקו הישר הנתון ייקרא רציונלי, והשטחים בני־המידה עמו ייקראו רציונליים, ואילו השטחים חסרי־המידה עמו ייקראו אי־רציונליים; וגם הקווים שהריבועים שעליהם שווים לשטחים אלה ייקראו אי־רציונליים: אם השטחים ריבועים — הצלעות עצמן; ואם הם צורות קוויות אחרות כלשהן — הקווים שעליהם מתוארים ריבועים השווים להן.

בהינתן שני גדלים לא־שווים, אם מן הגדול נגרע יותר מחציו, ומן הנשאר נגרע יותר מחציו, והדבר נעשה תמיד, יישאר גודל כלשהו שיהיה קטן מן הגודל הקטן הנתון.

יהיו Γ , AB שני גדלים לא־שווים, ויהי AB הגדול מהם. אומר אני שאם מן AB נגרע יותר מחציו, ומן הנשאר נגרע יותר מחציו, והדבר נעשה תמיד, יישאר גודל כלשהו שיהיה קטן מן הגודל Γ .

שהרי Γ , כאשר מרבים אותו, יהיה בשלב כלשהו גדול מ־ AB . יורבה אפוא, ויהי ΔE גודל שהוא כפולה של Γ וגדול מ־ AB ; ויחולק ΔE לחלקים ΔZ , ZH , HE השווים ל־ Γ . ומן AB ייגרע $B\Theta$ הגדול מחציו, ומן $A\Theta$ ייגרע ΘK הגדול מחציו, והדבר ייעשה תמיד עד שמספר החלוקות שב־ AB יהיה שווה למספר החלוקות שב־ ΔE .

יהיו אפוא החלוקות ΘB , $K\Theta$, AK שוות במספרן לחלוקות HE , ZH , ΔZ . ומאחר ש־ ΔE גדול מ־ AB , ומן ΔE נגרע EH הקטן מחציו ואילו מן AB נגרע $B\Theta$ הגדול מחציו, השארית HA גדולה מן השארית ΘA . ומאחר ש־ HA גדול מ־ ΘA , ומ־ HA נגרע חציו HZ ואילו מ־ ΘA נגרע ΘK הגדול מחציו, השארית ΔZ גדולה מן השארית AK . אך ΔZ שווה ל־ Γ ; לפיכך גם Γ גדול מ־ AK . לכן AK קטן מ־ Γ .

לפיכך מן הגודל AB נשאר הגודל AK , הקטן מן הגודל הקטן הנתון Γ ; מש״ל. ובדומה יוכח הדבר גם אם הגדלים הנגרעים הם חצאים.

אם בשני גדלים לא־שווים, כאשר הקטן נגרע תמיד בחיסור חוזר מן הגדול, השארית לעולם אינה מודדת את הקודמת לה, הגדלים יהיו חסרי־מידה.

יהיו Γ , AB שני גדלים לא־שווים; וכאשר הקטן AB נגרע תמיד בחיסור חוזר מן הגדול, אל תמדוד השארית לעולם את הקודמת לה. אומר אני שהגדלים AB , Γ חסרי־מידה.

שאם הם בני־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם, אם אפשר, ויהי E . ו־ AB , במדדו את $Z\Delta$ בחיסור חוזר, ישאיר את ΓZ הקטן ממנו; ו־ ΓZ , במדדו את BH בחיסור חוזר, ישאיר את AH הקטן ממנו; והדבר ייעשה תמיד עד שיישאר גודל כלשהו הקטן מ־ E . ייעשה הדבר, ותישאר AH הקטנה מ־ E . ומאחר ש־ E מודד את AB , ואילו AB מודד את ΔZ , גם E ימדוד את $Z\Delta$. והוא מודד גם את השלם $\Gamma\Delta$; לכן ימדוד גם את השארית ΓZ . אך ΓZ מודד את BH ; לפיכך גם E ימדוד את BH . והוא מודד גם את השלם AB ; לכן ימדוד גם את השארית AH — הגדול את הקטן — וזה בלתי אפשרי. לפיכך שום גודל אינו מודד את שני הגדלים $AB, \Gamma\Delta$; לכן $AB, \Gamma\Delta$ חסרי־מידה.

לפיכך, אם בשני גדלים לא־שווים, וכן הלאה.

בהינתן שני גדלים בני־מידה, למצוא את המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם.

יהיו $AB, \Gamma\Delta$ שני הגדלים בני־המידה הנתונים, ויהי AB הקטן מהם. נדרש אפוא למצוא את המידה המשותפת הגדולה ביותר של $AB, \Gamma\Delta$.

הגודל AB מודד את $\Gamma\Delta$ או שאינו מודד אותו. אם הוא מודד אותו, והוא מודד גם את עצמו, הרי AB הוא מידה משותפת של $AB, \Gamma\Delta$; וברור שהוא גם הגדול ביותר, שהרי גודל הגדול מ־ AB לא ימדוד את AB .

עתה אל ימדוד AB את $\Gamma\Delta$. כאשר הקטן נגרע תמיד בחיסור חוזר מן הגדול, השארית תמדוד בשלב כלשהו את הקודמת לה, מפני ש־ $AB, \Gamma\Delta$ אינם חסרי־מידה. ימדוד AB את $E\Delta$ בחיסור חוזר וישאיר את $E\Gamma$ הקטן ממנו; ימדוד $E\Gamma$ את ZB בחיסור חוזר וישאיר את AZ הקטן ממנו; וימדוד AZ את FE .

מאחר ש־ AZ מודד את ΓE , ואילו ΓE מודד את ZB , גם AZ ימדוד את ZB .
 והוא מודד גם את עצמו; לפיכך AZ ימדוד גם את השלם AB . אך AB מודד
 את $E\Delta$; לכן גם AZ ימדוד את $E\Delta$. והוא מודד גם את ΓE ; לפיכך הוא ימדוד
 גם את השלם $\Gamma\Delta$. לכן AZ הוא מידה משותפת של AB , $\Gamma\Delta$. אומר אני שהוא
 גם הגדול ביותר. שאם לא, יהיה גודל כלשהו, H , הגדול מ־ AZ ומודד את AB ,
 $\Gamma\Delta$. ומאחר ש־ H מודד את AB , ואילו AB מודד את $E\Delta$, גם H ימדוד את $E\Delta$.
 והוא מודד גם את השלם $\Gamma\Delta$; לכן H ימדוד גם את השארית ΓE . אך ΓE מודד
 את ZB ; לפיכך גם H ימדוד את ZB . והוא מודד גם את השלם AB ; לכן ימדוד
 את השארית AZ — הגדול את הקטן — וזה בלתי אפשרי. לפיכך שום גודל
 הגדול מ־ AZ לא ימדוד את $\Gamma\Delta$, AB ; לכן AZ הוא המידה המשותפת הגדולה
 ביותר של AB , $\Gamma\Delta$.

לפיכך נמצאה המידה המשותפת הגדולה ביותר של שני הגדלים בני־המידה
 הנתונים AB , $\Gamma\Delta$; כנדרש לעשות.

מסקנה.

מכאן ברור שאם גודל מודד שני גדלים, הוא ימדוד גם את המידה המשותפת
 הגדולה ביותר שלהם.

בהינתן שלושה גדלים בני־מידה, למצוא את המידה המשותפת הגדולה ביותר
 שלהם.

יהיו A , B , Γ שלושת הגדלים בני־המידה הנתונים. נדרש אפוא למצוא את
 המידה המשותפת הגדולה ביותר של A , B , Γ .

תילקח המידה המשותפת הגדולה ביותר של שני הגדלים A, B , ותהי Δ . אז Δ מודדת את Γ או שאינה מודדת אותו. תחילה תמדוד אותו. ומאחר ש־ Δ מודדת את Γ וגם את A, B , הרי Δ מודדת את A, B, Γ ; לפיכך Δ היא מידה משותפת של A, B, Γ . וברור שהיא גם הגדולה ביותר, שהרי גודל הגדול מ־ Δ לא ימדוד את A, B .

עתה אל תמדוד Δ את Γ . אומר אני תחילה ש־ Δ, Γ בני־מידה. מאחר ש־ A, B , Γ בני־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם, והוא כמובן ימדוד גם את A, B ; לפיכך ימדוד גם את המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם, Δ . והוא מודד גם את Γ ; לכן הגודל האמור מודד את Δ, Γ , ומכאן Δ, Γ בני־מידה. תילקח אפוא המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם, ותהי E . ומאחר ש־ E מודדת את Δ , ואילו Δ מודדת את A, B , גם E תמדוד את A, B . והיא מודדת גם את Γ ; לפיכך E מודדת את A, B, Γ , ולכן היא מידה משותפת שלהם. אומר אני שהיא גם הגדולה ביותר. שאם אפשר, יהי גודל כלשהו Z גדול מ־ E ומודד את A, B, Γ . ומאחר ש־ Z מודד את A, B, Γ , הוא ימדוד את A, B וגם את המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם. אך המידה המשותפת הגדולה ביותר של A, B היא Δ ; לכן Z מודד את Δ . והוא מודד גם את Γ ; לפיכך Z מודד את Δ, Γ , וגם את המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם. אך זו E ; לכן Z ימדוד את E — הגדול את הקטן — וזה בלתי אפשרי. לפיכך שום גודל הגדול מ־ E אינו מודד את A, B, Γ ; לכן E היא המידה המשותפת הגדולה ביותר של A, B, Γ כאשר Δ אינה מודדת את Γ , ואם היא מודדת אותו — Δ עצמה.

לפיכך נמצאה המידה המשותפת הגדולה ביותר של שלושת הגדלים בני־המידה הנתונים; כנדרש לעשות.

מסקנה.

מכאן ברור שאם גודל מודד שלושה גדלים, הוא ימדוד גם את המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם.

ובדומה תילקח המידה המשותפת הגדולה ביותר גם של גדלים רבים יותר, והמסקנה תחול גם עליהם; מש"ל.

היחס בין גדלים בני־מידה הוא כיחס שבין מספר למספר.

יהיו A, B גדלים בני־מידה. אומר אני שהיחס בין A ל־ B הוא כיחס שבין מספר למספר.

מאחר ש־ A, B בני־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם ויהי Γ . ויהי מספר היחידות שב־ Δ כמספר הפעמים ש־ Γ מודד את A , ומספר היחידות שב־ E כמספר הפעמים ש־ Γ מודד את B .

מאחר ש־ Γ מודד את A כמספר היחידות שב־ Δ , וגם היחידה מודדת את Δ כמספר היחידות שבו, היחידה מודדת את המספר Δ אותו מספר פעמים שהגודל Γ מודד את A ; לפיכך כפי ש־ Γ אל A , כך היחידה אל Δ , ובהיפוך כפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל היחידה. ושוב, מאחר ש־ Γ מודד את B כמספר היחידות שב־ E , וגם היחידה מודדת את E כמספר היחידות שבו, היחידה מודדת את E אותו מספר פעמים ש־ Γ מודד את B ; לפיכך כפי ש־ Γ אל B , כך היחידה אל E . וכבר הוכח שכפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל היחידה; לכן בשוויון כפי ש־ A אל B , כך המספר Δ אל E .

לפיכך היחס בין הגדלים בני־המידה A, B הוא כיחס שבין המספר Δ למספר E ; מש"ל.

אם לשני גדלים זה אל זה יחס כיחס שבין מספר למספר, הגדלים יהיו בני־מידה.

יהיה לשני הגדלים A, B זה אל זה יחס כיחס שבין המספר Δ למספר E . אומר אני שהגדלים A, B בני־מידה.

יחולק A לחלקים שווים כמספר היחידות שב־ Δ , ויהי Γ שווה לאחד מהם; ויהי Z מורכב מגדלים השווים ל־ Γ , שמספרם כמספר היחידות שב־ E .

מאחר שכמספר היחידות שב־ Δ כך מספר הגדלים השווים ל־ Γ שב־ A , אותו חלק שהיחידה היא מ־ Δ הוא גם החלק ש־ Γ הוא מ־ A ; לכן כפי ש־ Γ אל A , כך היחידה אל Δ . והיחידה מודדת את המספר Δ ; לפיכך גם Γ מודד את A . ומאחר שכפי ש־ Γ אל A , כך היחידה אל Δ , בהיפוך כפי ש־ A אל Γ , כך המספר Δ אל היחידה. ושוב, מאחר שכמספר היחידות שב־ E כך מספר הגדלים השווים ל־ Γ שב־ Z , כפי ש־ Γ אל Z , כך היחידה אל E . וכבר הוכח שכפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל היחידה; לכן בשוויון כפי ש־ A אל Z , כך Δ אל E . אך כפי ש־ Δ אל E , כך A אל B ; לפיכך כפי ש־ A אל B , כך גם A אל Z . לכן ל־ A אותו יחס אל כל אחד מן B, Z , ומכאן B שווה ל־ Z . ו־ Γ מודד את Z ; לפיכך הוא מודד גם את B , וגם את A . לכן Γ מודד את A, B ; ומכאן A בן־מידה עם B .

לפיכך, אם לשני גדלים זה אל זה, וכן הלאה.

מסקנה.

מכאן ברור שאם נתונים שני מספרים, כגון E , Δ , וקו ישר, כגון A , אפשר לעשות כפי שהמספר Δ אל המספר E , כך הקו הישר אל קו ישר. ואם יילקח גם ממוצע פרופורציונלי בין A , Z , כגון B , יהיה כפי ש- A אל Z , כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל B ; כלומר, כפי שהראשון אל השלישי, כך הצורה הדומה והמתוארת באותו אופן על הראשון אל זו שעל השני. אך כפי ש- A אל Z , כך המספר Δ אל המספר E ; לכן נעשה גם כפי שהמספר Δ אל המספר E , כך הריבוע שעל הקו הישר A אל הריבוע שעל הקו הישר B ; מש"ל.

לגדלים חסרי־מידה זה אל זה אין יחס כיחס שבין מספר למספר.

יהיו A , B גדלים חסרי־מידה. אומר אני של־ A אל B אין יחס כיחס שבין מספר למספר.

שאם ל־ A אל B יחס כיחס שבין מספר למספר, A יהיה בן־מידה עם B . אך אינו; לפיכך ל־ A אל B אין יחס כיחס שבין מספר למספר.

לפיכך לגדלים חסרי־מידה זה אל זה אין יחס, וכן הלאה.

אם לשני גדלים זה אל זה אין יחס כיחס שבין מספר למספר, הגדלים יהיו חסרי־מידה.

אל יהיה לשני הגדלים A , B זה אל זה יחס כיחס שבין מספר למספר. אומר אני שהגדלים A , B חסרי־מידה.

שאילו היו בני־מידה, ל־ A אל B היה יחס כיחס שבין מספר למספר. אך אין לו; לפיכך הגדלים A , B חסרי־מידה.

לפיכך, אם לשני גדלים זה אל זה, וכן הלאה.

לריבועים שעל קווים ישרים בני־מידה באורך זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי; וריבועים שיש להם זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי יהיו גם בעלי צלעות בנות־מידה באורך. ואילו לריבועים שעל קווים ישרים חסרי־מידה באורך זה אל זה אין יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי; וריבועים שאין להם זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי גם לא יהיו בעלי צלעות בנות־מידה באורך.

יהיו A, B בני־מידה באורך. אומר אני שלריבוע שעל A אל הריבוע שעל B יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

מאחר ש־ A בן־מידה באורך עם B , ל־ A אל B יחס כיחס שבין מספר למספר. יהי זה היחס אשר ל־ Γ אל Δ . ומאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , ואילו יחס הריבוע שעל A אל הריבוע שעל B כפול מן היחס של A אל B — שהרי צורות דומות נמצאות ביחס כפול מצלעותיהן התואמות — וגם יחס הריבוע שעל Γ אל הריבוע שעל Δ כפול מן היחס של Γ אל Δ — שהרי בין שני מספרים ריבועיים יש מספר אחד ממוצע בפרופורציה, ולמספר הריבועי אל המספר הריבועי יחס כפול מזה של הצלע אל הצלע — לפיכך כפי שהריבוע שעל A אל הריבוע שעל B , כך המספר הריבועי שעל Γ אל המספר הריבועי שעל Δ .

עתה יהי כפי שהריבוע שעל A אל הריבוע שעל B , כך המספר הריבועי שעל Γ אל המספר הריבועי שעל Δ . אומר אני ש־ A בן־מידה באורך עם B .

מאחר שכפי שהריבוע שעל A אל הריבוע שעל B , כך המספר הריבועי שעל Γ אל המספר הריבועי שעל Δ , ואילו יחס הריבוע שעל A אל הריבוע שעל B כפול מן היחס של A אל B , ויחס המספר הריבועי שעל Γ אל המספר הריבועי שעל Δ כפול מן היחס של Γ אל Δ , לפיכך גם כפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ . לכן

ל־A אל B יחס כיחס שבין המספר Γ למספר Δ ; ומכאן A בן־מידה באורך עם B.

עתה יהי A חסר־מידה באורך עם B. אומר אני שלריבוע שעל A אל הריבוע שעל B אין יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

שאם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל B יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, A יהיה בן־מידה עם B. אך אינו; לפיכך לריבוע שעל A אל הריבוע שעל B אין יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

ושוב, אל יהיה לריבוע שעל A אל הריבוע שעל B יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי. אומר אני ש־A חסר־מידה באורך עם B.

שאלו A היה בן־מידה עם B, לריבוע שעל A אל הריבוע שעל B היה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי. אך אין לו; לפיכך A אינו בן־מידה באורך עם B.

לפיכך הריבועים שעל קווים בני־מידה באורך, וכן הלאה.

מסקנה.

ומן המוכח יהיה ברור שקווים בני־מידה באורך הם בהכרח גם בני־מידה בריבוע, ואילו קווים בני־מידה בריבוע אינם בהכרח גם בני־מידה באורך. [שהרי לריבועים שעל קווים ישרים בני־מידה באורך יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, וגדלים שיש להם יחס כיחס שבין מספר למספר הם בני־מידה. לפיכך קווים ישרים בני־מידה באורך אינם בני־מידה באורך בלבד, אלא גם בריבוע.]

ושוב, מאחר שכל זוג ריבועים שיש להם זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי הוכח כבעל צלעות בנות־מידה באורך, וגם כבן־מידה בריבוע מפני שלריבועים יחס כיחס שבין מספר למספר, הרי כל זוג ריבועים שאין לו יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי אלא רק יחס כיחס שבין מספר למספר, הריבועים עצמם יהיו בני־מידה, אך צלעותיהם לא יהיו עוד בנות־מידה באורך. לפיכך קווים בני־מידה באורך הם בהכרח גם בני־מידה בריבוע, ואילו בני־מידה בריבוע אינם בהכרח גם באורך, אלא אם יש לריבועים גם יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

אומר אני שקווים חסרי־מידה באורך אינם בהכרח גם חסרי־מידה בריבוע, שכן קווים בני־מידה בריבוע עשויים שלא להיות בעלי יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, ומשום כך, אף שהם בני־מידה בריבוע, הם חסרי־מידה באורך. לכן קווים חסרי־מידה באורך אינם בהכרח גם חסרי־מידה בריבוע, אלא בהיותם חסרי־מידה באורך הם עשויים להיות בריבוע הן חסרי־מידה והן בני־מידה.

ואילו קווים חסרי־מידה בריבוע הם בהכרח גם חסרי־מידה באורך. שאילו היו בני־מידה באורך, היו גם בני־מידה בריבוע; אך הונח שהם חסרי־מידה, וזה מגוחך. לפיכך חסרי־מידה בריבוע הם בהכרח גם חסרי־מידה באורך.]

לָמָּה.

הוכח בספרי החשבון שלמספרים מישוריים דומים זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, ושם לשני מספרים זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, הם מספרים מישוריים דומים. ומכאן ברור שלמספרים מישוריים שאינם דומים, כלומר לאלה שצלעותיהם אינן עומדות

בפרופורציה, אין זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי. שאילו היה להם יחס כזה, היו מספרים מישוריים דומים, בניגוד להנחה. לפיכך למספרים מישוריים שאינם דומים אין זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי.

למצוא ביחס לקו ישר נתון שני קווים ישרים חסרי־מידה עמו, האחד באורך בלבד והאחר גם בריבוע.

יהי A הקו הישר הנתון. נדרש אפוא למצוא ביחס ל־ A שני קווים ישרים חסרי־מידה עמו, האחד באורך בלבד והאחר גם בריבוע.

יונחו שני מספרים B, Γ שאין להם זה אל זה יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, כלומר מספרים מישוריים שאינם דומים; ויעשה כפי ש־ B אל Γ , כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל Δ , שהרי למדנו לעשות זאת. לפיכך הריבוע שעל A בן־מידה עם הריבוע שעל Δ . ומאחר של־ B אל Γ אין יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי, גם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל Δ אין יחס כיחס שבין מספר ריבועי למספר ריבועי; לפיכך A חסר־מידה באורך עם Δ . יילקח E ממוצע פרופורציונלי בין A, Δ . לכן כפי ש־ A אל Δ , כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל E . אך A חסר־מידה באורך עם Δ ; לפיכך גם הריבוע שעל A חסר־מידה עם הריבוע שעל E , ולכן A חסר־מידה בריבוע עם E .

לפיכך נמצאו ביחס לקו הישר הנתון A שני קווים ישרים חסרי־מידה עמו, Δ, E : E באורך בלבד, ו־ E בריבוע וגם, כמובן, באורך; כנדרש לעשות.

אם ארבעה גדלים עומדים בפרופורציה והראשון בן־מידה עם השני, גם השלישי יהיה בן־מידה עם הרביעי; ואם הראשון חסר־מידה עם השני, גם השלישי יהיה חסר־מידה עם הרביעי.

יהיו ארבעת הגדלים A, B, Γ, Δ עומדים בפרופורציה, כפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , ויהי A בן־מידה עם B . אומר אני שגם Γ יהיה בן־מידה עם Δ .

מאחר ש־ A בן־מידה עם B , היחס בין A ל־ B הוא כיחס שבין מספר למספר. וכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ ; לפיכך גם היחס בין Γ ל־ Δ הוא כיחס שבין מספר למספר, ולכן Γ בן־מידה עם Δ .

עתה יהי A חסר־מידה עם B . אומר אני שגם Γ יהיה חסר־מידה עם Δ . מאחר ש־ A חסר־מידה עם B , היחס בין A ל־ B אינו כיחס שבין מספר למספר. וכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ ; לפיכך גם היחס בין Γ ל־ Δ אינו כיחס שבין מספר למספר, ולכן Γ חסר־מידה עם Δ .

לפיכך, אם ארבעה גדלים, וכן הלאה.

גדלים בני־מידה עם אותו גודל הם גם בני־מידה זה עם זה.

יהי כל אחד מן A, B בן־מידה עם Γ . אומר אני שגם A בן־מידה עם B .

מאחר ש־ A בן־מידה עם Γ , היחס בין A ל־ Γ הוא כיחס שבין מספר למספר; יהי כיחס שבין Δ ל־ E . ושוב, מאחר ש־ Γ בן־מידה עם B , היחס בין Γ ל־ B הוא כיחס שבין מספר למספר; יהי כיחס שבין Z ל־ H . ובהינתן יחסים רבים ככל שיהיו, ובהם היחס של Δ אל E והיחס של Z אל H , יילקחו המספרים Θ, K, Λ

העומדים ברצף ביחסים הנתונים, כך שכפי ש־ Δ אל E, כך Θ אל K, וכפי ש־ Z אל H, כך K אל Λ .

מאחר שכפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל E, וכפי ש־ Δ אל E, כך Θ אל K, לפיכך גם כפי ש־ A אל Γ , כך Θ אל K. ושוב, מאחר שכפי ש־ Γ אל B, כך Z אל H, וכפי ש־ Z אל H, כך K אל Λ , לפיכך כפי ש־ Γ אל B, כך K אל Λ . וגם כפי ש־ A אל Γ , כך Θ אל K; לכן בשוויון כפי ש־ A אל B, כך Θ אל Λ . לפיכך היחס בין A ל־B הוא כיחס שבין המספר Θ למספר Λ , ולכן A בן־מידה עם B.

לפיכך גדלים בני־מידה עם אותו גודל הם גם בני־מידה זה עם זה; מש״ל.

אם שני גדלים בני־מידה ואחד מהם חסר־מידה עם גודל כלשהו, גם האחר יהיה חסר־מידה עם אותו גודל.

יהיו A, B שני גדלים בני־מידה, ויהי אחד מהם, A, חסר־מידה עם גודל אחר כלשהו, Γ . אומר אני שגם הגודל האחר, B, חסר־מידה עם Γ .

שאלו B היה בן־מידה עם Γ , ומאחר שגם A בן־מידה עם B, היה גם A בן־מידה עם Γ . אך הוא גם חסר־מידה עמו, וזה בלתי אפשרי. לפיכך B אינו בן־מידה עם Γ , ולכן הוא חסר־מידה עמו.

לפיכך, אם שני גדלים בני־מידה, וכן הלאה.

לְמָה.

בהינתן שני קווים ישרים לא־שווים, למצוא את הריבוע שבו הריבוע שעל הגדול עולה על הריבוע שעל הקטן.

יהיו Γ , AB שני הקווים הישרים הלא־שווים הנתונים, ויהי AB הגדול מהם. נדרש אפוא למצוא את הריבוע שבו הריבוע שעל AB עולה על הריבוע שעל Γ .

יתואר על AB חצי־המעגל $A\Delta B$, ויותאם בתוכו ΔA השווה ל־ Γ , ויחובר ΔB . ברור שהזווית $A\Delta B$ ישרה, וש־ AB גדול בריבוע מן ΔA , כלומר מן Γ , בריבוע שעל ΔB .

ובדומה, בהינתן שני קווים ישרים, הקו השווה בריבוע לשניהם נמצא כך.

יהיו ΔB , ΔA שני הקווים הישרים הנתונים, ויהיה נדרש למצוא את הקו השווה בריבוע לשניהם. יונחו כך שיכילו זווית ישרה $A\Delta B$, ויחובר AB . שוב ברור שהקו השווה בריבוע ל־ ΔB , ΔA הוא AB ; כנדרש לעשות.

אם ארבעה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, והראשון גדול בריבוע מן השני בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הראשון, גם השלישי יהיה גדול בריבוע מן הרביעי בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם השלישי. ואם הראשון גדול בריבוע מן השני בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם הראשון, גם השלישי יהיה גדול בריבוע מן הרביעי בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם השלישי.

יהיו ארבעת הקווים הישרים Δ , Γ , B , A עומדים בפרופורציה, כפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ ; ויהי A גדול בריבוע מן B בריבוע שעל E , ו־ Γ גדול בריבוע מן Δ בריבוע שעל Z . אומר אני שאם A בן־מידה עם E , גם Γ בן־מידה עם Z ; ואם A חסר־מידה עם E , גם Γ חסר־מידה עם Z .

מאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , כפי שהריבוע שעל A אל הריבוע שעל B , כך הריבוע שעל Γ אל הריבוע שעל Δ . אך סכום הריבועים שעל B , E שווה

לריבוע שעל A , וסכום הריבועים שעל Δ , Z שווה לריבוע שעל Γ . לפיכך כפי שסכום הריבועים שעל E , B אל הריבוע שעל B , כך סכום הריבועים שעל Δ , Z אל הריבוע שעל Δ ; ובהפרדה, כפי שהריבוע שעל E אל הריבוע שעל B , כך הריבוע שעל Z אל הריבוע שעל Δ . לכן גם כפי ש E אל B , כך Z אל Δ , ובהיפוך כפי ש B אל E , כך Δ אל Z . וגם כפי ש A אל B , כך Γ אל Δ ; לפיכך בשוויון כפי ש A אל E , כך Γ אל Z . לכן אם A בן־מידה עם E , גם Γ בן־מידה עם Z ; ואם A חסר־מידה עם E , גם Γ חסר־מידה עם Z .

לפיכך, אם ארבעה קווים ישרים, וכן הלאה.

אם מחברים שני גדלים בני־מידה, גם השלם יהיה בן־מידה עם כל אחד מהם; ואם השלם בן־מידה עם אחד מהם, גם הגדלים המקוריים יהיו בני־מידה.

יחברו שני הגדלים בני־המידה AB , $B\Gamma$. אומר אני שגם השלם $A\Gamma$ בן־מידה עם כל אחד מן AB , $B\Gamma$.

מאחר ש AB , $B\Gamma$ בני־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם ויהי Δ . ומאחר ש Δ מודד את AB , $B\Gamma$, הוא ימדוד גם את השלם $A\Gamma$. והוא מודד גם את AB , $B\Gamma$; לפיכך Δ מודד את AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$, ולכן $A\Gamma$ בן־מידה עם כל אחד מן AB , $B\Gamma$.

עתה יהי $A\Gamma$ בן־מידה עם AB . אומר אני שגם AB , $B\Gamma$ בני־מידה.

מאחר ש AB , $A\Gamma$ בני־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם ויהי Δ . ומאחר ש Δ מודד את AB , $A\Gamma$, הוא ימדוד גם את השארית $B\Gamma$. והוא מודד גם את AB ; לפיכך Δ מודד את AB , $B\Gamma$, ולכן AB , $B\Gamma$ בני־מידה.

לפיכך, אם שני גדלים, וכן הלאה.

אם מחברים שני גדלים חסרי־מידה, גם השלם יהיה חסר־מידה עם כל אחד מהם; ואם השלם חסר־מידה עם אחד מהם, גם הגדלים המקוריים יהיו חסרי־מידה.

יחברו שני הגדלים חסרי־המידה AB , $B\Gamma$. אומר אני שגם השלם $A\Gamma$ חסר־מידה עם כל אחד מן AB , $B\Gamma$.

שאם ΓA , AB אינם חסרי־מידה, גודל כלשהו ימדוד אותם. ימדוד אותם, אם אפשר, ויהי Δ . ומאחר ש־ Δ מודד את ΓA , AB , הוא ימדוד גם את השארית $B\Gamma$. והוא מודד גם את AB ; לפיכך Δ מודד את AB , $B\Gamma$, ולכן AB , $B\Gamma$ בני־מידה. אך הונח שהם חסרי־מידה, וזה בלתי אפשרי. לפיכך שום גודל אינו מודד את ΓA , AB , ולכן ΓA , AB חסרי־מידה. בדומה נוכיח שגם $A\Gamma$, ΓB חסרי־מידה. לפיכך $A\Gamma$ חסר־מידה עם כל אחד מן AB , $B\Gamma$.

עתה יהי $A\Gamma$ חסר־מידה עם אחד מן AB , $B\Gamma$, ותחילה עם AB . אומר אני שגם AB , $B\Gamma$ חסרי־מידה. שאילו היו בני־מידה, גודל כלשהו היה מודד אותם. ימדוד אותם ויהי Δ . ומאחר ש־ Δ מודד את AB , $B\Gamma$, הוא ימדוד גם את השלם $A\Gamma$. והוא מודד גם את AB ; לפיכך Δ מודד את ΓA , AB , ולכן ΓA , AB בני־מידה. אך הונח שהם חסרי־מידה, וזה בלתי אפשרי. לפיכך שום גודל אינו מודד את AB , $B\Gamma$, ולכן AB , $B\Gamma$ חסרי־מידה.

לפיכך, אם שני גדלים, וכן הלאה.

לָמָּה.

אם בצמוד לקו ישר נבנית מקבילית החסרה בצורת ריבוע, המקבילית שנבנתה שווה למלבן הכלול בין קטעי הקו הישר שנוצרו מן הבנייה.

בצמוד לקו הישר AB תיבנה המקבילית AD , החסרה בצורת הריבוע ΔB . אומר אני ש- AD שווה למלבן הכלול בין AF , GB .

הדבר ברור מיד: מאחר ש- ΔB ריבוע, ΔF שווה ל- GB ; ו- AD הוא המלבן הכלול בין AF , GD , כלומר המלבן הכלול בין AF , GB .

לפיכך, אם בצמוד לקו ישר, וכן הלאה.

אם נתונים שני קווים ישרים לא־שווים, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת את הגדול לחלקים בני־מידה באורך, יהיה הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הגדול. ואם הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הגדול, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, היא מחלקת אותו לחלקים בני־מידה באורך.

יהיו A , BF שני קווים ישרים לא־שווים, ויהי BF הגדול. בצמוד ל- BF תיבנה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן A , כלומר לריבוע שעל חציו של A , וחסרה בצורת ריבוע; ויהי זה המלבן הכלול בין BA , ΔF . ויהי BA בן־מידה באורך עם ΔF . אומר אני ש- BF גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם BF .

ייחצה BF בנקודה E , ויונח EZ שווה ל- ΔE . לפיכך השארית ΔF שווה ל- BZ . ומאחר שהקו הישר BF נחתך לחלקים שווים ב- E ולחלקים לא־שווים ב- Δ , המלבן הכלול בין BA , ΔF בצירוף הריבוע שעל EA שווה לריבוע שעל EF ; וכך

גם הכפולות פי ארבעה: ארבע פעמים המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, BA בצירוף ארבע פעמים הריבוע שעל ΔE שוות לארבע פעמים הריבוע שעל $E\Gamma$. אך הריבוע שעל A שווה לארבע פעמים המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, BA ; הריבוע שעל ΔZ שווה לארבע פעמים הריבוע שעל ΔE , שהרי ΔZ כפול מ־ ΔE ; והריבוע שעל $B\Gamma$ שווה לארבע פעמים הריבוע שעל $E\Gamma$, שהרי גם $B\Gamma$ כפול מ־ $E\Gamma$. לפיכך סכום הריבועים שעל ΔZ , A שווה לריבוע שעל $B\Gamma$; ולכן הריבוע שעל $B\Gamma$ גדול מן הריבוע שעל A בריבוע שעל ΔZ . מכאן $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל ΔZ . נותר להוכיח ש־ $B\Gamma$ בן־מידה עם ΔZ . מאחר ש־ BA בן־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$, גם $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם ΓA . אך ΓA בת־מידה באורך עם סכום ΓA , BZ , שהרי ΓA שווה ל־ BZ . לפיכך גם $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם סכום ΓA , BZ , ומכאן הוא בן־מידה באורך גם עם השארית ΔZ . לכן $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו.

עתה יהי $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו; ובצמוד ל־ $B\Gamma$ תיבנה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל A וחסרה בצורת ריבוע, ויהי המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, BA . נדרש להוכיח ש־ BA בן־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$.

לאחר אותה בנייה נוכיח בדומה ש־ $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל ΔZ . אך $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו; לפיכך $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם ΔZ , ומכאן הוא בן־מידה באורך גם עם השארית, סכום BZ , $\Delta\Gamma$. אך סכום $\Delta\Gamma$, BZ בן־מידה עם $\Delta\Gamma$; לכן גם $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם ΓA , ובהפרדה BA בן־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$.

לפיכך, אם נתונים שני קווים ישרים לא־שווים, וכן הלאה.

אם נתונים שני קווים ישרים לא־שווים, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים חסר־מידה, יהיה הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם הגדול. ואם הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, היא מחלקת אותו לחלקים חסר־מידה.

יהיו A , $B\Gamma$ שני קווים ישרים לא־שווים, ויהי $B\Gamma$ הגדול. בצמוד ל־ $B\Gamma$ תיבנה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן A וחסרה בצורת ריבוע, ויהי המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, BA . ויהי BA חסר־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$. אומר אני ש־ $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו.

לאחר אותה בנייה כבמשפט הקודם נוכיח בדומה ש־ $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל ZA . נותר להוכיח ש־ $B\Gamma$ חסר־מידה באורך עם ΔZ . מאחר ש־ BA חסר־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$, גם $B\Gamma$ חסר־מידה באורך עם ΓA . אך $\Delta\Gamma$, BZ , $\Delta\Gamma$ עם סכום BZ ; לפיכך גם $B\Gamma$ חסר־מידה עם סכום $\Delta\Gamma$, BZ , ומכאן הוא חסר־מידה באורך גם עם השארית ZA . ו־ $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל ZA ; לפיכך $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו.

עתה שוב יהי $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; ובצמוד ל־ $B\Gamma$ תיבנה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל A וחסרה בצורת ריבוע, ויהי המלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, BA . נדרש להוכיח ש־ BA חסר־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$.

לאחר אותה בנייה נוכיח בדומה ש- $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל ZA . אך $B\Gamma$ גדול בריבוע מן A בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; לפיכך $B\Gamma$ חסר־מידה באורך עם ZA , ומכאן הוא חסר־מידה גם עם השארית, סכום BZ , $\Delta\Gamma$. אך סכום $\Delta\Gamma$, BZ בן־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$; לכן גם $B\Gamma$ חסר־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$, ובהפרדה BA חסר־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$.

לפיכך, אם נתונים שני קווים ישרים, וכן הלאה.

לְמַה.

מאחר שהוכח שקווים בני־מידה באורך הם בהכרח גם בני־מידה בריבוע, ואילו בני־מידה בריבוע אינם בהכרח גם באורך אלא עשויים להיות באורך הן בני־מידה והן חסר־מידה, ברור שאם קו כלשהו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, הוא נקרא רציונלי ובן־מידה עמו לא רק באורך אלא גם בריבוע, מפני שבני־מידה באורך הם בהכרח גם בריבוע. ואם קו כלשהו בן־מידה בריבוע עם הקו הרציונלי הנתון, ואם הוא גם בן־מידה באורך, גם כך הוא נקרא רציונלי ובן־מידה עמו באורך ובריבוע; ואם קו כלשהו, בהיותו בן־מידה בריבוע עם הקו הרציונלי הנתון, חסר־מידה עמו באורך, גם כך הוא נקרא רציונלי, בן־מידה עמו בריבוע בלבד.

המלבן הכלול בין קווים ישרים רציונליים בני־מידה באורך, באחד האופנים שנאמרו, הוא רציונלי.

יהי AI המלבן הכלול בין הקווים הישרים הרציונליים AB , $B\Gamma$, בני־המידה באורך. אומר אני ש- AI רציונלי.

יתואר על AB הריבוע ΔA ; לפיכך ΔA רציונלי. ומאחר ש- AB בן־מידה באורך עם $B\Gamma$, ו- AB שווה ל- BA , גם BA בן־מידה באורך עם $B\Gamma$. וכפי ש- BA אל $B\Gamma$, כך ΔA אל $A\Gamma$; לפיכך ΔA בן־מידה עם $A\Gamma$. אך ΔA רציונלי; לכן גם $A\Gamma$ רציונלי.

לפיכך המלבן הכלול בין קווים רציונליים בני־מידה באורך, וכן הלאה.

אם שטח רציונלי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הוא יוצר רוחב רציונלי ובן־מידה באורך עם הקו שבצמוד אליו נבנה.

ייבנה השטח הרציונלי $A\Gamma$ בצמוד לקו הרציונלי AB , באחד האופנים שנאמרו, ויצור את הרוחב $B\Gamma$. אומר אני ש- $B\Gamma$ רציונלי ובן־מידה באורך עם BA .

יתואר על AB הריבוע ΔA ; לפיכך ΔA רציונלי. וגם $A\Gamma$ רציונלי; לכן ΔA בן־מידה עם $A\Gamma$. וכפי ש- ΔA אל $A\Gamma$, כך ΔB אל $B\Gamma$; לפיכך גם ΔB בת־מידה עם $B\Gamma$. אך ΔB שווה ל- BA ; לכן גם AB בן־מידה עם $B\Gamma$. ו- AB רציונלי; לפיכך גם $B\Gamma$ רציונלי ובן־מידה באורך עם AB .

לפיכך, אם שטח רציונלי נבנה בצמוד לקו רציונלי, וכן הלאה.

המלבן הכלול בין קווים ישרים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד הוא אי־רציונלי; וגם הקו שריבועו שווה לו הוא אי־רציונלי, וייקרא אמצעי.

יהי $A\Gamma$ המלבן הכלול בין הקווים הישרים הרציונליים AB , $B\Gamma$, בני־המידה בריבוע בלבד. אומר אני ש- $A\Gamma$ אי־רציונלי, ושגם הקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי; והוא ייקרא אמצעי.

יתואר על AB הריבוע $A\Delta$; לפיכך $A\Delta$ רציונלי. ומאחר ש- AB חסר־מידה באורך עם $B\Gamma$ — שהרי הונח שהם בני־מידה בריבוע בלבד — ואילו AB שווה ל- BA , גם AB חסר־מידה באורך עם $B\Gamma$. וכפי ש- ΔB אל $B\Gamma$, כך $A\Delta$ אל $A\Gamma$; לפיכך ΔA חסר־מידה עם $A\Gamma$. אך ΔA רציונלי; לכן $A\Gamma$ אי־רציונלי, ומכאן גם הקו שריבועו שווה ל- $A\Gamma$ אי־רציונלי. הוא ייקרא אמצעי; מש"ל.

לְמָה.

אם נתונים שני קווים ישרים, כפי שהראשון אל השני, כך הריבוע שעל הראשון אל המלבן הכלול בין שני הקווים.

יהיו ZE , EH שני קווים ישרים. אומר אני שכפי ש- ZE אל EH , כך הריבוע שעל ZE אל המלבן הכלול בין ZE , EH .

יתואר על ZE הריבוע ΔZ , ותושלם הצורה $H\Delta$. ומאחר שכפי ש- ZE אל EH , כך ΔZ אל ΔH , ו- ΔZ הוא הריבוע שעל ZE ואילו ΔH הוא המלבן הכלול בין ΔE , EH , כלומר בין ZE , EH , לפיכך כפי ש- ZE אל EH , כך הריבוע שעל ZE אל המלבן הכלול בין ZE , EH . ובדומה, כפי שהמלבן הכלול בין HE , EZ אל הריבוע שעל EZ , כלומר כפי ש- $H\Delta$ אל ΔZ , כך HE אל EZ ; מש"ל.

הריבוע שעל קו אמצעי, כאשר הוא נבנה בצמוד לקו רציונלי, יוצר רוחב רציונלי וחסר־מידה באורך עם הקו שבצמוד אליו נבנה.

יהי A קו אמצעי ו- ΓB קו רציונלי; ובצמוד ל- $B\Gamma$ ייבנה השטח המלבני BA השווה לריבוע שעל A ויצור את הרוחב ΓA . אומר אני ש- ΓA רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓB .

מאחר ש־ A אמצעי, ריבועו שווה לשטח הכלול בין קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד. יהי שווה ל־ HZ . והוא שווה גם ל־ BA ; לפיכך BA שווה ל־ HZ . והם גם שווי־זוויות; ובמקביליות שוות ושוות־זוויות הצלעות הסובבות את הזוויות השוות עומדות ביחס הדדי. לכן כפי ש־ BF אל EH , כך EZ אל ΓA . לפיכך גם כפי שהריבוע שעל BF אל הריבוע שעל EH , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ΓA . אך הריבוע שעל ΓB בן־מידה עם הריבוע שעל EH , שהרי שני הקווים רציונליים; לכן גם הריבוע שעל EZ בן־מידה עם הריבוע שעל ΓA . והריבוע שעל EZ רציונלי; לפיכך גם הריבוע שעל ΓA רציונלי, ולכן ΓA רציונלי. ומאחר ש־ EZ חסר־מידה באורך עם EH — שהרי הם בני־מידה בריבוע בלבד — וכפי ש־ EZ אל EH , כך הריבוע שעל EZ אל המלבן הכלול בין ZE , EH , הרי הריבוע שעל EZ חסר־מידה עם המלבן הכלול בין ZE , EH . אך הריבוע שעל ΓA בן־מידה עם הריבוע שעל EZ , שהרי הקווים רציונליים בריבוע; והמלבן הכלול בין ΓB , $\Delta \Gamma$ בן־מידה עם המלבן הכלול בין ZE , EH , שהרי שניהם שווים לריבוע שעל A . לפיכך גם הריבוע שעל ΓA חסר־מידה עם המלבן הכלול בין ΓB , $\Delta \Gamma$. וכפי שהריבוע שעל ΓA אל המלבן הכלול בין ΓB , $\Delta \Gamma$, כך $\Delta \Gamma$ אל ΓB ; לכן $\Delta \Gamma$ חסר־מידה באורך עם ΓB . לפיכך ΓA רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓB ; מש״ל.

קו בן־מידה עם קו אמצעי הוא אמצעי.

יהי A אמצעי, ויהי B בן־מידה עם A . אומר אני שגם B אמצעי.

יונח הקו הרציונלי ΓA ; ובצמוד ל־ ΓA ייבנה השטח המלבני ΓE השווה לריבוע שעל A ויצור את הרוחב EA . לפיכך EA רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓA . ובצמוד ל־ ΓA ייבנה השטח המלבני ΓZ השווה לריבוע שעל B ויצור את הרוחב

ΔZ . ומאחר ש־ A בן־מידה עם B , גם הריבוע שעל A בן־מידה עם הריבוע שעל B . אך EF שווה לריבוע שעל A ו־ ΓZ שווה לריבוע שעל B ; לפיכך EF בן־מידה עם ΓZ . וכפי ש־ EF אל ΓZ , כך EA אל ΔZ ; לכן EA בת־מידה באורך עם ΔZ . אך EA רציונלית וחסרת־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$; לפיכך גם ΔZ רציונלית וחסרת־מידה באורך עם $\Delta\Gamma$. לכן ΔZ , ΓA רציונליות ובנות־מידה בריבוע בלבד. והקו שריבועו שווה למלבן הכלול בין קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד הוא אמצעי; לפיכך הקו שריבועו שווה למלבן הכלול בין ΓA , ΔZ אמצעי. אך B הוא הקו שריבועו שווה למלבן הכלול בין ΓA , ΔZ ; לכן B אמצעי.

מסקנה.

מכאן ברור ששטח בן־מידה עם שטח אמצעי הוא אמצעי.

ובאותו אופן כמו הדברים שנאמרו על הקווים הרציונליים, נובע גם בקווים האמצעיים שקו בן־מידה באורך עם קו אמצעי נקרא אמצעי ובן־מידה עמו לא רק באורך אלא גם בריבוע, מפני שבאופן כללי בני־מידה באורך הם בהכרח גם בריבוע. ואם קו כלשהו בן־מידה בריבוע עם קו אמצעי, ואם הוא גם בן־מידה עמו באורך, גם כך הם נקראים קווים אמצעיים בני־מידה באורך ובריבוע; ואם הם בני־מידה בריבוע בלבד, הם נקראים קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד.

המלבן הכלול בין קווים ישרים אמצעיים בני־מידה באורך, באחד האופנים שנאמרו, הוא אמצעי.

יהי Γ המלבן הכלול בין הקווים הישרים האמצעיים AB , BF , בני־המידה באורך. אומר אני ש־ Γ אמצעי.

יתואר על AB הריבוע Δ ; לפיכך Δ אמצעי. ומאחר ש־ AB בן־מידה באורך עם BF , ואילו AB שווה ל־ BD , גם Δ בן־מידה באורך עם BF ; ולכן גם Δ בן־מידה עם Γ . אך Δ אמצעי; לפיכך גם Γ אמצעי; מש״ל.

המלבן הכלול בין קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הוא רציונלי או אמצעי.

יהי Γ המלבן הכלול בין הקווים האמצעיים AB , BF , בני־המידה בריבוע בלבד. אומר אני ש־ Γ רציונלי או אמצעי.

יתוארו על AB , BF הריבועים Δ , BE ; לפיכך כל אחד מן Δ , BE אמצעי. ויונח הקו הרציונלי ZH ; בצמוד ל־ ZH תיבנה המקבילית ישרת־הזווית $H\Theta$ השווה ל־ Δ ותיצור את הרוחב $Z\Theta$; בצמוד ל־ ΘM תיבנה המקבילית ישרת־הזווית MK השווה ל־ Γ ותיצור את הרוחב ΘK ; ועוד, בצמוד ל־ KN תיבנה בדומה המקבילית NA השווה ל־ BE ותיצור את הרוחב KA . לפיכך ΘK , $Z\Theta$, KA נמצאים בקו ישר אחד. מאחר שכל אחד מן Δ , BE אמצעי, ו־ Δ שווה ל־ $H\Theta$ ואילו BE שווה ל־ NA , גם כל אחד מן $H\Theta$, NA אמצעי. והם בנויים בצמוד לקו הרציונלי ZH ; לפיכך כל אחד מן $Z\Theta$, KA רציונלי וחסר־מידה באורך עם ZH . ומאחר ש־ Δ בן־מידה עם BE , גם $H\Theta$ בן־מידה עם NA . וכפי ש־ $H\Theta$ אל NA , כך $Z\Theta$ אל KA ; לכן $Z\Theta$ בת־מידה באורך עם KA . לפיכך $Z\Theta$, KA רציונליים ובני־מידה באורך, ולכן המלבן הכלול ביניהם רציונלי. ומאחר ש־ Δ שווה ל־ BA ו־ ΞB שווה ל־ BF , כפי ש־ ΔB אל BF , כך AB אל BE . אך כפי ש־ ΔB אל BF , כך ΔA אל Γ ; וכפי ש־ AB אל BE , כך

AF אל $E\Gamma$. לפיכך כפי ש־ ΔA אל AF , כך AF אל $E\Gamma$. ו־ AD שווה ל־ AF , HO , שווה ל־ MK , ו־ ΓE שווה ל־ NA ; לכן כפי ש־ HO אל MK , כך MK אל NA . לפיכך גם כפי ש־ $Z\Theta$ אל ΘK , כך ΘK אל KA ; ולכן המלבן הכלול בין $Z\Theta$, KA שווה לריבוע שעל ΘK . אך המלבן הכלול בין KA , $Z\Theta$ רציונלי; לכן גם הריבוע שעל ΘK רציונלי, ומכאן ΘK רציונלי. ואם ΘK בן־מידה באורך עם ZH , ΘN רציונלי; ואם הוא חסר־מידה באורך עם ΘM , $K\Theta$, ZH הם קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, ולכן ΘN אמצעי. לפיכך ΘN רציונלי או אמצעי. אך ΘN שווה ל־ AF ; לכן AF רציונלי או אמצעי.

לפיכך המלבן הכלול בין קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד, וכן הלאה.

שטח אמצעי אינו עולה על שטח אמצעי בשטח רציונלי.

שאם אפשר, יעלה השטח האמצעי AB על השטח האמצעי AF בשטח הרציונלי AB . יונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ תיבנה המקבילית ישרת־הזווית $Z\Theta$ השווה ל־ AB ותיצור את הרוחב $E\Theta$, וממנה ייגרע ZH השווה ל־ AF . לפיכך השארית $B\Delta$ שווה לשארית $K\Theta$. ו־ ΔB רציונלי; לכן גם $K\Theta$ רציונלי. ומאחר שכל אחד מן AF , AB אמצעי, ו־ AB שווה ל־ $Z\Theta$ ואילו AF שווה ל־ ZH , גם כל אחד מן $Z\Theta$, ZH אמצעי. והם בנויים בצמוד לקו הרציונלי EZ ; לפיכך כל אחד מן EH , ΘE רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר ש־ ΔB רציונלי ושווה ל־ $K\Theta$, גם $K\Theta$ רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ; לפיכך HO רציונלי ובן־מידה באורך עם EZ . אך EH רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ ; לכן EH חסר־מידה באורך עם HO . וכפי ש־ EH אל HO , כך הריבוע שעל EH אל המלבן הכלול בין EH , HO ; לפיכך הריבוע שעל EH חסר־מידה עם המלבן הכלול בין EH , HO . אך סכום הריבועים שעל EH , HO

בן־מידה עם הריבוע שעל EH , שהרי שניהם רציונליים; ופעמיים המלבן הכלול בין EH , $H\Theta$ בן־מידה עם המלבן הכלול בין EH , $H\Theta$, שהרי הוא כפול ממנו. לפיכך סכום הריבועים שעל EH , $H\Theta$ חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין EH , $H\Theta$. לכן גם השלם המורכב מסכום הריבועים שעל EH , $H\Theta$ ומפעמיים המלבן הכלול ביניהם, והוא הריבוע שעל $E\Theta$, חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל EH , $H\Theta$. אך סכום הריבועים שעל EH , $H\Theta$ רציונלי; לפיכך הריבוע שעל $E\Theta$ אי־רציונלי, ולכן $E\Theta$ אי־רציונלי. אך הוא גם רציונלי, וזה בלתי אפשרי.

לפיכך שטח אמצעי אינו עולה על שטח אמצעי בשטח רציונלי; מש"ל.

למצוא שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן רציונלי.

יונחו שני קווים רציונליים A , B בני־מידה בריבוע בלבד; ילקח Γ ממוצע פרופורציונלי בין A , B ; וייעשה כפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ .

ומאחר ש־ A , B רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, המלבן הכלול ביניהם, כלומר הריבוע שעל Γ , אמצעי. לפיכך Γ אמצעי. ומאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , ואילו A , B בני־מידה בריבוע בלבד, גם Γ , Δ בני־מידה בריבוע בלבד. ו־ Γ אמצעי; לפיכך גם Δ אמצעי. לכן Γ , Δ הם קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד. אומר אני שהם גם כוללים מלבן רציונלי. מאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , בחילוף כפי ש־ A אל Γ , כך B אל Δ . אך כפי ש־ A אל Γ , כך Γ אל B ; לפיכך כפי ש־ Γ אל B , כך B אל Δ . לכן המלבן הכלול בין Γ , Δ שווה לריבוע שעל B . והריבוע שעל B רציונלי; לפיכך גם המלבן הכלול בין Γ , Δ רציונלי.

לפיכך נמצאו שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן רציונלי; כנדרש לעשות.

למצוא קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן אמצעי.

יונחו הקווים הרציונליים A, B, Γ , בני־המידה בריבוע בלבד; ילקח Δ ממוצע פרופורציונלי בין A, B ; ויעשה כפי ש־ B אל Γ , כך Δ אל E .

מאחר ש־ A, B רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, המלבן הכלול ביניהם, כלומר הריבוע שעל Δ , אמצעי. לפיכך Δ אמצעי. ומאחר ש־ B, Γ בני־מידה בריבוע בלבד, וכפי ש־ B אל Γ , כך Δ אל E , גם Δ, E בני־מידה בריבוע בלבד. ו־ Δ אמצעי; לפיכך גם E אמצעי. לכן Δ, E הם קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד. אומר אני שהם גם כוללים מלבן אמצעי. מאחר שכפי ש־ B אל Γ , כך Δ אל E , בחילוף כפי ש־ B אל Δ , כך Γ אל E . אך כפי ש־ B אל Δ , כך Δ אל A ; לפיכך כפי ש־ Δ אל A , כך Γ אל E . לכן המלבן הכלול בין A, Γ שווה למלבן הכלול בין Δ, E . אך המלבן הכלול בין A, Γ אמצעי; לפיכך גם המלבן הכלול בין Δ, E אמצעי.

לפיכך נמצאו קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן אמצעי; כנדרש לעשות.

לְמָה.

למצוא שני מספרים ריבועיים כך שגם סכומם יהיה ריבועי.

יונחו שני המספרים $AB, B\Gamma$, ויהיו שניהם זוגיים או שניהם אי־זוגיים. ומאחר שבין אם גורעים זוגי מזוגי ובין אם גורעים אי־זוגי מאי־זוגי, השארית זוגית, הרי

השארת AF זוגית. ייחצה AF ב־ Δ . ויהיו גם AB , BF מספרים מישוריים דומים, או מספרים ריבועיים, שאף הם מספרים מישוריים דומים. לפיכך המספר הנוצר מ־ AB , BF בצירוף המספר הריבועי שעל ΓA שווה למספר הריבועי שעל BA . והמספר הנוצר מ־ AB , BF ריבועי, מפני שהוכח שאם שני מספרים מישוריים דומים מכפילים זה את זה, המספר הנוצר ריבועי. לכן נמצאו שני מספרים ריבועיים — המספר הנוצר מ־ AB , BF והמספר הריבועי שעל ΓA — שסכומם הוא המספר הריבועי שעל BA .

וברור ששוב נמצאו שני מספרים ריבועיים, הריבוע שעל BA והריבוע שעל ΓA , כך שהפרשם, המספר הנוצר מ־ AB , BF ריבועי כאשר AB , BF הם מספרים מישוריים דומים. וכאשר אינם מספרים מישוריים דומים, נמצאו שני מספרים ריבועיים, הריבוע שעל BA והריבוע שעל $\Delta\Gamma$, שהפרשם, המספר הנוצר מ־ AB , BF אינו ריבועי; מש״ל.

לָמָּה.

למצוא שני מספרים ריבועיים כך שסכומם לא יהיה ריבועי.

יהי, כפי שאמרנו, המספר הנוצר מ־ AB , BF ריבועי, ויהי ΓA זוגי, וייחצה ΓA ב־ Δ . ברור אפוא שהמספר הריבועי הנוצר מ־ AB , BF בצירוף הריבוע שעל

ΓA שווה לריבוע שעל BA . תיגרע היחידה ΔE ; לפיכך המספר הנוצר מ־ AB , BF בצירוף הריבוע שעל ΓE קטן מן הריבוע שעל BA . אומר אני אפוא שהמספר הריבועי הנוצר מ־ AB , BF בצירוף הריבוע שעל ΓE לא יהיה ריבועי.

שאם הוא ריבועי, הוא שווה לריבוע שעל BE או קטן מן הריבוע שעל BE , ואינו יכול להיות גדול ממנו, כדי שלא תחולק היחידה. תחילה, אם אפשר, יהי

המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE שווה לריבוע שעל BE , ויהי HA כפול מן היחידה ΔE . ומאחר שהשלם $A\Gamma$ כפול מן השלם $\Gamma\Delta$, ובאלה AH כפול מ־ ΔE , גם השארית $H\Gamma$ כפולה מן השארית $E\Gamma$; לפיכך $H\Gamma$ נחצה ב־ E . לכן המספר הנוצר מ־ BF , HB בצירוף הריבוע שעל ΓE שווה לריבוע שעל BE . אך גם המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE הונח שווה לריבוע שעל BE ; לפיכך המספר הנוצר מ־ BF , HB בצירוף הריבוע שעל ΓE שווה למספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE . ואם ייגרע הריבוע המשותף שעל ΓE , נובע ש־ AB שווה ל־ HB , וזה מגוחך. לפיכך המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE אינו שווה לריבוע שעל BE . אומר אני שגם אינו קטן מן הריבוע שעל BE . שאם אפשר, יהי שווה לריבוע שעל BZ , ויהי ΘA כפול מ־ ΔZ . ושוב יוסק ש־ $\Theta\Gamma$ כפול מ־ ΓZ , ולכן $\Gamma\Theta$ נחצה ב־ Z ; ומשום כך המספר הנוצר מ־ BF , ΘB בצירוף הריבוע שעל $Z\Gamma$ שווה לריבוע שעל BZ . אך הונח שגם המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE שווה לריבוע שעל BZ . לפיכך המספר הנוצר מ־ BF , ΘB בצירוף הריבוע שעל ΓZ יהיה שווה למספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE , וזה מגוחך. לכן המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE אינו שווה לשום ריבוע הקטן מן הריבוע שעל BE . וכבר הוכח שאינו שווה גם לריבוע שעל BE . לפיכך המספר הנוצר מ־ BF , AB בצירוף הריבוע שעל ΓE אינו ריבועי; מש״ל.

למצוא שני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, כך שהגדול יהיה גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הגדול.

יונח קו רציונלי כלשהו AB ושני מספרים ריבועיים ΔE , $\Gamma\Delta$, כך שהפרשם ΓE אינו ריבועי; יתואר על AB חצי־המעגל AZB ; וייעשה כפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓE , כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ ; ויחובר ZB .

מאחר שכפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ , כך $\Delta\Gamma$ אל ΓE , הרי לריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ היחס אשר למספר $\Delta\Gamma$ אל המספר ΓE ; לפיכך הריבוע שעל BA בן־מידה עם הריבוע שעל AZ . והריבוע שעל AB רציונלי; לכן גם הריבוע שעל AZ רציונלי, ומכאן גם AZ רציונלי. ומאחר ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓE אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך AB חסר־מידה באורך עם AZ . לכן AZ , BA רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ומאחר שכפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓE , כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ , בהמרה כפי ש־ $\Gamma\Delta$ אל ΔE , כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BZ . אך ל־ $\Gamma\Delta$ אל ΔE היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך גם לריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BZ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן AB בן־מידה באורך עם BZ . והריבוע שעל AB שווה לסכום הריבועים שעל AZ , ZB ; לפיכך AB גדול בריבוע מן AZ בריבוע שעל BZ , הבן־מידה באורך עמו.

לפיכך נמצאו שני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, BA , AZ , כך שהגדול AB גדול בריבוע מן הקטן AZ בריבוע שעל BZ , הבן־מידה באורך עמו; כנדרש לעשות.

למצוא שני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, כך שהגדול יהיה גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם הגדול.

יונח הקו הרציונלי AB ושני המספרים הריבועיים EA , EB , כך שסכומם EA אינו ריבועי; יתואר על AB חצי־המעגל AZB ; וייעשה כפי ש־ EA אל EB , כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ ; ויחובר ZB .

בדומה למשפט הקודם נוכיח ש־ EA , EB , AB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ומאחר שכפי ש־ EA אל EB , כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ , בהמרה כפי ש־ EA אל EB , כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BZ . אך ל־ EA אל EB אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BZ אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן AB חסר־מידה באורך עם BZ . ו־ AB גדול בריבוע מן AZ בריבוע שעל ZB , החסר־מידה באורך עמו.

לפיכך EA , EB , AB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ו־ AB גדול בריבוע מן AZ בריבוע שעל ZB , החסר־מידה באורך עמו; כנדרש לעשות.

למצוא שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן רציונלי, כך שהגדול יהיה גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הגדול.

יונחו שני קווים רציונליים A , B בני־מידה בריבוע בלבד, כך שהגדול A יהיה גדול בריבוע מן הקטן B בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ויהי הריבוע שעל Γ שווה למלבן הכלול בין A , B . אך המלבן הכלול בין A , B אמצעי; לפיכך גם הריבוע שעל Γ אמצעי, ומכאן Γ אמצעי. ויהי המלבן הכלול בין Γ , Δ שווה לריבוע שעל B . והריבוע שעל B רציונלי; לפיכך גם המלבן הכלול בין Γ , Δ רציונלי. ומאחר שכפי ש־ A אל B , כך המלבן הכלול בין A , B אל הריבוע שעל B , ואילו הריבוע שעל Γ שווה למלבן הכלול בין A , B והמלבן הכלול בין Γ , Δ שווה לריבוע שעל B , לפיכך כפי ש־ A אל B , כך הריבוע שעל Γ אל

המלבן הכלול בין Δ , Γ . וכפי שהריבוע שעל Γ אל המלבן הכלול בין Δ , Γ , כך Γ אל Δ ; לכן כפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ . אך A , B בני־מידה בריבוע בלבד; לפיכך גם Δ , Γ בני־מידה בריבוע בלבד. וְ Γ אמצעי; לכן גם Δ אמצעי. ומאחר שכפי ש־ A אל B , כך Γ אל Δ , ואילו A גדול בריבוע מן B בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, גם Γ גדול בריבוע מן Δ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. לפיכך נמצאו שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד, Δ , Γ , הכוללים מלבן רציונלי, וְ Γ גדול בריבוע מן Δ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו.

ובדומה יוכח הדבר גם בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, כאשר A גדול בריבוע מן B בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו.

למצוא שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן אמצעי, כך שהגדול יהיה גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו.

יונחו שלושה קווים רציונליים A , B , Γ בני־מידה בריבוע בלבד, כך ש־ A גדול בריבוע מן Γ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו; ויהי הריבוע שעל Δ שווה למלבן הכלול בין A , B . לפיכך הריבוע שעל Δ אמצעי, ולכן Δ אמצעי. ויהי המלבן הכלול בין E , Δ שווה למלבן הכלול בין Γ , B . ומאחר שכפי שהמלבן הכלול בין A , B אל המלבן הכלול בין Γ , B , כך A אל Γ , ואילו הריבוע שעל Δ שווה למלבן הכלול בין A , B והמלבן הכלול בין E , Δ שווה למלבן הכלול בין B , Γ לפיכך כפי ש־ A אל Γ , כך הריבוע שעל Δ אל המלבן הכלול בין E , Δ . וכפי שהריבוע שעל Δ אל המלבן הכלול בין E , Δ , כך Δ אל E ; לכן כפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל E . אך A בן־מידה בריבוע עם Γ ; לפיכך גם Δ בן־מידה בריבוע בלבד עם E . וְ Δ אמצעי; לכן גם E אמצעי. ומאחר שכפי ש־ A אל Γ , כך Δ אל E , ואילו A גדול בריבוע מן Γ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, גם Δ יהיה

גדול בריבוע מן E בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. אומר אני שגם המלבן הכלול בין E , Δ אמצעי. מאחר שהמלבן הכלול בין B , Γ שווה למלבן הכלול בין E , Δ , והמלבן הכלול בין B , Γ אמצעי, גם המלבן הכלול בין E , Δ אמצעי.

לפיכך נמצאו שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד, E , Δ , הכוללים מלבן אמצעי, כך שהגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו.

ושוב, בדומה יוכח הדבר גם בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, כאשר A גדול בריבוע מן Γ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו.

לָמָּה.

יהי $AB\Gamma$ משולש ישר־זווית שזווית A שלו ישרה, ויועבר האנך $\Delta\Delta$. אומר אני שהמלבן הכלול בין $B\Delta$, ΓB שווה לריבוע שעל BA ; שהמלבן הכלול בין $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ שווה לריבוע שעל ΓA ; שהמלבן הכלול בין $\Delta\Gamma$, $B\Delta$ שווה לריבוע שעל ΔA ; ועוד שהמלבן הכלול בין $\Delta\Delta$, $B\Gamma$ שווה למלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$.

ותחילה, שהמלבן הכלול בין $B\Delta$, ΓB שווה לריבוע שעל BA .

מאחר שבמשולש ישר־זווית הועבר מן הזווית הישרה אל הבסיס האנך $\Delta\Delta$, המשולשים $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ דומים הן למשולש השלם $AB\Gamma$ והן זה לזה. ומאחר שהמשולש $AB\Gamma$ דומה למשולש $AB\Delta$, כפי ש־ ΓB אל BA , כך BA אל $B\Delta$; לפיכך המלבן הכלול בין $B\Delta$, ΓB שווה לריבוע שעל AB .

מאותם טעמים גם המלבן הכלול בין $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $A\Gamma$.

ומאחר שאם במשולש ישר־זווית מועבר מן הזווית הישרה אנך אל הבסיס, האנך הוא ממוצע פרופורציונלי בין קטעי הבסיס, כפי ש־ BA אל AA , כך AA אל AF ; לפיכך המלבן הכלול בין BA , AF שווה לריבוע שעל AA .

אומר אני שגם המלבן הכלול בין AA , BF שווה למלבן הכלול בין BA , AF . מאחר שכפי שאמרנו המשולש ABF דומה ל־ ABD , כפי ש־ BF אל FA , כך BA אל AA . לפיכך המלבן הכלול בין AA , BF שווה למלבן הכלול בין BA , AF ; מש״ל.

למצוא שני קווים ישרים חסר־מידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי.

יונחו שני הקווים הרציונליים AB , BF , בני־המידה בריבוע בלבד, כך שהגדול AB גדול בריבוע מן הקטן BF בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ייחצה BF ב־ Δ ; בצמוד ל־ AB תיבנה מקבילית השווה לריבוע שעל אחד מן BA , AF ; וחסרה בצורת ריבוע, ויהי המלבן הכלול בין AE , EB . יתואר על AB חצי־המעגל AZB ; יועבר EZ בזווית ישרה ל־ AB ; ויחברו AZ , ZB .

מאחר ש־ AB , BF קווים לא־שווים, ו־ AB גדול בריבוע מן BF בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, ובצמוד ל־ AB נבנתה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל BF , כלומר לריבוע שעל חציו, וחסרה בצורת ריבוע, והיא יוצרת את המלבן הכלול בין AE , EB , לפיכך AE חסר־מידה באורך עם EB . וכפי ש־ AE אל EB , כך המלבן הכלול בין AE , BA אל המלבן הכלול בין AB , BE ; אך המלבן הכלול בין AE , BA שווה לריבוע שעל AZ , והמלבן הכלול בין AB , BE שווה לריבוע שעל BZ . לפיכך הריבוע שעל AZ חסר־מידה עם הריבוע שעל ZB , ולכן AZ , ZB חסר־מידה בריבוע. ומאחר ש־ AB רציונלי, גם הריבוע

שעל AB רציונלי; לפיכך גם סכום הריבועים שעל AZ, ZB רציונלי. ושוב, מאחר שהמלבן הכלול בין AE, EB שווה לריבוע שעל EZ, והונח שהוא שווה גם לריבוע שעל BA, הרי ZE שווה ל-BA. לפיכך BΓ כפול מ-ZE; ולכן המלבן הכלול בין AB, BΓ בן־מידה עם המלבן הכלול בין AB, EZ. אך המלבן הכלול בין AB, BΓ אמצעי; לפיכך גם המלבן הכלול בין AB, EZ אמצעי. והמלבן הכלול בין AB, EZ שווה למלבן הכלול בין AZ, ZB; לפיכך גם המלבן הכלול בין AZ, ZB אמצעי. וכבר הוכח שסכום הריבועים שעליהם רציונלי.

לפיכך נמצאו שני קווים ישרים חסרי־מידה בריבוע, AZ, ZB, כך שסכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי; כנדרש לעשות.

למצוא שני קווים ישרים חסרי־מידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי.

יונחו שני הקווים האמצעיים AB, BΓ, בני־המידה בריבוע בלבד והכוללים מלבן רציונלי, כך ש־AB גדול בריבוע מן BΓ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. יתואר על AB חצי־המעגל AΔB; ייחצה BΓ ב־E; ובצמוד ל־AB תיבנה המקבילית השווה לריבוע שעל BE וחסרה בצורת ריבוע, והיא המלבן הכלול בין AZ, ZB. לפיכך AZ חסר־מידה באורך עם ZB. ומ־Z יועבר ZΔ בזווית ישרה ל־AB, ויחברו AB, ΔA.

מאחר ש־AZ חסר־מידה עם ZB, גם המלבן הכלול בין AZ, BA חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB, BZ. אך המלבן הכלול בין AZ, BA שווה לריבוע שעל ΔA, והמלבן הכלול בין AB, BZ שווה לריבוע שעל ΔB; לפיכך גם הריבוע שעל ΔA חסר־מידה עם הריבוע שעל ΔB. ומאחר שהריבוע שעל AB אמצעי, גם סכום הריבועים שעל ΔA, ΔB אמצעי. ומאחר ש־BΓ כפול מ־AZ, ΔZ,

גם המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ כפול מן המלבן הכלול בין AB , $Z\Delta$. אך המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ רציונלי; לפיכך גם המלבן הכלול בין AB , $Z\Delta$ רציונלי. והמלבן הכלול בין AB , $Z\Delta$ שווה למלבן הכלול בין $A\Delta$, ΔB ; ולכן גם המלבן הכלול בין $A\Delta$, ΔB רציונלי.

לפיכך נמצאו שני קווים ישרים חסרי־מידה בריבוע, $A\Delta$, ΔB , כך שסכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי; כנדרש לעשות.

למצוא שני קווים ישרים חסרי־מידה בריבוע, כך שגם סכום הריבועים שעליהם אמצעי וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שהמלבן חסר־מידה עם סכום הריבועים שעליהם.

יונחו שני הקווים האמצעיים AB , $B\Gamma$, בני־המידה בריבוע בלבד והכוללים מלבן אמצעי, כך ש־ AB גדול בריבוע מן $B\Gamma$ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; יתואר על AB חצי־המעגל $A\Delta B$, ושאר הבנייה תיעשה בדומה לבניות שלמעלה.

ומאחר ש־ AZ חסר־מידה באורך עם ZB , גם $A\Delta$ חסר־מידה בריבוע עם ΔB . ומאחר שהריבוע שעל AB אמצעי, גם סכום הריבועים שעל $A\Delta$, ΔB אמצעי. ומאחר שהמלבן הכלול בין AZ , ZB שווה לריבוע שעל כל אחד מן BE , ΔZ , הרי BE שווה ל־ ΔZ ; לפיכך $B\Gamma$ כפול מ־ ΔZ , ולכן גם המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ כפול מן המלבן הכלול בין AB , $Z\Delta$. אך המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ אמצעי; לפיכך גם המלבן הכלול בין AB , $Z\Delta$ אמצעי. והוא שווה למלבן הכלול בין $A\Delta$, ΔB ; לכן גם המלבן הכלול בין $A\Delta$, ΔB אמצעי. ומאחר ש־ AB חסר־מידה באורך עם $B\Gamma$, ואילו ΓB בת־מידה עם BE , גם AB חסר־מידה באורך עם BE ; לפיכך הריבוע שעל AB חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB , BE . אך

סכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$ שווה לריבוע שעל AB , והמלבן הכלול בין $AB, \Delta Z$, כלומר המלבן הכלול בין $\Delta A, \Delta B$, שווה למלבן הכלול בין AB, BE . לפיכך סכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$ חסר־מידה עם המלבן הכלול בין $\Delta A, \Delta B$.

לפיכך נמצאו שני הקווים הישרים $\Delta A, \Delta B$, חסר־המידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שהמלבן חסר־מידה עם סכום הריבועים שעליהם; כנדרש לעשות.

אם מחברים שני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, הקו השלם אי־רציונלי, ויקרא דו־איברי.

יחברו שני הקווים הרציונליים AB, BF , בני־המידה בריבוע בלבד. אומר אני שהשלם AF אי־רציונלי.

מאחר ש־ AB חסר־מידה באורך עם BF — שהרי הם בני־מידה בריבוע בלבד — וכפי ש־ AB אל BF , כך המלבן הכלול בין AB, BF אל הריבוע שעל BF , הרי המלבן הכלול בין AB, BF חסר־מידה עם הריבוע שעל BF . אך פעמיים המלבן הכלול בין AB, BF בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם, וסכום הריבועים שעל AB, BF בן־מידה עם הריבוע שעל BF , שהרי AB, BF רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. לפיכך פעמיים המלבן הכלול בין AB, BF חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל AB, BF . ובצירוף, פעמיים המלבן הכלול בין AB, BF יחד עם הריבועים שעל AB, BF , כלומר הריבוע שעל AF , חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל AB, BF . אך סכום הריבועים שעל AB, BF רציונלי; לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ומכאן גם AF אי־רציונלי. הוא ייקרא דו־איברי; מש״ל.

אם מחברים שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן רציונלי, הקו השלם אי־רציונלי, וייקרא דו־אמצעי ראשון.

יחברו שני הקווים האמצעיים AB , BF , בני־המידה בריבוע בלבד והכוללים מלבן רציונלי. אומר אני שהשלם AF אי־רציונלי.

מאחר ש־ AB חסר־מידה באורך עם BF , סכום הריבועים שעל AB , BF חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. ובצירוף, סכום הריבועים שעל AB , BF יחד עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, שהוא הריבוע שעל AF , חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB , BF . אך המלבן הכלול בין AB , BF רציונלי, שהרי הונח שהם כוללים מלבן רציונלי. לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ולכן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא דו־אמצעי ראשון; מש״ל.

אם מחברים שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן אמצעי, הקו השלם אי־רציונלי, וייקרא דו־אמצעי שני.

יחברו שני הקווים האמצעיים AB , BF , בני־המידה בריבוע בלבד והכוללים מלבן אמצעי. אומר אני ש־ AF אי־רציונלי.

יונח הקו הרציונלי AE , ובצמוד ל־ AE ייבנה ΔZ השווה לריבוע שעל AF ויצור את הרוחב ΔH . ומאחר שהריבוע שעל AF שווה לסכום הריבועים שעל AB , BF ולפעמיים המלבן הכלול בין AB , BF , ייבנה אפוא בצמוד ל־ AE השטח $E\Theta$ השווה לסכום הריבועים שעל AB , BF ; לפיכך השארית ΘZ שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB , BF . ומאחר שכל אחד מן AB , BF אמצעי, גם הריבועים שעליהם אמצעיים. והונח שגם פעמיים המלבן הכלול בין AB , BF אמצעי. ו־ $E\Theta$ שווה לסכום הריבועים שעל AB , BF , ואילו ΘZ שווה

לפעמיים המלבן הכלול ביניהם; לפיכך כל אחד מן $E\Theta$, ΘZ אמצעי. והם בנויים בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לכן כל אחד מן $\Delta\Theta$, ΘH רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . ומאחר ש־ AB חסר־מידה באורך עם $B\Gamma$, וכפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל AB אל המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, הריבוע שעל AB חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$. אך סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ בן־מידה עם הריבוע שעל AB , ופעמיים המלבן הכלול ביניהם בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. לפיכך סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. אך $E\Theta$ שווה לסכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$, ו־ ΘZ שווה לפעמיים המלבן הכלול ביניהם; לכן $E\Theta$ חסר־מידה עם ΘZ , ומכאן $\Delta\Theta$ חסר־מידה באורך עם ΘH . לפיכך $\Delta\Theta$, ΘH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ולכן ΔH אי־רציונלי. אך ΔE רציונלי, והמלבן הכלול בין קו אי־רציונלי לקו רציונלי הוא אי־רציונלי; לפיכך השטח ΔZ אי־רציונלי, וגם הקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי. ו־ AF הוא הקו שריבועו שווה ל־ ΔZ ; לכן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא דו־אמצעי שני; מש״ל.

אם מחברים שני קווים ישרים חסרי־מידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי, הקו השלם אי־רציונלי, וייקרא הקו הגדול.

יחברו שני הקווים הישרים AB , $B\Gamma$, חסרי־המידה בריבוע והמקיימים את התנאים האמורים. אומר אני ש־ AF אי־רציונלי.

מאחר שהמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ אמצעי, גם פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. ואילו סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ רציונלי; לפיכך פעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$. לכן גם

סכום הריבועים שעל AB, BF יחד עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, שהוא הריבוע שעל AF , חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל AB, BF . לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ומכאן גם AF אי־רציונלי. הוא ייקרא הקו הגדול; מש"ל.

אם מחברים שני קווים ישרים חסר־מידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי, הקו השלם אי־רציונלי, ויקרא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

יחברו שני הקווים הישרים AB, BF , חסר־המידה בריבוע והמקיימים את התנאים האמורים. אומר אני ש־ AF אי־רציונלי.

מאחר שסכום הריבועים שעל AB, BF אמצעי, ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי, סכום הריבועים שעל AB, BF חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. לכן גם הריבוע שעל AF חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין AB, BF . אך פעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי; לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ולכן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי; מש"ל.

אם מחברים שני קווים ישרים חסר־מידה בריבוע, כך שגם סכום הריבועים שעליהם אמצעי וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שהמלבן חסר־מידה עם סכום הריבועים שעליהם, הקו השלם אי־רציונלי, ויקרא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

יחברו שני הקווים הישרים AB, BF , חסר־המידה בריבוע והמקיימים את התנאים האמורים. אומר אני ש־ AF אי־רציונלי.

יונח הקו הרציונלי ΔE ; בצמוד ל- ΔE ייבנה ΔZ השווה לסכום הריבועים שעל AB, BF , ו- $H\Theta$ השווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB, BF . לפיכך השלם $\Theta\Delta$ שווה לריבוע שעל AF . ומאחר שסכום הריבועים שעל AB, BF אמצעי ושווה ל- ΔZ , גם ΔZ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לפיכך ΔH רציונלי וחסר-מידה באורך עם ΔE . מאותם טעמים גם HK רציונלי וחסר-מידה באורך עם HZ , כלומר עם ΔE . ומאחר שסכום הריבועים שעל AB, BF חסר-מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, ΔZ חסר-מידה עם $H\Theta$; לפיכך גם ΔH חסר-מידה עם HK . והם רציונליים; לכן $HK, \Delta H$ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔK הוא הקו האי-רציונלי הנקרא דו־איברי. אך ΔE רציונלי; לפיכך $\Theta\Delta$ אי-רציונלי, וגם הקו שריבועו שווה לו אי-רציונלי. ו- AF הוא הקו שריבועו שווה ל- $\Theta\Delta$; לכן AF אי-רציונלי. הוא ייקרא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים; מש"ל.

לְמָה.

כדי להוכיח שהקווים האי-רציונליים האמורים נחלקים בדרך אחת בלבד לקווים שמהם הם מורכבים ושיוצרים את הסוגים שנקבעו, נקדים תחילה לְמָה זו:

יונח הקו הישר AB , והשלם ייחתך לחלקים לא־שווים בכל אחת מן הנקודות Γ, Δ ; ויונח AF גדול מ- ΔB . אומר אני שסכום הריבועים שעל $AF, \Gamma B$ גדול מסכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$.

ייחצה AB ב- E . ומאחר ש- AF גדול מ- ΔB , תיגרע משניהם $\Delta\Gamma$ המשותפת; לפיכך השארית ΔA גדולה מן השארית ΓB . אך AE שווה ל- EB ; לכן ΔE קטן מ- EF , ומכאן הנקודות Γ, Δ אינן מרוחקות במידה שווה מנקודת החצייה.

ומאחר שהמלבן הכלול בין AF , FB בצירוף הריבוע שעל EF שווה לריבוע שעל EB , וגם המלבן הכלול בין AD , DB בצירוף הריבוע שעל DE שווה לריבוע שעל EB , הרי המלבן הכלול בין AF , FB בצירוף הריבוע שעל EF שווה למלבן הכלול בין AD , DB בצירוף הריבוע שעל DE . אך הריבוע שעל DE קטן מן הריבוע שעל EF ; לפיכך המלבן הכלול בין AF , FB קטן מן המלבן הכלול בין AD , DB , ולכן גם פעמיים המלבן הראשון קטן מפעמיים השני. מכאן השארית, סכום הריבועים שעל AF , FB , גדולה מסכום הריבועים שעל AD , DB ; מש"ל.

הקו הדו־איברי נחלק לאיבריו בנקודה אחת בלבד.

יהי AB קו דו־איברי המחולק לאיבריו בנקודה Γ ; לפיכך AF , FB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת לשני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד.

שאם אפשר, ייחלק גם $B\Delta$, כך שגם AD , DB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ברור ש־ AF אינו שווה ל־ AB . שאם אפשר, יהי שווה; אז גם AD יהיה שווה ל־ FB , וכפי ש־ AF אל FB , כך $B\Delta$ אל AD ; ו־ AB יהיה מחולק ב־ Δ באותו אופן שבו הוא מחולק ב־ Γ , בניגוד להנחה. לפיכך AF אינו שווה ל־ AB , ומשום כך הנקודות Γ , Δ אינן מרוחקות במידה שווה מנקודת החצייה. לכן באותה מידה שסכום הריבועים שעל AF , FB שונה מסכום הריבועים שעל AD , DB , שונה גם פעמיים המלבן הכלול בין AD , DB מפעמיים המלבן בין AF , FB , מפני שכל אחד מסכומי הריבועים בצירוף פעמיים המלבן המתאים שווה לריבוע שעל AB . אך סכום הריבועים שעל AF , FB שונה מסכום הריבועים שעל AD , DB בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים;

לפיכך גם פעמיים המלבן הכלול בין ΔA , ΔB שונה מפעמיים המלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔB בשטח רציונלי, אף ששניהם אמצעיים; וזה מגוחך, שהרי שטח אמצעי אינו עולה על שטח אמצעי בשטח רציונלי.

לפיכך הקו הדו־איברי אינו נחלק בנקודות שונות; לכן הוא נחלק בנקודה אחת בלבד; מש"ל.

הדו־אמצעי הראשון נחלק בנקודה אחת בלבד.

יהי AB דו־אמצעי ראשון המחולק ב־ Γ , כך ש־ $\Delta \Gamma$, ΔB אמצעיים, בני־מידה בריבוע בלבד וכוללים מלבן רציונלי. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת.

שאם אפשר, ייחלק גם ב־ Δ , כך שגם ΔA , ΔB אמצעיים, בני־מידה בריבוע בלבד וכוללים מלבן רציונלי. מאחר שבאותה מידה שפעמיים המלבן הכלול בין ΔA , ΔB שונה מפעמיים המלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔB , שונה סכום הריבועים שעל $\Delta \Gamma$, ΔB מסכום הריבועים שעל ΔA , ΔB ; ופעמיים המלבן הכלול בין ΔA , ΔB שונה מפעמיים המלבן הכלול בין $\Delta \Gamma$, ΔB בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לפיכך גם סכום הריבועים שעל $\Delta \Gamma$, ΔB שונה מסכום הריבועים שעל ΔA , ΔB בשטח רציונלי, אף ששניהם אמצעיים; וזה מגוחך.

לפיכך הדו־אמצעי הראשון אינו נחלק לאיבריו בנקודות שונות; לכן הוא נחלק בנקודה אחת בלבד; מש"ל.

הדו־אמצעי השני נחלק בנקודה אחת בלבד.

יהי AB דו־אמצעי שני המחולק ב־ Γ , כך ש־ ΓB , AF , אמצעיים, בני־מידה בריבוע בלבד וכוללים מלבן אמצעי. ברור אפוא ש־ Γ אינו נקודת החצייה, מפני שהם אינם בני־מידה באורך. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת.

שאם אפשר, ייחלק גם ב־ Δ , כך ש־ AF אינו שווה ל־ ΔB אלא, על־פי ההנחה, AF גדול ממנו. ברור אפוא שגם סכום הריבועים שעל AB , AD קטן מסכום הריבועים שעל ΓB , AF , כפי שהוכחנו לעיל; וש־ ΔB , AD אמצעיים, בני־מידה בריבוע בלבד וכוללים מלבן אמצעי. ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה המלבן ישר־הזווית EK השווה לריבוע שעל AB , וממנו ייגרע EH השווה לסכום הריבועים שעל ΓB , AF ; לפיכך השארית ΘK שווה לפעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF . ושוב, ייגרע EA השווה לסכום הריבועים שעל ΔB , AD , אשר הוכח שהוא קטן מסכום הריבועים שעל ΓB , AF ; לפיכך השארית MK שווה לפעמיים המלבן הכלול בין ΔB , AD . ומאחר שהריבועים שעל ΓB , AF אמצעיים, EH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ; לפיכך $E\Theta$ רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . מאותם טעמים גם ΘN רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר ש־ ΓB , AF אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, AF חסר־מידה באורך עם ΓB . וכפי ש־ AF אל ΓB , כך הריבוע שעל AF אל המלבן הכלול בין ΓB , AF ; לפיכך הריבוע שעל AF חסר־מידה עם המלבן הכלול בין ΓB , AF . אך סכום הריבועים שעל ΓB , AF בן־מידה עם הריבוע שעל AF , שהרי ΓB , AF בני־מידה בריבוע; ופעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. לפיכך סכום הריבועים שעל ΓB , AF חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF . אך EH שווה לסכום הריבועים שעל ΓB , AF , ו־ ΘK שווה לפעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF ; לפיכך EH חסר־מידה עם ΘK , ומכאן גם $E\Theta$ חסר־מידה באורך עם ΘN . והם רציונליים; לפיכך $E\Theta$,

ΘN רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ואם מחברים שני קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד, השלם הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־איברי; לפיכך EN דו־איברי המחולק ב־ Θ . מאותם טעמים יוכח שגם EM, MN רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; וכך EN יהיה דו־איברי המחולק בשתי נקודות שונות, Θ ו־ M . ואין $E\Theta$ שווה ל־ MN , מפני שסכום הריבועים שעל AG, GB גדול מסכום הריבועים שעל $AB, \Delta A$. אך סכום הריבועים שעל $AB, \Delta A$ המלבן הכלול בין $AB, \Delta A$; לפיכך, על אחת כמה וכמה, סכום הריבועים שעל AG, GB , כלומר EH , גדול מפעמיים המלבן הכלול בין $AB, \Delta A$, כלומר MK ; ומכאן גם $E\Theta$ גדול מ־ MN . לכן $E\Theta$ אינו שווה ל־ MN ; מש״ל.

הקו הגדול נחלק בנקודה אחת ויחידה.

יהי AB הקו הגדול המחולק ב־ Γ , כך ש־ AG, GB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת.

שאם אפשר, ייחלק גם ב־ Δ , כך שגם $AB, \Delta A$ חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי. ומאחר שבאותה מידה שסכום הריבועים שעל AG, GB שונה מסכום הריבועים שעל $AB, \Delta A$, שונה גם פעמיים המלבן הכלול בין $AB, \Delta A$ מפעמיים המלבן הכלול בין AG, GB ; ואילו סכום הריבועים שעל AG, GB עולה על סכום הריבועים שעל $AB, \Delta A$ בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לפיכך גם פעמיים המלבן הכלול בין $AB, \Delta A$ עולה על פעמיים המלבן הכלול בין AG, GB בשטח רציונלי, אף ששניהם אמצעיים; וזה בלתי־אפשרי. לפיכך הקו הגדול אינו נחלק בנקודות שונות; לכן הוא נחלק בנקודה אחת ויחידה; מש״ל.

הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי נחלק בנקודה אחת בלבד.

יהי AB קו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי, המחולק ב־ Γ , כך ש־ AG , GB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת.

שאם אפשר, ייחלק גם ב־ Δ , כך שגם ΔB , ΔA חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי. ומאחר שבאותה מידה שפעמיים המלבן הכלול בין AG , GB שונה מפעמיים המלבן הכלול בין ΔA , ΔB , שונה גם סכום הריבועים שעל ΔB , ΔA מסכום הריבועים שעל AG , GB ; ואילו פעמיים המלבן הכלול בין AG , GB עולה על פעמיים המלבן הכלול בין ΔA , ΔB בשטח רציונלי; לפיכך גם סכום הריבועים שעל ΔA , ΔB עולה על סכום הריבועים שעל AG , GB בשטח רציונלי, אף ששניהם אמצעיים; וזה בלתי־אפשרי. לפיכך הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי אינו נחלק בנקודות שונות; לכן הוא נחלק בנקודה אחת; מש״ל.

הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים נחלק בנקודה אחת בלבד.

יהי AB מחולק ב־ Γ , כך ש־ AG , GB חסרי־מידה בריבוע, גם סכום הריבועים שעליהם וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעיים, ועוד שהמלבן חסר־מידה עם סכום הריבועים שעליהם. אומר אני ש־ AB אינו נחלק בנקודה אחרת תוך קיום התנאים האמורים.

שאם אפשר, ייחלק ב־ Δ ; ושוב, ברור ש־ AG אינו שווה ל־ ΔB , אלא יונח ש־ AG גדול ממנו. ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה לסכום הריבועים שעל AG , GB , ו־ ΘK השווה לפעמיים המלבן הכלול בין AG ,

ΓB ; לפיכך השלם EK שווה לריבוע שעל AB . ושוב, בצמוד ל־ EZ ייבנה EA השווה לסכום הריבועים שעל AB , AD ; לפיכך השארית MK שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB , AD . ומאחר שלפי ההנחה סכום הריבועים שעל AF , ΓB אמצעי, גם EH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ; לפיכך OE רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . מאותם טעמים גם ON רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר שסכום הריבועים שעל ΓB , AF חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF , גם EH חסר־מידה עם HN ; ולפיכך גם EO חסר־מידה עם ON . והם רציונליים; לכן ON , EO רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EN דו־איברי המחולק ב־ Θ . ובדומה נוכיח שהוא מחולק גם ב־ M . ואין EO שווה ל־ MN ; לפיכך הקו הדו־איברי מחולק בנקודות שונות, וזה אבסורד. לכן הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים אינו נחלק בנקודות שונות; לפיכך הוא נחלק בנקודה אחת בלבד.

בהינתן קו רציונלי וקו דו־איברי המחולק לאיבריו, כך שהריבוע שעל האיבר הגדול גדול מן הריבוע שעל הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם הגדול: אם האיבר הגדול בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, ייקרא השלם קו דו־איברי ראשון.

ואם האיבר הקטן בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, ייקרא השלם קו דו־איברי שני.

ואם אף אחד משני האיברים אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, ייקרא השלם קו דו־איברי שלישי.

ושוב, אם הריבוע שעל האיבר הגדול גדול מן הריבוע שעל הקטן בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם הגדול: אם האיבר הגדול בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, יקרא השלם קו דו־איברי רביעי.

ואם האיבר הקטן בן־מידה עמו, יקרא השלם קו דו־איברי חמישי.

ואם אף אחד משניהם אינו בן־מידה עמו, יקרא השלם קו דו־איברי שישי.

למצוא קו דו־איברי ראשון.

יונחו שני המספרים AG , ΓB , כך שלסכומם AB אל $B\Gamma$ יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ואילו אל ΓA לא יהיה לו היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח קו רציונלי כלשהו Δ , ויהי EZ בן־מידה באורך עם Δ ; לפיכך גם EZ רציונלי. ויעשה כפי שהמספר BA אל AG , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH . אך ל־ AB אל AG היחס אשר למספר אל מספר; לכן גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH היחס אשר למספר אל מספר, ומכאן הריבוע שעל EZ בן־מידה עם הריבוע שעל ZH . ו־ EZ רציונלי; לפיכך גם ZH רציונלי. ומאחר שלמספר BA אל AG אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם ZH . לכן EZ , ZH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EH דו־איברי.

אומר אני שהוא גם הראשון.

שהרי כפי שהמספר BA אל AG , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH ; ומאחר ש־ BA גדול מ־ AG , גם הריבוע שעל EZ גדול מן הריבוע שעל ZH . יהיו אפוא הריבועים שעל Θ , ZH יחד שווים לריבוע שעל EZ . ומאחר שכפי

שהמספר BA אל ΓA , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH, בהמרה כפי ש-AB אל ΓB , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל Θ . אך ל-AB אל ΓB היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל Θ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך EZ בן־מידה באורך עם Θ ; ומכאן EZ גדול בריבוע מן ZH בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד ZH, EZ, רציונליים, ו-EZ בן־מידה באורך עם Δ .

לפיכך EH הוא קו דו־איברי ראשון; מש"ל.

למצוא קו דו־איברי שני.

יונחו שני המספרים ΓA , ΓB , כך שלסכומם AB אל ΓB יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ואילו אל ΓA לא יהיה לו היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח הקו הרציונלי Δ , ויהי EZ בן־מידה באורך עם Δ ; לפיכך EZ רציונלי. ויעשה גם כפי שהמספר ΓA אל AB, כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH; לפיכך הריבוע שעל EZ בן־מידה עם הריבוע שעל ZH, ומכאן גם ZH רציונלי. ומאחר שלמספר ΓA אל AB אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם ZH; לכן ZH, EZ, רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EH דו־איברי.

יש להוכיח אפוא שהוא גם השני.

שהרי בהיפוך, כפי שהמספר BA אל ΓA , כך הריבוע שעל HZ אל הריבוע שעל ZE; ומאחר ש-BA גדול מ־ ΓA , הריבוע שעל HZ גדול מן הריבוע שעל ZE. יהיו הריבועים שעל Θ , EZ, יחד שווים לריבוע שעל HZ; לפיכך בהמרה

כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל Θ . אך ל־ AB אל $B\Gamma$ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל Θ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH בן־מידה באורך עם Θ ; ומכאן ZH גדול בריבוע מן ZE בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד ZE , ZH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ו־ EZ , האיבר הקטן, בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון Δ .

לפיכך EH הוא קו דו־איברי שני; מש״ל.

למצוא קו דו־איברי שלישי.

יונחו שני המספרים $A\Gamma$, ΓB אל AB שלסכומם $B\Gamma$ יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ואילו אל $A\Gamma$ לא יהיה לו היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח גם מספר אחר Δ שאינו ריבועי, ושאל אף אחד מן BA , $A\Gamma$ לא יהיה לו היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח קו ישר רציונלי כלשהו E , ויעשה כפי ש־ Δ אל AB , כך הריבוע שעל E אל הריבוע שעל ZH ; לפיכך הריבוע שעל E בן־מידה עם הריבוע שעל ZH . ו־ E רציונלי; לכן גם ZH רציונלי. ומאחר ש־ Δ אל AB אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל E אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך E חסר־מידה באורך עם ZH . ושוב ייעשה כפי שהמספר BA אל $A\Gamma$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$; לפיכך הריבוע שעל ZH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Theta$. אך ZH רציונלי; לכן גם $H\Theta$ רציונלי. ומאחר ש־ BA אל $A\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל ΘH אין היחס אשר

למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם $H\Theta$. לכן $ZH, H\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $Z\Theta$ דו־איברי.

אומר אני שהוא גם השלישי.

שהרי כפי ש־ Δ אל AB , כך הריבוע שעל E אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש־ BA אל AG , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$. לפיכך בשוויון, כפי ש־ Δ אל AG , כך הריבוע שעל E אל הריבוע שעל $H\Theta$. אך ל־ Δ אל AG אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל E אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן E חסר־מידה באורך עם $H\Theta$. ומאחר שכפי ש־ BA אל AG , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$, הריבוע שעל ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$. יהיו אפוא הריבועים שעל $K, H\Theta$ יחד שווים לריבוע שעל ZH ; ובהמרה, כפי ש־ AB אל BF , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K . אך ל־ AB אל BF היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך ZH בן־מידה באורך עם K . מכאן ZH גדול בריבוע מן $H\Theta$ בריבוע שעל K בן־מידה באורך עמו. ועוד $ZH, H\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ואף אחד מהם אינו בן־מידה באורך עם E .

לפיכך $Z\Theta$ הוא קו דו־איברי שלישי; מש״ל.

למצוא קו דו־איברי רביעי.

יונחו שני המספרים AG, GB , כך של־ AB אל אף אחד מן AG, BF לא יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח הקו הרציונלי Δ , ויהי EZ

בן־מידה באורך עם Δ ; לפיכך גם EZ רציונלי. ויעשה כפי שהמספר BA אל AF , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH ; לפיכך הריבוע שעל EZ בן־מידה עם הריבוע שעל ZH , ומכאן גם ZH רציונלי. ומאחר של־ BA אל AF אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם ZH . לכן EZ , ZH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EH דו־איברי.

אומר אני שהוא גם הרביעי.

שהרי כפי ש־ BA אל AF , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH ; לפיכך הריבוע שעל EZ גדול מן הריבוע שעל ZH . יהיו אפוא הריבועים שעל ZH , Θ יחד שווים לריבוע שעל EZ ; ובהמרה כפי שהמספר AB אל BF , כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל Θ . אך ל־ AB אל BF אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל Θ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם Θ ; ומכאן EZ גדול בריבוע מן HZ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד EZ , ZH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ו־ EZ בן־מידה באורך עם Δ .

לפיכך EH הוא קו דו־איברי רביעי; מש״ל.

למצוא קו דו־איברי חמישי.

יונחו שני המספרים AF , FB , כך של־ AB אל כל אחד מהם לא יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח קו ישר רציונלי כלשהו Δ , ויהי EZ בן־מידה באורך עם Δ ; לפיכך EZ רציונלי. ויעשה כפי ש־ ΓA אל AB , כך

הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH. אך ל־ ΓA אל AB אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH, EZ, רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EH דו־איברי.

אומר אני שהוא גם החמישי.

שהרי כפי ש־ ΓA אל AB, כך הריבוע שעל EZ אל הריבוע שעל ZH, ובהיפוך כפי ש־BA אל ΓA , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל ZE; לפיכך הריבוע שעל HZ גדול מן הריבוע שעל ZE. יהיו אפוא הריבועים שעל Θ , EZ, יחד שווים לריבוע שעל HZ; ובהמרה כפי שהמספר AB אל ΓB , כך הריבוע שעל HZ אל הריבוע שעל Θ . אך ל־AB אל ΓB אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל Θ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם Θ ; ומכאן ZH גדול בריבוע מן ZE בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד ZE, HZ, רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ו־EZ, האיבר הקטן, בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון Δ .

לפיכך EH הוא קו דו־איברי חמישי; מש״ל.

למצוא קו דו־איברי שישי.

יונחו שני המספרים ΓB , ΓA , כך של־AB אל כל אחד מהם לא יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויהי גם מספר אחר Δ , שאינו ריבועי ושאל אף אחד מן ΓA , BA, אין לו היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויונח קו ישר רציונלי כלשהו E, ויעשה כפי ש־ Δ אל AB, כך הריבוע שעל E

אל הריבוע שעל ZH ; לפיכך הריבוע שעל E בן־מידה עם הריבוע שעל ZH .
 E רציונלי; לכן גם ZH רציונלי. ומאחר של־ Δ אל AB אין היחס אשר למספר
ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל E אל הריבוע שעל ZH אין היחס
אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך E חסר־מידה באורך עם ZH .
ושוב ייעשה כפי ש־ BA אל AF , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$;
לפיכך הריבוע שעל ZH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Theta$. מכאן הריבוע שעל
 $H\Theta$ רציונלי, ולכן $H\Theta$ רציונלי. ומאחר של־ BA אל AF אין היחס אשר למספר
ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס
אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם $H\Theta$.
לכן $H\Theta$, ZH , רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $Z\Theta$ דו־איברי.

יש להוכיח אפוא שהוא גם השישי.

שהרי כפי ש־ Δ אל AB , כך הריבוע שעל E אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש־ BA
אל AF , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$. לפיכך בשוויון, כפי ש־ Δ
אל AF , כך הריבוע שעל E אל הריבוע שעל $H\Theta$. אך ל־ Δ אל AF אין היחס
אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל E אל הריבוע שעל
 $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן E חסר־מידה
באורך עם $H\Theta$. וכבר הוכח שהוא חסר־מידה גם עם ZH ; לפיכך כל אחד מן
 $H\Theta$, ZH , חסר־מידה באורך עם E . ומאחר שכפי ש־ BA אל AF , כך הריבוע
שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$, הריבוע שעל ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$.
יהיו אפוא הריבועים שעל K , $H\Theta$, יחד שווים לריבוע שעל ZH ; ובהמרה כפי
ש־ AB אל BF , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K . אך ל־ AB אל BF
אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל
הריבוע שעל K אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH

חסר־מידה באורך עם K; ומכאן ZH גדול בריבוע מן $H\Theta$ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד $H\Theta$, ZH, רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ואף אחד מהם אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון E.

לפיכך $Z\Theta$ הוא קו דו־איברי שישי; מש״ל.

לְמַדָּה.

יהיו AB, BΓ שני ריבועים, ויונחו כך ש־ AB^{-} ו־ BE^{-} בקו ישר; לפיכך גם ZB ו־ BH^{-} בקו ישר. ויושלם המקבילית AΓ. אומר אני ש־ $A\Gamma^{-}$ ריבוע, ש־ ΔH^{-} הוא ממוצע פרופורציונלי בין AB, BΓ, ועוד ש־ $\Delta\Gamma^{-}$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין AΓ, ΓB.

שכן ΔB שווה ל־BZ, ו־ BE^{-} שווה ל־BH; לפיכך השלם ΔE שווה לשלם ZH. אך ΔE שווה לכל אחד מן $A\Theta$, KΓ, ו־ ZH^{-} שווה לכל אחד מן $\Theta\Gamma$, AK; לפיכך גם כל אחד מן $A\Theta$, KΓ שווה לכל אחד מן $\Theta\Gamma$, AK. לכן המקבילית AΓ שוות־צלעות; והיא גם ישרת־זווית; לפיכך AΓ ריבוע.

ומאחר שכפי ש־ ZB^{-} אל BH, כך ΔB אל BE; אך כפי ש־ ZB^{-} אל BH, כך AB אל ΔH , וכפי ש־ ΔB^{-} אל BE, כך ΔH אל BΓ; לפיכך כפי ש־ AB^{-} אל ΔH , כך ΔH אל BΓ. לכן ΔH הוא ממוצע פרופורציונלי בין AB, BΓ.

אומר אני שגם $\Delta\Gamma$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין AΓ, ΓB.

שהרי כפי ש־ AD אל AK, כך KH אל HΓ, מפני שכל אחד שווה לכל אחד; ובהרכבה כפי ש־ AK אל KΔ, כך KΓ אל ΓH. אך כפי ש־ AK אל KΔ, כך AΓ

אל $\Gamma\Delta$, וכפי ש־ $K\Gamma$ אל ΓH , כך $\Delta\Gamma$ אל ΓB ; לפיכך כפי ש־ $A\Gamma$ אל $\Delta\Gamma$, כך $\Delta\Gamma$ אל $B\Gamma$. לכן $\Delta\Gamma$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין ΓB , $A\Gamma$; וזה מה שהיה להוכיח.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי ראשון, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־איברי.

יהי אפוא השטח $A\Gamma$ כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי הראשון $A\Delta$. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח $A\Gamma$ הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־איברי.

מאחר ש־ $A\Delta$ הוא דו־איברי ראשון, ייחלק לאיבריו E , ויהי AE האיבר הגדול. ברור אפוא ש־ EA , AE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ש־ AE גדול בריבוע מן EA בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, וש־ AE בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון AB . ייחצה EA בנקודה Z . ומאחר ש־ AE גדול בריבוע מן EA בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, אם בצמוד לגדול AE נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן, כלומר לריבוע שעל EZ , וחסרה בצורת ריבוע, היא מחלקת אותו לחלקים בני־מידה. תיבנה אפוא בצמוד ל־ AE המקבילית, המלבן הכלול בין HE , AH , השווה לריבוע שעל EZ ; לפיכך AH בן־מידה באורך עם EH . ומן H , E , Z יועברו המקבילים HA , EK , ZA לכל אחד מן ΓA , AB . וייבנה הריבוע ΣN השווה למקבילית $A\Theta$ והריבוע NP השווה ל־ HK , ויונחו כך ש־ MN ו־ NE בקו ישר; לפיכך גם PN ו־ NO בקו ישר. ותושלם המקבילית $\Sigma\P$; לפיכך $\Sigma\P$ ריבוע. ומאחר שהמלבן הכלול בין AH , HE שווה לריבוע שעל EZ , כפי ש־ AH אל EZ , כך ZE אל EH ; ולכן גם כפי ש־ $A\Theta$ אל EA , כך EA אל KH . לפיכך EA הוא ממוצע פרופורציונלי בין $A\Theta$, HK . אך $A\Theta$ שווה ל־ ΣN , ו־ HK שווה ל־ NP ; לכן EA הוא ממוצע

פרופורציונלי בין ΣN , $N\Pi$ וגם MP הוא ממוצע פרופורציונלי בין אותם ΣN , $N\Pi$; לפיכך EA שווה ל- MP , ומכאן הוא שווה גם ל- OE . ועוד AO , HK שווים ל- ΣN , $N\Pi$; לפיכך השלם AF שווה לשלם $\Sigma\Pi$, כלומר לריבוע שעל ME . לכן ריבועו של ME שווה ל- AF .

אומר אני ש- ME דו־איברי.

מאחר ש- AH בן־מידה עם HE , גם AE בן־מידה עם כל אחד מן AH , HE . אך הונח גם ש- AE בן־מידה עם AB ; לכן גם AH , HE בני־מידה עם AB . ו- AB רציונלי; לפיכך גם כל אחד מן AH , HE רציונלי. לכן כל אחד מן AO , HK רציונלי, ו- AO בן־מידה עם HK . אך AO שווה ל- ΣN ו- HK שווה ל- $N\Pi$; לפיכך גם ΣN , $N\Pi$, כלומר הריבועים שעל MN , NE , רציונליים ובני־מידה. ומאחר ש- AE חסר־מידה באורך עם EA , ואילו AE בן־מידה עם AH ו- AE בן־מידה עם EZ , גם AH חסר־מידה עם EZ ; ולכן AO חסר־מידה עם EA . אך AO שווה ל- ΣN ו- EA שווה ל- MP ; לפיכך גם ΣN חסר־מידה עם MP . וכפי ש- ΣN אל MP , כך ON אל NP ; לפיכך ON חסר־מידה עם NP . אך ON שווה ל- MN ו- NP שווה ל- NE ; לכן MN חסר־מידה עם NE . והריבוע שעל MN בן־מידה עם הריבוע שעל NE , וכל אחד מהם רציונלי; לפיכך MN , NE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד.

לכן ME דו־איברי, וריבועו שווה ל- AF ; מש"ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שני, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־אמצעי ראשון.

יהי אפוא השטח $AB\Gamma\Delta$ כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי השני $A\Delta$. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח $A\Gamma$ הוא דו־אמצעי ראשון.

מאחר ש־ $A\Delta$ הוא דו־איברי שני, ייחלק לאיבריו E ־כך, כך ש־ AE הוא האיבר הגדול. לפיכך AE , $E\Delta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, AE גדול בריבוע מן $E\Delta$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, והאיבר הקטן $E\Delta$ בן־מידה באורך עם AB . ייחצה $E\Delta$ ב־ Z ; ובצמוד ל־ AE תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AH , HE , השווה לריבוע שעל EZ ; לפיכך AH בן־מידה באורך עם HE . ודרך H , E , Z יועברו המקבילים $H\Theta$, EK , $Z\Lambda$ ל־ AB , $\Gamma\Delta$; וייבנה הריבוע ΣN השווה למקבילית $A\Theta$ והריבוע $N\Pi$ השווה ל־ HK , ויונחו כך ש־ MN ו־ NE בקו ישר; לפיכך גם PN ו־ NO בקו ישר. ויושלם הריבוע $\Sigma\Pi$. מן ההוכחה הקודמת ברור ש־ MP הוא ממוצע פרופורציונלי בין ΣN , $N\Pi$ ושווה ל־ $E\Delta$, ושריבועו של ME שווה לשטח $A\Gamma$. יש להוכיח אפוא ש־ ME דו־אמצעי ראשון. מאחר ש־ AE חסר־מידה באורך עם $E\Delta$, ואילו $E\Delta$ בן־מידה עם AE , AB חסר־מידה עם AB . ומאחר ש־ AH בן־מידה עם EH , גם AE בן־מידה עם כל אחד מן AH , HE . אך AE חסר־מידה באורך עם AB ; לפיכך גם AH , HE חסרי־מידה עם AB . לכן BA , AH , HE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; ומכאן כל אחד מן $A\Theta$, HK אמצעי. לפיכך גם כל אחד מן ΣN , $N\Pi$ אמצעי, ולכן גם MN , NE אמצעיים. ומאחר ש־ AH בן־מידה באורך עם HE , גם $A\Theta$ בן־מידה עם HK , כלומר ΣN עם $N\Pi$, כלומר הריבוע שעל MN עם הריבוע שעל NE . ומאחר ש־ AE חסר־מידה באורך עם $E\Delta$, ואילו AE בן־מידה עם AH ו־ $E\Delta$ בן־מידה עם AH , EZ חסר־מידה עם EZ ; ולכן $A\Theta$ חסר־מידה עם $E\Delta$, כלומר ΣN עם MP , כלומר ON עם NP , כלומר MN חסר־מידה באורך עם NE . וכבר הוכח ש־ NE , MN אמצעיים ובני־מידה

בריבוע; לפיכך הם אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד. אומר אני שהם גם כוללים מלבן רציונלי. שהרי לפי ההנחה ΔE בן־מידה עם כל אחד מן AB, EZ ; לפיכך EZ בן־מידה גם עם EK . ושניהם רציונליים; לכן EA רציונלי, כלומר MP רציונלי. אך MP הוא המלבן הכלול בין NE, MN . ואם מחברים שני קווים אמצעיים בני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן רציונלי, השלם אי־רציונלי ונקרא דו־אמצעי ראשון.

לפיכך ME דו־אמצעי ראשון; מש״ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שלישי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־אמצעי שני.

יהי אפוא השטח $AB\Gamma A$ כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי השלישי AD , המחולק לאיבריו E , שמהם AE הוא הגדול. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח $A\Gamma$ הוא הקו האי־רציונלי הנקרא דו־אמצעי שני.

ייעשו אותם הדברים שנעשו קודם. ומאחר ש־ AD הוא דו־איברי שלישי, AE, EA רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, AE גדול בריבוע מן EA בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, ואף אחד מן EA, AE אינו בן־מידה באורך עם AB . בדומה להוכחות הקודמות נוכיח ש־ ME הוא הקו שריבועו שווה לשטח $A\Gamma$ וש־ NE, MN אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד; ולכן ME דו־אמצעי.

יש להוכיח אפוא שהוא גם השני.

מאחר ש־ ΔE חסר־מידה באורך עם AB , כלומר עם EK , ואילו ΔE בן־מידה עם EZ , לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם EK . והם רציונליים; לכן EK, ZE

רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. לפיכך EA אמצעי, כלומר MP אמצעי; והוא כלול בין NE , MN . לכן המלבן הכלול בין NE , MN אמצעי.

לפיכך ME דו־אמצעי שני; מש"ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי רביעי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול.

יהי אפוא השטח AF כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי הרביעי AD , המחולק לאיבריו ב־ E , ויהי AE הגדול שבהם. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AF הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול.

מאחר ש־ AD הוא דו־איברי רביעי, EA , AE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, AE גדול בריבוע מן EA בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, ו־ AE בן־מידה באורך עם AB . ייחצה AE ב־ Z , ובצמוד ל־ AE תיבנה המקבילית, המלבן הכלול בין AE , HE , AH , השווה לריבוע שעל EZ ; לפיכך AH חסר־מידה באורך עם HE . יועברו EA , EK , HO מקבילים ל־ AB , וייעשו שאר הדברים כפי שנעשו במשפט הקודם. ברור אפוא ש־ ME הוא הקו שריבועו שווה לשטח AF . יש להוכיח ש־ ME הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול. מאחר ש־ AH חסר־מידה באורך עם EH , גם AO חסר־מידה עם HK , כלומר SN עם NH ; לפיכך NE , MN חסר־מידה בריבוע. ומאחר ש־ AE בן־מידה באורך עם AB , AK רציונלי; והוא שווה לסכום הריבועים שעל NE , MN . לפיכך סכום הריבועים שעל NE , MN רציונלי. ומאחר ש־ AE חסר־מידה באורך עם AB , כלומר עם EK , ואילו AE בן־מידה עם EZ , לפיכך EZ חסר־מידה באורך עם EK . לכן EZ , EK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; ומכאן EA אמצעי, כלומר MP אמצעי. והוא כלול בין NE , MN ; לפיכך המלבן הכלול בין MN ,

NE אמצעי. וסכום הריבועים שעל MN, NE רציונלי, והם חסרי־מידה בריבוע. ואם מחברים שני קווים חסרי־מידה בריבוע, כך שסכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכולל ביניהם אמצעי, השלם אי־רציונלי ונקרא הקו הגדול.

לפיכך ME הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול, וריבועו שווה לשטח AF; מש"ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי חמישי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

יהי אפוא השטח AF כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי החמישי ΔA , המחולק לאיבריו E^{-} , כך ש־ AE^{-} הוא האיבר הגדול. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AF הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

ייעשו אותם הדברים שנעשו בהוכחות הקודמות; ברור אפוא ש־ME הוא הקו שריבועו שווה לשטח AF. יש להוכיח ש־ME הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי. מאחר ש־ AH^{-} חסר־מידה עם HE, גם $A\Theta$ חסר־מידה עם ΘE , כלומר הריבוע שעל MN עם הריבוע שעל NE^{-} ; לפיכך MN, NE חסרי־מידה בריבוע. ומאחר ש־ ΔA הוא דו־איברי חמישי ו־ EA הקטע הקטן שלו, EA בן־מידה באורך עם AB. אך AE חסר־מידה עם ΔE ; לפיכך גם AB חסר־מידה באורך עם AE. לכן AK אמצעי, כלומר סכום הריבועים שעל MN, NE אמצעי. ומאחר ש־ ΔE בן־מידה באורך עם AB, כלומר עם EK, ואילו ΔE בן־מידה גם עם EZ, גם EZ בן־מידה עם EK. ו־EK רציונלי; לפיכך EA רציונלי,

כלומר MP , כלומר המלבן הכלול בין MN , NE , רציונלי. לכן MN , NE חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי. לפיכך ME הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי, וריבועו שווה לשטח AF ; מש"ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שישי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

יהי אפוא השטח $AB\Gamma\Delta$ כלול בין הקו הרציונלי AB לבין הקו הדו־איברי השישי ΔA , המחולק לאיבריו E , כך ש־ AE הוא האיבר הגדול. אומר אני שהקו שריבועו שווה ל־ AF הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

ייעשו אותם הדברים שנעשו בהוכחות הקודמות. ברור אפוא ש־ ME הוא הקו שריבועו שווה ל־ AF , וש־ MN חסר־מידה בריבוע עם NE . ומאחר ש־ EA חסר־מידה באורך עם AB , EA , AB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; לפיכך AK אמצעי, כלומר סכום הריבועים שעל MN , NE אמצעי. ושוב, מאחר ש־ EA חסר־מידה באורך עם AB , גם ZE חסר־מידה עם EK ; לפיכך ZE , EK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. לכן EA אמצעי, כלומר MP , כלומר המלבן הכלול בין MN , NE אמצעי. ומאחר ש־ AE חסר־מידה עם EZ , גם AK חסר־מידה עם EA . אך AK הוא סכום הריבועים שעל MN , NE , ו־ EA הוא המלבן הכלול בין MN , NE ; לפיכך סכום הריבועים שעל MN , NE חסר־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. ושניהם אמצעיים, ו־ MN , NE חסרי־מידה בריבוע.

לפיכך ME הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים, וריבועו שווה ל־ AF ; מש"ל.

כאשר הריבוע שעל קו דו־איברי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי ראשון.

יהי AB דו־איברי המחולק לאיבריו Γ , Λ , כך ש־ $\Lambda\Gamma$ הוא האיבר הגדול; ויונח הקו הרציונלי ΔE . בצמוד ל־ ΔE תיבנה המקבילית ΔEZH השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΔH . אומר אני ש־ ΔH דו־איברי ראשון.

שכן בצמוד ל־ ΔE ייבנו $\Delta\theta$ השווה לריבוע שעל $\Lambda\Gamma$ ו־ $K\Lambda$ השווה לריבוע שעל $B\Gamma$; לפיכך השארית MZ שווה לפעמיים המלבן הכלול בין ΓB , $\Lambda\Gamma$. ייחצה MH ב־ N , ויועבר המקביל $N\Xi$; לכן כל אחד מן $M\Xi$, NZ שווה למלבן הכלול פעם אחת בין ΓB , $\Lambda\Gamma$. ומאחר ש־ AB דו־איברי המחולק לאיבריו Γ , Λ , ΓB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; לפיכך הריבועים שעל ΓB , $\Lambda\Gamma$ רציונליים ובני־מידה זה עם זה, ולכן גם סכומם. והוא שווה ל־ $\Delta\Lambda$; לפיכך $\Delta\Lambda$ רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לכן ΔM רציונלי ובני־מידה באורך עם ΔE . ושוב, מאחר ש־ ΓB , $\Lambda\Gamma$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, כלומר MZ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $M\Lambda$; לפיכך גם MH רציונלי וחסר־מידה באורך עם $M\Lambda$, כלומר עם ΔE . אך גם $M\Lambda$ רציונלי ובני־מידה באורך עם ΔE ; לפיכך ΔM חסר־מידה באורך עם MH . והם רציונליים; לכן MH , ΔM רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔH דו־איברי.

יש להוכיח אפוא שהוא גם הראשון.

מאחר שהמלבן הכלול בין ΓB , $\Lambda\Gamma$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל ΓB , $\Lambda\Gamma$, גם $M\Xi$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין $K\Lambda$, $\Delta\theta$. לפיכך כפי ש־ $\Delta\theta$ אל $M\Xi$, כך $M\Xi$ אל $K\Lambda$; כלומר כפי ש־ ΔK אל MN , כך MN אל

MK . לכן המלבן הכלול בין KM , ΔK שווה לריבוע שעל MN . ומאחר שהריבוע שעל AG בן־מידה עם הריבוע שעל GB , גם $\Delta \theta$ בן־מידה עם KA ; ולכן ΔK בן־מידה עם KM . ומאחר שסכום הריבועים שעל GB , AG גדול מפעמיים המלבן הכלול בין AG , GB , גם $\Delta \lambda$ גדול מ־ MZ ; לפיכך ΔM גדול מ־ MH . ועוד המלבן הכלול בין KM , ΔK שווה לריבוע שעל MN , כלומר לרבע הריבוע שעל MH , ו־ ΔK בן־מידה עם KM . ואם נתונים שני קווים לא־שווים, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים בני־מידה, הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. לפיכך ΔM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד MH , ΔM , רציונליים, ו־ ΔM , האיבר הגדול, בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ΔE .

לפיכך ΔH הוא קו דו־איברי ראשון; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל דו־אמצעי ראשון נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי שני.

יהי AB דו־אמצעי ראשון המחולק לקווים האמצעיים ב־ Γ , שמהם AG הוא הגדול; ויונח הקו הרציונלי ΔE . בצמוד ל־ ΔE תיבנה המקבילית ΔZ השווה לריבוע שעל AB והיצרת כרוחב את ΔH . אומר אני ש־ ΔH דו־איברי שני.

ייעשו אותם הדברים שנעשו במשפט הקודם. ומאחר ש־ AB דו־אמצעי ראשון המחולק ב־ Γ , AG , GB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים מלבן רציונלי; לפיכך גם הריבועים שעל GB , AG אמצעיים. לכן $\Delta \lambda$ אמצעי. והוא נבנה בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לפיכך ΔM רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין AG , GB רציונלי, גם MZ רציונלי.

והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי MA ; לפיכך גם MH רציונלי ובן־מידה באורך עם MA , כלומר עם ΔE . לכן ΔM חסר־מידה באורך עם MH . והם רציונליים; לפיכך MH , ΔM רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔH דו־איברי.

יש להוכיח אפוא שהוא גם השני.

מאחר שסכום הריבועים שעל AF , FB גדול מפעמיים המלבן הכלול ביניהם, גם ΔA גדול מ־ MZ ; ולכן ΔM גדול מ־ MH . ומאחר שהריבוע שעל AF בן־מידה עם הריבוע שעל FB , גם $\Delta \theta$ בן־מידה עם KA ; לפיכך ΔK בן־מידה עם KM . והמלבן הכלול בין KM , ΔK שווה לריבוע שעל MN ; לכן ΔM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ו־ MH בן־מידה באורך עם ΔE .

לפיכך ΔH הוא קו דו־איברי שני.

כאשר הריבוע שעל דו־אמצעי שני נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי שלישי.

יהי AB דו־אמצעי שני המחולק לקווים האמצעיים ב־ Γ , כך ש־ AF הוא הקטע הגדול; ויהי ΔE קו רציונלי כלשהו. בצמוד ל־ ΔE תיבנה המקבילית ΔZ השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΔH . אומר אני ש־ ΔH דו־איברי שלישי.

ייעשו אותם הדברים שנעשו בהוכחות הקודמות. ומאחר ש־ AB דו־אמצעי שני המחולק ב־ Γ , AF , FB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד והם כוללים מלבן אמצעי; לפיכך סכום הריבועים שעל AF , FB אמצעי. והוא שווה ל־ ΔA ; לכן גם ΔA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לפיכך גם MA רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . מאותם טעמים גם MH רציונלי וחסר־מידה

באורך עם MA , כלומר עם AE . לכן כל אחד מן MH , AM , רציונלי וחסר־מידה באורך עם AE . ומאחר ש־ AF חסר־מידה באורך עם FB , וכפי ש־ AF אל FB כך הריבוע שעל AF אל המלבן הכלול בין AF , FB , גם הריבוע שעל AF חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AF , FB . לפיכך גם סכום הריבועים שעל AF , FB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, כלומר AL חסר־מידה עם MZ ; ומכאן AM חסר־מידה עם MH . והם רציונליים; לפיכך $ΔH$ דו־איברי.

יש להוכיח שהוא גם השלישי.

בדומה למשפטים הקודמים נסיק ש־ AM גדול מ־ MH וש־ AK בן־מידה עם KM . והמלבן הכלול בין AK , KM שווה לריבוע שעל MN ; לפיכך AM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ואף אחד מן AM , MH אינו בן־מידה באורך עם AE .

לפיכך $ΔH$ הוא קו דו־איברי שלישי; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל הקו הגדול נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי רביעי.

יהי AB הקו הגדול המחולק ב־ $Γ$, כך ש־ AF גדול מ־ FB ; ויהי $ΔE$ קו רציונלי. בצמוד ל־ AE תיבנה המקבילית $ΔZ$ השווה לריבוע שעל AB והיצרת כרוחב את $ΔH$. אומר אני ש־ $ΔH$ דו־איברי רביעי.

ייעשו אותם הדברים שנעשו בהוכחות הקודמות. ומאחר ש־ AB הוא הקו הגדול המחולק ב־ $Γ$, AF , FB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי. לכן, מאחר שסכום הריבועים שעל AF , FB רציונלי, גם AL רציונלי; לפיכך גם AM רציונלי ובן־מידה באורך עם AE .

ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AF , אמצעי, כלומר MZ אמצעי, והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי MA , גם MH רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . לפיכך גם ΔM חסר־מידה באורך עם MH . לכן MH , ΔM רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔH דו־איברי.

יש להוכיח שהוא גם הרביעי.

בדומה למשפטים הקודמים נוכיח ש־ ΔM גדול מ־ MH ושהמלבן הכלול בין ΔK , KM שווה לריבוע שעל MN . ומאחר שהריבוע שעל AF חסר־מידה עם הריבוע שעל ΓB , גם $\Delta \Theta$ חסר־מידה עם KA ; לפיכך גם ΔK חסר־מידה עם KM . ואם נתונים שני קווים לא־שווים, ובצמוד לגדול נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל הקטן וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים חסר־מידה, הגדול גדול בריבוע מן הקטן בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. לפיכך ΔM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד MH , ΔM רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ו־ ΔM בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ΔE .

לפיכך ΔH הוא קו דו־איברי רביעי; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי חמישי.

יהי AB הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי, המחולק לקווים ב־ Γ , כך ש־ AF הוא הגדול; ויונח הקו הרציונלי ΔE . בצמוד ל־ ΔE תיבנה ΔZ השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΔH . אומר אני ש־ ΔH דו־איברי חמישי.

ייעשו אותם הדברים שנעשו במשפט הקודם. מאחר ש- AB הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי ומחולק ב- Γ , AG , ΓB חסר־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי. לכן, מאחר שסכום הריבועים שעל ΓB , AG אמצעי, גם $\Delta\Lambda$ אמצעי; ומכאן ΔM רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין ΓB , AG רציונלי, כלומר MZ רציונלי, MH רציונלי ובני־מידה עם ΔE . לפיכך ΔM חסר־מידה עם MH ; לכן ΔM , MH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔH דו־איברי.

אומר אני שהוא גם החמישי.

שהרי בדומה יוכח שהמלבן הכלול בין ΔK , KM שווה לריבוע שעל MN וש- ΔK חסר־מידה באורך עם KM ; לפיכך ΔM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד ΔM , MH בני־מידה בריבוע בלבד, והקטן MH בן־מידה באורך עם ΔE .

לפיכך ΔH הוא קו דו־איברי חמישי; מש"ל.

כאשר הריבוע שעל הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי שישי.

יהי AB הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים, המחולק ב- Γ ; ויהי ΔE קו רציונלי. בצמוד ל- ΔE תיבנה ΔZ השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΔH . אומר אני ש- ΔH דו־איברי שישי.

ייעשו אותם הדברים שנעשו בהוכחות הקודמות. ומאחר ש- AB הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים המחולק ב- Γ , AG , ΓB חסר־מידה בריבוע;

סכום הריבועים שעליהם והמלבן הכלול ביניהם אמצעיים, ועוד סכום הריבועים שעליהם חסר־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. לפיכך, לפי ההוכחות הקודמות, כל אחד מן ΔA , MZ , אמצעי. והם בנויים בצמוד לקו הרציונלי ΔE ; לכן כל אחד מן ΔM , MH רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔE . ומאחר שסכום הריבועים שעל AG , GB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, ΔA חסר־מידה עם MZ ; ולכן גם ΔM חסר־מידה עם MH . לפיכך ΔM , MH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΔH דו־איברי.

אומר אני שהוא גם השישי.

ושוב, בדומה נוכיח שהמלבן הכלול בין ΔK , KM שווה לריבוע שעל MN וש־ ΔK חסר־מידה באורך עם KM ; ומאותם טעמים ΔM גדול בריבוע מן MH בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ואף אחד מן ΔM , MH אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ΔE .

לפיכך ΔH הוא קו דו־איברי שישי; מש״ל.

קו בן־מידה באורך עם קו דו־איברי הוא גם דו־איברי ומאותו סדר.

יהי AB דו־איברי, ויהי ΓA בן־מידה באורך עם AB . אומר אני ש־ ΓA דו־איברי ומאותו סדר כמו AB .

מאחר ש־ AB דו־איברי, ייחלק לאיבריו ב־ E , ויהי AE האיבר הגדול. לפיכך AE , EB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ויעשה כפי ש־ AB אל ΓA , כך AE אל ΓZ ; ולכן גם השארית EB אל השארית ZA כפי ש־ AB אל ΓA . אך AB בן־מידה באורך עם ΓA ; לפיכך AE בן־מידה עם ΓZ , ו־ EB עם ZA . ו־ AE , EB רציונליים; לכן גם ΓZ , ZA רציונליים. ומאחר שכפי ש־ AE אל ΓZ ,

כך EB אל $Z\Delta$, בחילוף כפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$. אך AE , EB בני־מידה בריבוע בלבד; לפיכך גם $Z\Delta$, ΓZ בני־מידה בריבוע בלבד. והם רציונליים; לכן $\Gamma\Delta$ דו־איברי.

אומר אני שהוא גם מאותו סדר כמו AB .

שהרי AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו הבן־מידה עמו או בריבוע שעל קו החסר־מידה עמו. אם AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו בן־מידה עמו, גם ΓZ יהיה גדול בריבוע מן $Z\Delta$ בריבוע שעל קו בן־מידה עמו. ואם AE בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון, גם ΓZ יהיה בן־מידה עמו, ולכן כל אחד מן AB , $\Gamma\Delta$ הוא דו־איברי ראשון, כלומר מאותו סדר. ואם EB בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון, גם $Z\Delta$ בן־מידה עמו, ולכן שוב $\Gamma\Delta$ יהיה מאותו סדר כמו AB , שהרי כל אחד מהם יהיה דו־איברי שני. ואם אף אחד מן AE , EB אינו בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון, גם אף אחד מן ΓZ , $Z\Delta$ לא יהיה בן־מידה עמו, וכל אחד מהם יהיה דו־איברי שלישי. ואם AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו, גם ΓZ יהיה גדול בריבוע מן $Z\Delta$ בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. ואם AE בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון, גם ΓZ בן־מידה עמו, וכל אחד מהם רביעי. ואם EB בן־מידה עמו, גם $Z\Delta$ בן־מידה עמו, וכל אחד יהיה חמישי. ואם אף אחד מן AE , EB , ואף אחד מן ΓZ , $Z\Delta$ אינו בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון, כל אחד יהיה שישי.

לפיכך קו בן־מידה באורך עם קו דו־איברי הוא דו־איברי ומאותו סדר; מש״ל.

קו בן־מידה באורך עם דו־אמצעי הוא גם דו־אמצעי ומאותו סדר.

יהי AB דו־אמצעי, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה באורך עם AB . אומר אני ש־ $\Gamma\Delta$ דו־אמצעי ומאותו סדר כמו AB .

מאחר ש־ AB דו־אמצעי, ייחלק לקווים האמצעיים E ב־ AE ; לפיכך AE , EB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד. ויעשה כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך AE אל ΓZ ; ולכן גם השארית EB אל השארית $Z\Delta$ כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$. אך AB בן־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$; לפיכך כל אחד מן AE , EB בן־מידה עם המתאים לו מבין ΓZ , $Z\Delta$. ו־ AE , EB אמצעיים; לכן גם ΓZ , $Z\Delta$ אמצעיים. ומאחר שכפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$, ו־ AE , EB בני־מידה בריבוע בלבד, גם ΓZ , $Z\Delta$ בני־מידה בריבוע בלבד. וכבר הוכח שהם אמצעיים; לפיכך $\Gamma\Delta$ דו־אמצעי.

אומר אני שהוא גם מאותו סדר כמו AB .

שהרי כפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$; ולכן כפי שהריבוע שעל AE אל המלבן הכלול בין AE , EB , כך הריבוע שעל ΓZ אל המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. בחילוף, כפי שהריבוע שעל AE אל הריבוע שעל ΓZ , כך המלבן הכלול בין AE , EB אל המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. אך הריבוע שעל AE בן־מידה עם הריבוע שעל ΓZ ; לפיכך גם המלבן הכלול בין AE , EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. לכן אם המלבן הכלול בין AE , EB רציונלי, גם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$ רציונלי, וכל אחד מן הקווים הוא דו־אמצעי ראשון; ואם הראשון אמצעי, גם השני אמצעי, וכל אחד מן הקווים הוא דו־אמצעי שני.

ולכן $\Gamma\Delta$ יהיה מאותו סדר כמו AB ; מש״ל.

קו בן־מידה עם הקו הגדול הוא גם הקו הגדול.

יהי AB הקו הגדול, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עמו. אומר אני ש־ $\Gamma\Delta$ הוא הקו הגדול.

ייחלק AB ב- E ; לפיכך AE, EB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי. וייעשו אותם הדברים שנעשו קודם. ומאחר שכפי AB אל $\Gamma\Delta$, כך גם AE אל ΓZ וגם EB אל $Z\Delta$, הרי כפי AE אל ΓZ , כך EB אל $Z\Delta$. אך AB בן־מידה עם $\Gamma\Delta$; לפיכך כל אחד מן AE, EB בן־מידה עם המתאים לו מבין $\Gamma Z, Z\Delta$. ומאחר שכפי AE אל ΓZ , כך EB אל $Z\Delta$, בחילוף כפי AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$; ובהרכבה כפי AB אל BE , כך $\Gamma\Delta$ אל AZ . לפיכך כפי שהריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BE , כך הריבוע שעל $\Gamma\Delta$ אל הריבוע שעל AZ . ובדומה נוכיח שכפי שהריבוע שעל AB אל הריבוע שעל AE , כך הריבוע שעל $\Gamma\Delta$ אל הריבוע שעל ΓZ . לכן כפי שהריבוע שעל AB אל סכום הריבועים שעל AE, EB , כך הריבוע שעל $\Gamma\Delta$ אל סכום הריבועים שעל $\Gamma Z, Z\Delta$; ובחילוף, כפי שהריבוע שעל AB אל הריבוע שעל $\Gamma\Delta$, כך סכום הריבועים שעל AE, EB אל סכום הריבועים שעל $\Gamma Z, Z\Delta$. אך הריבוע שעל AB בן־מידה עם הריבוע שעל $\Gamma\Delta$; לפיכך גם סכום הריבועים שעל AE, EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל $\Gamma Z, Z\Delta$. וסכום הריבועים שעל AE, EB רציונלי; לכן גם סכום הריבועים שעל $\Gamma Z, Z\Delta$ רציונלי. ובדומה, פעמיים המלבן הכלול בין AE, EB בן־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין $\Gamma Z, Z\Delta$. ופעמיים המלבן הכלול בין AE, EB אמצעי; לפיכך גם פעמיים המלבן הכלול בין $\Gamma Z, Z\Delta$ אמצעי. לכן $\Gamma Z, Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי; מכאן השלם $\Gamma\Delta$ הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול.

לפיכך קו בן־מידה עם הקו הגדול הוא גם הקו הגדול; מש"ל.

קו בן־מידה עם הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי הוא גם קו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

יהי AB הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם AB . יש להוכיח שגם $\Gamma\Delta$ הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

יחלק AB לקווים E ־ B ; לפיכך AE , EB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי. ויעשו אותם הדברים שנעשו קודם. בדומה נוכיח שגם ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, שסכום הריבועים שעל AE , EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$, ושהמלבן הכלול בין AE , EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. לפיכך גם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$ אמצעי, והמלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$ רציונלי.

לכן $\Gamma\Delta$ הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי; מש״ל.

קו בן־מידה עם הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים הוא גם קו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

יהי AB הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם AB . יש להוכיח שגם $\Gamma\Delta$ הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

מאחר ש־ AB הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים, ייחלק לקווים E ־ B ; לפיכך AE , EB חסרי־מידה בריבוע, גם סכום הריבועים שעליהם וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעיים, ועוד שסכום הריבועים שעל AE , EB חסרי־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. ויעשו אותם הדברים שנעשו קודם. בדומה נוכיח שגם ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, שסכום הריבועים שעל AE , EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$, ושהמלבן הכלול בין AE , EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. לפיכך גם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$ אמצעי

וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שסכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$ חסר־מידה עם המלבן הכלול ביניהם.

לפיכך $\Gamma\Delta$ הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים; מש"ל.

כאשר מחברים שטח רציונלי ושטח אמצעי, מתקבלים ארבעה קווים אי־רציונליים: דו־איברי, דו־אמצעי ראשון, הקו הגדול, או הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

יהי AB רציונלי ו־ $\Gamma\Delta$ אמצעי. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח $A\Delta$ הוא דו־איברי, דו־אמצעי ראשון, הקו הגדול, או הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

שהרי AB גדול מ־ $\Gamma\Delta$ או קטן ממנו. תחילה יהי גדול. ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה ל־ AB והיוצר כרוחב את $E\Theta$, ובצמוד ל־ EZ ייבנה ΘI השווה ל־ $\Gamma\Delta$ והיוצר כרוחב את ΘK . מאחר ש־ AB רציונלי ושווה ל־ EH , גם EH רציונלי. והוא נבנה בצמוד ל־ EZ ויוצר כרוחב את $E\Theta$; לפיכך $E\Theta$ רציונלי ובן־מידה באורך עם EZ . ושוב, מאחר ש־ $\Gamma\Delta$ אמצעי ושווה ל־ ΘI , גם ΘI אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את ΘK ; לפיכך ΘK רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר ש־ $\Gamma\Delta$ אמצעי ואילו AB רציונלי, AB חסר־מידה עם $\Gamma\Delta$; ולכן גם EH חסר־מידה עם ΘI . וכפי ש־ EH אל ΘI , כך $E\Theta$ אל ΘK ; לפיכך גם $E\Theta$ חסר־מידה באורך עם ΘK . ושניהם רציונליים; לכן ΘK , $E\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EK דו־איברי המחולק ב־ Θ . ומאחר ש־ AB גדול מ־ $\Gamma\Delta$, ו־ AB שווה ל־ EH ו־ $\Gamma\Delta$ שווה ל־ ΘI , גם EH גדול מ־ ΘI ; ולכן $E\Theta$ גדול מ־ ΘK . עתה $E\Theta$ גדול בריבוע מן ΘK בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו.

תחילה יהי בריבוע שעל קו בן־מידה עמו; והגדול ΘE בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון EZ . לפיכך EK דו־איברי ראשון. ו־ EZ רציונלי; ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי ראשון, הקו שריבועו שווה לשטח הוא דו־איברי. לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ EI דו־איברי, ומכאן גם הקו שריבועו שווה ל־ $A\Delta$ דו־איברי. עתה יהי $E\Theta$ גדול בריבוע מן ΘK בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; והגדול $E\Theta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון EZ . לפיכך EK דו־איברי רביעי. ו־ EZ רציונלי; ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי רביעי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הגדול. לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח EI הוא הקו הגדול, ומכאן גם הקו שריבועו שווה ל־ $A\Delta$ הוא הקו הגדול.

עתה יהי AB קטן מ־ $\Gamma\Delta$; לפיכך גם EH קטן מ־ ΘI , ולכן $E\Theta$ קטן מ־ ΘK . עתה ΘK גדול בריבוע מן $E\Theta$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. תחילה יהי בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו; והקטן $E\Theta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון EZ . לפיכך EK דו־איברי שני. ו־ EZ רציונלי; ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שני, הקו שריבועו שווה לשטח הוא דו־אמצעי ראשון. לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח EI הוא דו־אמצעי ראשון, ומכאן גם הקו שריבועו שווה ל־ $A\Delta$ הוא דו־אמצעי ראשון. עתה יהי ΘK גדול בריבוע מן ΘE בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; והקטן $E\Theta$ בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון EZ . לפיכך EK דו־איברי חמישי. ו־ EZ רציונלי; ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי חמישי, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי. לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח EI הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי,

ומכאן גם הקו שריבועו שווה לשטח AA הוא הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי.

לפיכך, כאשר מחברים שטח רציונלי ושטח אמצעי, מתקבלים ארבעה קווים אי־רציונליים: דו־איברי, דו־אמצעי ראשון, הקו הגדול, או הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי; מש"ל.

כאשר מחברים שני שטחים אמצעיים חסר־מידה זה עם זה, מתקבלים שני הקווים האי־רציונליים הנותרים: דו־אמצעי שני או הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

יחברו אפוא שני השטחים האמצעיים AB , $\Gamma\Delta$ החסרים־מידה זה עם זה. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AA הוא דו־אמצעי שני או הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

שהרי AB גדול מ־ $\Gamma\Delta$ או קטן ממנו. תחילה יהי, כפי שיקרה, AB גדול מ־ $\Gamma\Delta$. ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה ל־ AB והיוצר כרוחב את $E\Theta$, וייבנה ΘI השווה ל־ $\Gamma\Delta$ והיוצר כרוחב את ΘK . ומאחר שכל אחד מן AB , $\Gamma\Delta$ אמצעי, גם כל אחד מן EH , ΘI אמצעי. והם בנויים בצמוד לקו הרציונלי ZE ויוצרים כרוחב את $E\Theta$, ΘK ; לפיכך כל אחד מן $E\Theta$, ΘK רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר ש־ AB חסר־מידה עם $\Gamma\Delta$, ו־ AB שווה ל־ EH ו־ $\Gamma\Delta$ שווה ל־ ΘI , גם EH חסר־מידה עם ΘI . וכפי ש־ EH אל ΘI , כך $E\Theta$ אל ΘK ; לפיכך $E\Theta$ חסר־מידה באורך עם ΘK . לכן $E\Theta$, ΘK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EK דו־איברי. עתה $E\Theta$ גדול בריבוע מן ΘK בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. תחילה יהי בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו; ואף אחד מן $E\Theta$, ΘK אינו

בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון EZ. לפיכך EK דו־איברי שליש. ו־EZ רציונלי; ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שליש, הקו שריבועו שווה לשטח הוא דו־אמצעי שני. לפיכך הקו שריבועו שווה ל־EI, כלומר ל־ ΔA , הוא דו־אמצעי שני. עתה יהי $E\Theta$ גדול בריבוע מן ΘK בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו; וכל אחד מן ΘK , $E\Theta$ חסר־מידה באורך עם EZ. לפיכך EK דו־איברי שליש. ואם שטח כלול בין קו רציונלי לבין קו דו־איברי שליש, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים; ולכן גם הקו שריבועו שווה לשטח ΔA הוא הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

לפיכך, כאשר מחברים שני שטחים אמצעיים חסר־מידה זה עם זה, מתקבלים שני הקווים האי־רציונליים הנותרים: דו־אמצעי שני או הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים.

הקו הדו־איברי והקווים האי־רציונליים הבאים אחריו אינם זהים לא לקו האמצעי ולא זה לזה. שהרי כאשר הריבוע שעל קו אמצעי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר רציונלי וחסר־מידה באורך עם הקו שאליו נבנה. ואילו הריבוע שעל דו־איברי, בהיבנותו בצמוד לקו רציונלי, יוצר כרוחב דו־איברי ראשון; הריבוע שעל דו־אמצעי ראשון יוצר דו־איברי שני; הריבוע שעל דו־אמצעי שני יוצר דו־איברי שליש; הריבוע שעל גדול דו־איברי רביעי; הריבוע שעל הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי יוצר דו־איברי חמישי; והריבוע שעל הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים יוצר דו־איברי שליש. הרוחבים האמורים שונים הן מן הראשון והן זה מזה: מן הראשון מפני שהוא רציונלי, וזה מזה מפני שאינם מאותו סדר. לפיכך גם הקווים האי־רציונליים עצמם שונים זה מזה.

אם מקו רציונלי נגרע קו רציונלי הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד, השארית אי־רציונלית; ותיקרא אפוטומה.

מן הקו הרציונלי AB ייגרע הקו הרציונלי $B\Gamma$, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד. אומר אני שהשארית $A\Gamma$ היא הקו האי־רציונלי הנקרא אפוטומה.

מאחר ש־ AB חסר־מידה באורך עם $B\Gamma$, וכפי ש־ AB אל $B\Gamma$ כך הריבוע שעל AB אל המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$, לפיכך הריבוע שעל AB חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$. אך סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ בן־מידה עם הריבוע שעל AB , ופעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. ומאחר שסכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ בצירוף הריבוע שעל ΓA , גם סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ חסר־מידה עם השארית, הריבוע שעל $A\Gamma$. אך הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ רציונליים; לפיכך $A\Gamma$ אי־רציונלי. והוא ייקרא אפוטומה; מש״ל.

אם מקו אמצעי נגרע קו אמצעי הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן רציונלי, השארית אי־רציונלית; ותיקרא אפוטומה אמצעית ראשונה.

מן הקו האמצעי AB ייגרע הקו האמצעי $B\Gamma$, הבן־מידה עם AB בריבוע בלבד והיוצר עם AB את המלבן הרציונלי הכלול בין AB , $B\Gamma$. אומר אני שהשארית $A\Gamma$ אי־רציונלית; והיא תיקרא אפוטומה אמצעית ראשונה.

מאחר ש־ AB , $B\Gamma$ אמצעיים, גם הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ אמצעיים. אך פעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ רציונלי; לפיכך סכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$. ולכן גם פעמיים

המלבן הכלול בין AB , BF חסר־מידה עם השארית, הריבוע שעל AF , שהרי אם השלם חסר־מידה עם אחד מן החלקים, גם הגדלים המקוריים יהיו חסר־מידה. אך פעמיים המלבן הכלול בין AB , BF רציונלי; לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ולכן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא אפוטומה אמצעית ראשונה.

אם מקו אמצעי נגרע קו אמצעי הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן אמצעי, השארית אי־רציונלית; ותיקרא אפוטומה אמצעית שנייה.

מן הקו האמצעי AB ייגרע הקו האמצעי FB , הבן־מידה עם השלם AB בריבוע בלבד והכולל עם השלם AB את המלבן האמצעי הכלול בין AB , BF . אומר אני שהשארית AF אי־רציונלית; והיא תיקרא אפוטומה אמצעית שנייה.

יונח הקו הרציונלי AI ; בצמוד ל־ AI ייבנה ΔE השווה לסכום הריבועים שעל AB , BF והיוצר כרוחב את ΔH , ובצמוד ל־ AI ייבנה $\Delta \Theta$ השווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB , BF והיוצר כרוחב את ΔZ . לפיכך השארית ZE שווה לריבוע שעל AF . ומאחר שהריבועים שעל AB , BF אמצעיים ובני־מידה, גם ΔE אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי AI ויוצר כרוחב את ΔH ; לפיכך ΔH רציונלי וחסר־מידה באורך עם AI . ושוב, מאחר שהמלבן הכלול בין AB , BF אמצעי, גם פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. והוא שווה ל־ $\Delta \Theta$; לכן גם $\Delta \Theta$ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי AI ויוצר כרוחב את ΔZ ; לפיכך ΔZ רציונלי וחסר־מידה באורך עם AI . ומאחר ש־ AB , BF בני־מידה בריבוע בלבד, AB חסר־מידה באורך עם BF ; לכן גם הריבוע שעל AB חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AB , BF . אך סכום הריבועים שעל AB , BF בני־מידה עם הריבוע שעל AB , ופעמיים המלבן הכלול בין AB , BF בני־מידה עם המלבן

הכלול ביניהם; לפיכך פעמיים המלבן הכלול בין AB, BF חסר־מידה עם סכום הריבועים שעל AB, BF . אך ΔE שווה לסכום הריבועים שעל AB, BF , ו־ $\Delta \Theta$ שווה לפעמיים המלבן הכלול ביניהם; לכן ΔE חסר־מידה עם $\Delta \Theta$. וכפי ש־ ΔE אל $\Delta \Theta$, כך $H\Delta$ אל ΔZ ; לפיכך $H\Delta$ חסר־מידה עם ΔZ . ושניהם רציונליים; לכן $\Delta Z, H\Delta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ZH אפוטומה. ו־ ΔI רציונלי; אך שטח הכלול בין קו רציונלי לבין קו אי־רציונלי הוא אי־רציונלי, וגם הקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי. וריבועו של AF שווה ל־ ZE ; לפיכך AF אי־רציונלי. הוא ייקרא אפוטומה אמצעית שנייה; מש״ל.

אם מקו ישר נגרע קו ישר החסר־מידה עם השלם בריבוע, ויחד עם השלם הוא יוצר סכום ריבועים רציונלי ומלבן אמצעי, השארית אי־רציונלית; ותיקרא הקו הקטן.

מן הקו הישר AB ייגרע הקו הישר BF , החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עמו את הדברים האמורים. אומר אני שהשארית AF היא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הקטן.

מאחר שסכום הריבועים שעל AB, BF רציונלי ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, הם חסר־מידה זה עם זה; ובהמרה גם סכום הריבועים שעל AB, BF חסר־מידה עם השארית, הריבוע שעל AF . אך סכום הריבועים שעל AB, BF רציונלי; לפיכך הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ולכן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא הקו הקטן; מש״ל.

אם מקו ישר נגרע קו ישר החסר־מידה עם השלם בריבוע, ויחד עם השלם הוא יוצר סכום ריבועים אמצעי ופעמיים מלבן רציונלי, השארית אי־רציונלית; ותיקרא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

מן הקו הישר AB ייגרע הקו הישר BF , החסר־מידה עם AB בריבוע והיוצר עמו את הדברים האמורים. אומר אני שהשארית AF היא הקו האי־רציונלי שנוכר.

מאחר שסכום הריבועים שעל BF , AB אמצעי ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי, הם חסר־מידה זה עם זה; לפיכך גם השארית, הריבוע שעל AF , חסרת־מידה עם פעמיים המלבן הכלול בין BF , AB . ופעמיים המלבן הכלול בין BF , AB רציונלי; לכן הריבוע שעל AF אי־רציונלי, ומכאן AF אי־רציונלי. הוא ייקרא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי; מש"ל.

אם מקו ישר נגרע קו ישר החסר־מידה עם השלם בריבוע, ויחד עם השלם הוא יוצר הן סכום ריבועים אמצעי הן פעמיים מלבן אמצעי, ועוד שסכום הריבועים שעליהם חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, השארית אי־רציונלית; ותיקרא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

מן הקו הישר AB ייגרע הקו הישר BF , החסר־מידה עם AB בריבוע והיוצר עמו את הדברים האמורים. אומר אני שהשארית AF היא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי. יונח הקו הרציונלי AI ; בצמוד ל־ AI ייבנה ΔE השווה לסכום הריבועים שעל BF , AB והיוצר כרוחב את ΔH , וממנו ייגרע $\Delta \theta$ השווה לפעמיים המלבן הכלול בין BF , AB . לפיכך השארית ZE שווה לריבוע שעל AF , ומכאן ריבועו של AF שווה ל־ ZE . ומאחר שסכום הריבועים שעל BF , AB אמצעי ושווה ל־ ΔE , גם ΔE אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי AI ויוצר כרוחב את ΔH ; לפיכך ΔH רציונלי וחסר־מידה באורך עם AI . ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין BF , AB אמצעי ושווה ל־ $\Delta \theta$, גם $\Delta \theta$ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי AI ויוצר כרוחב את ΔZ ;

לפיכך גם ΔZ רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΔI . ומאחר שסכום הריבועים שעל $AB, B\Gamma$ חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, גם ΔE חסר־מידה עם $\Delta \Theta$. וכפי ש־ ΔE אל $\Delta \Theta$, כך ΔH אל ΔZ ; לפיכך ΔH חסר־מידה עם ΔZ . ושניהם רציונליים; לכן $H\Delta, \Delta Z$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ZH אפוטומה. ו־ $Z\Theta$ רציונלי. אך שטח הכלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה הוא אי־רציונלי, וגם הקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי. וריבועו של $A\Gamma$ שווה ל־ ZE ; לפיכך $A\Gamma$ אי־רציונלי. הוא ייקרא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי; מש״ל.

לאפוטומה מצטרף קו רציונלי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד.

תהי AB אפוטומה, ויהי $B\Gamma$ הקו המצורף לה; לפיכך $A\Gamma, \Gamma B$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. אומר אני שלא מצטרף ל־ AB קו רציונלי אחר הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד.

שאם אפשר, יצטרף BA ; לפיכך גם $\Delta A, \Delta B$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ומאחר שבאותה מידה שסכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$ עולה על פעמיים המלבן הכלול ביניהם, עולה גם סכום הריבועים שעל $A\Gamma, \Gamma B$ על פעמיים המלבן הכלול ביניהם — שהרי שניהם עולים באותו הריבוע שעל AB — לפיכך בחילוף, באותה מידה שסכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$ עולה על סכום הריבועים שעל $A\Gamma, \Gamma B$, עולה גם פעמיים המלבן הכלול בין $\Delta A, \Delta B$ על פעמיים המלבן הכלול בין $A\Gamma, \Gamma B$. אך סכום הריבועים שעל $\Delta A, \Delta B$ עולה על סכום הריבועים שעל $A\Gamma, \Gamma B$ בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לכן גם פעמיים המלבן הכלול בין $\Delta A, \Delta B$ עולה על פעמיים המלבן הכלול בין $A\Gamma, \Gamma B$ בשטח רציונלי. וזה בלתי־אפשרי, שהרי שניהם אמצעיים, ושטח אמצעי

אינו עולה על שטח אמצעי בשטח רציונלי. לפיכך לא מצטרף ל־ AB קו רציונלי אחר הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד.

לכן לאפוטומה מצטרף קו רציונלי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד; מש״ל.

לאפוטומה אמצעית ראשונה מצטרף קו אמצעי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן רציונלי.

תהי AB אפוטומה אמצעית ראשונה, ויצטרף אל AB הקו $B\Gamma$; לפיכך $A\Gamma$, ΓB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים את המלבן הרציונלי הכלול בין $A\Gamma$, ΓB . אומר אני שלא מצטרף ל־ AB קו אמצעי אחר, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן רציונלי.

שאם אפשר, יצטרף גם ΔB . לפיכך ΔB , $A\Delta$ אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים את המלבן הרציונלי הכלול בין ΔB , $A\Delta$. ומאחר שבאותה מידה שסכום הריבועים שעל ΔB , $A\Delta$ עולה על פעמיים המלבן הכלול ביניהם, עולה גם סכום הריבועים שעל $A\Gamma$, ΓB על פעמיים המלבן הכלול ביניהם — שהרי שניהם עולים באותו הריבוע שעל AB — לפיכך בחילוף, באותה מידה שסכום הריבועים שעל ΔB , $A\Delta$ עולה על סכום הריבועים שעל $A\Gamma$, ΓB , עולה גם פעמיים המלבן הכלול בין ΔB , $A\Delta$ על פעמיים המלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB . אך פעמיים המלבן הכלול בין ΔB , $A\Delta$ עולה על פעמיים המלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לכן גם סכום הריבועים שעל ΔB , $A\Delta$ עולה על סכום הריבועים שעל $A\Gamma$, ΓB בשטח רציונלי. וזה בלתי־אפשרי, שהרי שניהם אמצעיים, ושטח אמצעי אינו עולה על שטח אמצעי בשטח רציונלי.

לפיכך לאפוטומה אמצעית ראשונה מצטרף קו אמצעי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן רציונלי; מש"ל.

לאפוטומה אמצעית שנייה מצטרף קו אמצעי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן אמצעי.

תהי AB אפוטומה אמצעית שנייה, ויהי BF הקו המצורף לה; לפיכך AF , FB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים את המלבן האמצעי הכלול בין AF , FB . אומר אני שלא יצטרף ל־ AB קו אמצעי אחר, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן אמצעי.

שאם אפשר, יצטרף BA ; לפיכך גם AD , DB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים את המלבן האמצעי הכלול בין AD , DB . ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה לסכום הריבועים שעל AF , FB והיוצר כרוחב את EM , וממנו ייגרע ΘH השווה לפעמיים המלבן הכלול בין AF , FB והיוצר כרוחב את ΘM . לפיכך השארית EA שווה לריבוע שעל AB , ולכן ריבועו של AB שווה ל־ EA . ושוב, בצמוד ל־ EZ ייבנה EI השווה לסכום הריבועים שעל AD , DB והיוצר כרוחב את EN . אך גם EA שווה לריבוע שעל AB ; לפיכך השארית ΘI שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AD , DB . ומאחר ש־ AF , FB אמצעיים, גם הריבועים שעליהם אמצעיים; והם שווים ל־ EH , ולכן גם EH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את EM ; לפיכך EM רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ושוב, מאחר שהמלבן הכלול בין AF , FB אמצעי, גם פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. והוא שווה ל־ ΘH ; לכן גם ΘH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את ΘM ; לפיכך גם ΘM רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר ש־ AF , FB

בני־מידה בריבוע בלבד, AG חסר־מידה באורך עם GB . וכפי ש־ AG אל GB , כך הריבוע שעל AG אל המלבן הכלול בין AG , GB ; לפיכך הריבוע שעל AG חסר־מידה עם המלבן הכלול ביניהם. אך סכום הריבועים שעל AG , GB בן־מידה עם הריבוע שעל AG , ופעמיים המלבן הכלול ביניהם בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם; לכן סכום הריבועים שעל AG , GB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. ו־ EH שווה לסכום הריבועים, ו־ $H\Theta$ שווה לפעמיים המלבן; לכן EH חסר־מידה עם ΘH . וכפי ש־ EH אל ΘH , כך EM אל ΘM ; לפיכך EM חסר־מידה באורך עם $M\Theta$. ושניהם רציונליים; לכן EM , $M\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. מכאן $E\Theta$ אפוטומה ו־ ΘM הקו המצורף לה. ובדומה נוכיח שגם ΘN מצטרף אליה; לכן לאותה אפוטומה מצטרפים שני קווים שונים, בני־מידה עם השלם בריבוע בלבד, וזה בלתי־אפשרי.

לפיכך לאפוטומה אמצעית שנייה מצטרף קו אמצעי אחד בלבד, הבן־מידה עם השלם בריבוע בלבד והכולל עם השלם מלבן אמצעי; מש״ל.

לקו הקטן מצטרף קו אחד בלבד, החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עם השלם סכום ריבועים רציונלי ופעמיים מלבן אמצעי.

יהי AB הקו הקטן, ויהי BF הקו המצורף אליו; לפיכך AG , GB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. אומר אני שלא יצטרף ל־ AB קו אחר היוצר אותם דברים.

שאם אפשר, יצטרף BA ; לפיכך גם ΔB , ΔA חסרי־מידה בריבוע ויוצרים את הדברים האמורים. ומאחר שבאותה מידה שסכום הריבועים שעל ΔB , ΔA עולה על סכום הריבועים שעל AG , GB , עולה גם פעמיים המלבן הכלול בין

$AD, \Delta B$ על פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$; ואילו סכום הריבועים שעל $AD, \Delta B$ עולה על סכום הריבועים שעל $AG, \Gamma B$ בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לפיכך גם פעמיים המלבן הכלול בין $AD, \Delta B$ עולה על פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$ בשטח רציונלי. וזה בלתי־אפשרי, שהרי שניהם אמצעיים.

לפיכך לקו הקטן מצטרף קו אחד בלבד, החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עם השלם סכום ריבועים רציונלי ופעמיים מלבן אמצעי; מש"ל.

לקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי מצטרף קו אחד בלבד, החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עם השלם סכום ריבועים אמצעי ופעמיים מלבן רציונלי.

יהי AB הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי, ויצטרף אליו $B\Gamma$; לפיכך $AG, \Gamma B$ חסר־מידה בריבוע ויוצרים את הדברים האמורים. אומר אני שלא יצטרף ל־ AB קו אחר היוצר אותם דברים.

שאם אפשר, יצטרף BD ; לפיכך גם $AD, \Delta B$ חסר־מידה בריבוע ויוצרים את הדברים האמורים. עתה, לפי המשפט הקודם, באותה מידה שסכום הריבועים שעל $AD, \Delta B$ עולה על סכום הריבועים שעל $AG, \Gamma B$, עולה גם פעמיים המלבן הכלול בין $AD, \Delta B$ על פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$. אך פעמיים המלבן הכלול בין $AD, \Delta B$ עולה על פעמיים המלבן הכלול בין $AG, \Gamma B$ בשטח רציונלי, שהרי שניהם רציונליים; לפיכך גם סכום הריבועים שעל $AD, \Delta B$ עולה על סכום הריבועים שעל $AG, \Gamma B$ בשטח רציונלי. וזה בלתי־אפשרי, שהרי שניהם אמצעיים. לכן לא יצטרף ל־ AB קו אחר החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עמו את הדברים האמורים; לפיכך יצטרף אחד בלבד; מש"ל.

לקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי מצטרף קו אחד בלבד, החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עם השלם סכום ריבועים אמצעי ופעמיים מלבן אמצעי, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם פעמיים המלבן.

יהי AB הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי, ויהי BF הקו המצורף אליו; לפיכך AF , FB חסר־מידה בריבוע ויוצרים את הדברים האמורים. אומר אני שלא יצטרף ל־ AB קו אחר היוצר את הדברים האמורים.

שאם אפשר, יצטרף BA , כך שגם AB , AD חסר־מידה בריבוע; סכום הריבועים שעליהם אמצעי, פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שסכום הריבועים שעל AB , AD חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. ויונח הקו הרציונלי EZ ; בצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה לסכום הריבועים שעל AF , FB והיוצר כרוחב את EM , ובצמוד ל־ EZ ייבנה EH השווה לפעמיים המלבן הכלול בין AF , FB והיוצר כרוחב את OM . לפיכך הריבוע שעל AB שווה לשארית EA , ולכן ריבועו של AB שווה ל־ EA . ושוב, בצמוד ל־ EZ ייבנה EI השווה לסכום הריבועים שעל AB , AD והיוצר כרוחב את EN . אך גם הריבוע שעל AB שווה ל־ EA ; לפיכך השארית EI שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AB , AD . ומאחר שסכום הריבועים שעל AF , FB אמצעי ושווה ל־ EH , גם EH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את EM ; לפיכך EM רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין AF , FB אמצעי ושווה ל־ EH , גם EH אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את OM ; לפיכך OM רציונלי וחסר־מידה באורך עם EZ . ומאחר שסכום הריבועים שעל AF , FB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, גם EH חסר־מידה עם EH ; לפיכך גם EM חסר־מידה באורך עם $M\Theta$. ושניהם רציונליים; לכן EM , $M\Theta$

רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. מכאן $E\Theta$ אפוטומה ו־ ΘM הקו המצורף לה. ובדומה נוכיח ששוב $E\Theta$ אפוטומה ושגם ΘN מצטרף אליה. לפיכך לאותה אפוטומה מצטרפים שני קווים רציונליים שונים, בני־מידה עם השלם בריבוע בלבד; וזה הוכח כבלתי־אפשרי. לכן לא יצטרף ל־ AB קו אחר.

לפיכך ל־ AB מצטרף קו אחד בלבד, החסר־מידה עם השלם בריבוע והיוצר עם השלם סכום ריבועים אמצעי ופעמיים מלבן אמצעי, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם פעמיים המלבן; מש״ל.

בהינתן קו רציונלי ואפוטומה: אם הריבוע שעל השלם גדול מן הריבוע שעל הקו המצורף בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם השלם, והשלם בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, תיקרא האפוטומה אפוטומה ראשונה.

ואם הקו המצורף בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, והריבוע שעל השלם גדול מן הריבוע שעל הקו המצורף בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם השלם, תיקרא האפוטומה אפוטומה שנייה.

ואם אף אחד מהם אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, והריבוע שעל השלם גדול מן הריבוע שעל הקו המצורף בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עם השלם, תיקרא האפוטומה אפוטומה שלישית.

ושוב, אם הריבוע שעל השלם גדול מן הריבוע שעל הקו המצורף בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עם השלם: אם השלם בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, תיקרא האפוטומה אפוטומה רביעית.

ואם הקו המצורף בן־מידה עמו, תיקרא האפוטומה אפוטומה חמישית.

ואם אף אחד מהם אינו בן־מידה עמו, תיקרא האפוטומה אפוטומה שישית.

למצוא אפוטומה ראשונה.

יונח הקו הרציונלי A , ויהי BH בן־מידה באורך עם A ; לפיכך גם BH רציונלי. ויונחו שני המספרים הריבועיים ΔE , EZ , שהפרשם ZA אינו ריבועי; לפיכך גם ל־ EA אל ΔZ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויעשה כפי ש־ EA אל ΔZ , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$; לפיכך הריבוע שעל BH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Gamma$. אך הריבוע שעל BH רציונלי; לכן גם הריבוע שעל $H\Gamma$ רציונלי, ומכאן $H\Gamma$ רציונלי. ומאחר של־ EA אל ΔZ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך BH חסר־מידה באורך עם $H\Gamma$. ושניהם רציונליים; לכן BH , $H\Gamma$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $B\Gamma$ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם הראשונה.

יהי הריבוע שעל Θ השטח שבו הריבוע שעל BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$. ומאחר שכפי ש־ EA אל ΔZ , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$, בהמרה כפי ש־ ΔE אל EZ , כך הריבוע שעל HB אל הריבוע שעל Θ . אך ל־ ΔE אל EZ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, שהרי שניהם ריבועיים; לכן גם לריבוע שעל HB אל הריבוע שעל Θ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך BH בן־מידה באורך עם Θ ; וריבועו של BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ . לכן BH גדול בריבוע מן $H\Gamma$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד השלם BH בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $B\Gamma$ אפוטומה ראשונה.

נמצאה אפוא האפוטומה הראשונה $B\Gamma$; כנדרש למצוא.

למצוא אפוטומה שנייה.

יונח הקו הרציונלי A , ויהי $H\Gamma$ בן־מידה באורך עם A ; לפיכך $H\Gamma$ רציונלי. ויונחו שני המספרים הריבועיים ΔE , EZ , שהפרשם ΔZ אינו ריבועי. וייעשה כפי ש־ $Z\Delta$ אל ΔE , כך הריבוע שעל ΓH אל הריבוע שעל HB ; לפיכך הריבוע שעל ΓH בן־מידה עם הריבוע שעל HB . אך הריבוע שעל $H\Gamma$ רציונלי; לכן גם הריבוע שעל HB רציונלי, ומכאן BH רציונלי. ומאחר שלריבוע שעל $H\Gamma$ אל הריבוע שעל HB אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ΓH חסר־מידה באורך עם HB . ושניהם רציונליים; לכן ΓH , HB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $B\Gamma$ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השנייה.

יהי הריבוע שעל Θ השטח שבו הריבוע שעל BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$. עתה כפי שהריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$, כך המספר $E\Delta$ אל המספר ΔZ ; לפיכך בהמרה כפי שהריבוע שעל BH אל הריבוע שעל Θ , כך ΔE אל EZ . וכל אחד מן ΔE , EZ ריבועי; לכן לריבוע שעל BH אל הריבוע שעל Θ היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך BH בן־מידה באורך עם Θ ; וריבועו של BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ . לכן BH גדול בריבוע מן $H\Gamma$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד הקו המצורף ΓH בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $B\Gamma$ אפוטומה שנייה.

נמצאה אפוא האפוטומה השנייה $B\Gamma$; כנדרש להוכיח.

למצוא אפוטומה שלישית.

יונח הקו הרציונלי A , ויונחו שלושת המספרים E , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, שאין בין שום שניים מהם היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ואילו ל ΓB אל BA יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. וייעשה כפי ש E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש $\Gamma\Delta$ אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$. מאחר שכפי ש E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH , הריבוע שעל A בן־מידה עם הריבוע שעל ZH . אך הריבוע שעל A רציונלי; לכן גם הריבוע שעל ZH רציונלי, ומכאן ZH רציונלי. ומאחר של E אל $B\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך A חסר־מידה באורך עם ZH . ושוב, מאחר שכפי ש $\Gamma\Delta$ אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$, הריבוע שעל ZH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Theta$. אך הריבוע שעל ZH רציונלי; לכן גם הריבוע שעל $H\Theta$ רציונלי, ומכאן $H\Theta$ רציונלי. ומאחר של $\Gamma\Delta$ אל $B\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם $H\Theta$. ושניהם רציונליים; לכן $H\Theta$, ZH , רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $Z\Theta$ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השלישית.

שהרי כפי ש E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש $\Gamma\Delta$ אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$. לפיכך בשוויון, כפי ש E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל $H\Theta$. אך ל E אל $\Gamma\Delta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן A חסר־מידה

באורך עם $H\Theta$. לפיכך אף אחד מן ZH , $H\Theta$ אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון A . יהי הריבוע שעל K השטח שבו הריבוע שעל ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$. ומאחר שכפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$, בהמרה כפי ש־ $B\Gamma$ אל BA , כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K . אך ל־ $B\Gamma$ אל BA היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH בן־מידה באורך עם K , וריבועו של ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ואף אחד מן ZH , $H\Theta$ אינו בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $Z\Theta$ אפוטומה שלישית.

נמצאה אפוא האפוטומה השלישית $Z\Theta$; כנדרש להוכיח.

למצוא אפוטומה רביעית.

יונח הקו הרציונלי A , ויהי BH בן־מידה באורך עם A ; לפיכך גם BH רציונלי. ויונחו שני המספרים ΔZ , ZE , כך שלשלם ΔE אל כל אחד מן ΔZ , ZE אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויעשה כפי ש־ ΔE אל ZE , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$; לפיכך הריבוע שעל BH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Gamma$. אך הריבוע שעל BH רציונלי; לכן גם הריבוע שעל $H\Gamma$ רציונלי, ומכאן $H\Gamma$ רציונלי. ומאחר ש־ ΔE אל ZE אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך BH חסר־מידה באורך עם $H\Gamma$. ושניהם רציונליים; לכן BH , $H\Gamma$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $B\Gamma$ אפוטומה.

יהי הריבוע שעל Θ השטח שבו הריבוע שעל BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$. ומאחר שכפי ש־ ΔE אל EZ , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$, בהמרה כפי ש־ $E\Delta$ אל ΔZ , כך הריבוע שעל HB אל הריבוע שעל Θ . אך ל־ $E\Delta$ אל ΔZ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל HB אל הריבוע שעל Θ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך BH חסר־מידה באורך עם Θ ; וריבועו של BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ . לכן BH גדול בריבוע מן $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ חסר־מידה באורך עמו. ועוד השלם BH בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $B\Gamma$ אפוטומה רביעית.

נמצאה אפוא האפוטומה הרביעית; כנדרש להוכיח.

למצוא אפוטומה חמישית.

יונח הקו הרציונלי A , ויהי ΓH בן־מידה באורך עם A ; לפיכך ΓH רציונלי. ויונחו שני המספרים ΔZ , ZE , כך ששוב, ל־ ΔE אל כל אחד מן ΔZ , ZE אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויעשה כפי ש־ ZE אל $E\Delta$, כך הריבוע שעל ΓH אל הריבוע שעל HB . לפיכך גם הריבוע שעל HB רציונלי, ומכאן BH רציונלי. ומאחר שכפי ש־ ΔE אל EZ , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$, ואילו ל־ ΔE אל EZ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך BH חסר־מידה באורך עם $H\Gamma$. ושניהם רציונליים; לכן $H\Gamma$, BH רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $B\Gamma$ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם החמישית.

יהי הריבוע שעל Θ השטח שבו הריבוע שעל BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$. ומאחר שכפי שהריבוע שעל BH אל הריבוע שעל $H\Gamma$, כך ΔE אל EZ , בהמרה כפי ש- $E\Delta$ אל ΔZ , כך הריבוע שעל BH אל הריבוע שעל Θ . אך ל- $E\Delta$ אל ΔZ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל BH אל הריבוע שעל Θ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך BH חסר-מידה באורך עם Θ ; וריבועו של BH גדול מן הריבוע שעל $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ . לכן HB גדול בריבוע מן $H\Gamma$ בריבוע שעל Θ חסר-מידה באורך עמו. ועוד הקו המצורף ΓH בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $B\Gamma$ אפוטומה חמישית.

נמצאה אפוא האפוטומה החמישית $B\Gamma$; כנדרש להוכיח.

למצוא אפוטומה שישית.

יונחו הקו הרציונלי A ושלוש המספרים E , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, שאין בין שום שניים מהם היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; ועוד, גם ל- ΓB אל $B\Delta$ לא יהיה היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. ויעשה כפי ש- E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש- $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$.

מאחר שכפי ש- E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH , הריבוע שעל A בן-מידה עם הריבוע שעל ZH . אך הריבוע שעל A רציונלי; לכן גם הריבוע שעל ZH רציונלי, ומכאן ZH רציונלי. ומאחר של- E אל $B\Gamma$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך A חסר-מידה באורך עם ZH . ושוב, מאחר שכפי ש- $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע

שעל $H\Theta$, הריבוע שעל ZH בן־מידה עם הריבוע שעל $H\Theta$. אך הריבוע שעל ZH רציונלי; לכן גם הריבוע שעל $H\Theta$ רציונלי, ומכאן $H\Theta$ רציונלי. ומאחר של־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם $H\Theta$. ושניהם רציונליים; לכן ZH , $H\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $Z\Theta$ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השישית.

שהרי כפי ש־ E אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל ZH ; וכפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$. לפיכך בשוויון, כפי ש־ E אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל A אל הריבוע שעל $H\Theta$. אך ל־ E אל $\Gamma\Delta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל A אל הריבוע שעל $H\Theta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ומכאן A חסר־מידה באורך עם $H\Theta$. לפיכך אף אחד מן ZH , $H\Theta$ אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי A . יהי הריבוע שעל K השטח שבו הריבוע שעל ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$. ומאחר שכפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל $H\Theta$, בהמרה כפי ש־ ΓB אל $B\Delta$, כך הריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K . אך ל־ ΓB אל $B\Delta$ אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לכן גם לריבוע שעל ZH אל הריבוע שעל K אין היחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי. לפיכך ZH חסר־מידה באורך עם K ; וריבועו של ZH גדול מן הריבוע שעל $H\Theta$ בריבוע שעל K . לכן ZH גדול בריבוע מן $H\Theta$ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ואף אחד מן ZH , $H\Theta$ אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון A . לפיכך $Z\Theta$ אפוטומה שישית.

נמצאה אפוא האפוטומה השישית $Z\Theta$; כנדרש להוכיח.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה ראשונה, הקו שריבועו שווה לשטח הוא אפוטומה.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AF לבין האפוטומה הראשונה AD . אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה.

מאחר ש- AD אפוטומה ראשונה, יהי ΔH הקו המצורף לה; לפיכך HA , AH , רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד. והשלם AH בן-מידה עם הקו הרציונלי הנתון AF , ו- AH גדול בריבוע מן HA בריבוע שעל קו בן-מידה באורך עמו. לפיכך, אם בצמוד ל- AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ΔH וחסרה בצורת ריבוע, היא מחלקת אותו לחלקים בני-מידה. ייחצה ΔH ב- E , ובצמוד ל- AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ , ZH , השווה לריבוע שעל EH ; לפיכך AZ בן-מידה עם ZH . ודרך הנקודות E , Z , H יועברו המקבילים $E\Theta$, ZI , HK ל- AF .

ומאחר ש- AZ בן-מידה באורך עם ZH , גם AH בן-מידה באורך עם כל אחד מן AZ , ZH . אך AH בן-מידה עם AF ; לפיכך גם כל אחד מן AZ , ZH בן-מידה באורך עם AF . ו- AF רציונלי; לכן גם כל אחד מן AZ , ZH רציונלי, ומכאן כל אחד מן AI , ZK רציונלי. ומאחר ש- ΔE בן-מידה באורך עם EH , גם ΔH בן-מידה באורך עם כל אחד מן ΔE , EH . אך ΔH רציונלי וחסר-מידה באורך עם AF ; לפיכך גם כל אחד מן ΔE , EH רציונלי וחסר-מידה באורך עם AF . לכן כל אחד מן $\Delta\Theta$, EK אמצעי.

עתה ייבנה הריבוע ΛM השווה ל- AI , וממנו ייגרע הריבוע NE השווה ל- ZK ובעל עמו את הזווית המשותפת AOM ; לפיכך הריבועים AM , NE סביב אותו אלכסון. יהי אלכסונם OP , ותושלם הצורה. מאחר שהמלבן הכלול בין AZ , ZH שווה לריבוע שעל EH , כפי ש- AZ אל EH , כך EH אל ZH . אך כפי ש- AZ אל EH , כך AI אל EK , וכפי ש- EH אל ZH , כך EK אל KZ ; לפיכך EK הוא ממוצע פרופורציונלי בין AI , KZ . וגם MN הוא ממוצע פרופורציונלי בין AM , NE , כפי שהוכח קודם; ו- AI שווה לריבוע ΛM ו- KZ שווה ל- NE . לפיכך גם MN שווה ל- EK . אך EK שווה ל- $\Delta\Theta$, ו- MN שווה ל- ΛE ; לכן ΔK שווה יחד לגנומון $Y\Phi X$ ול- NE . ועוד AK שווה לשני הריבועים AM , NE ; לפיכך השארית AB שווה ל- ST . אך ST הוא הריבוע שעל AN ; לכן הריבוע שעל AN שווה ל- AB , ומכאן ריבועו של AN שווה לשטח AB .

אומר אני ש- AN אפוטומה.

מאחר שכל אחד מן AI , ZK רציונלי ושווה בהתאמה ל- AM , NE , גם כל אחד מן AM , NE רציונלי, כלומר הריבוע שעל כל אחד מן AO , ON רציונלי; לפיכך כל אחד מן AO , ON רציונלי. ושוב, מאחר ש- $\Delta\Theta$ אמצעי ושווה ל- ΛE , גם ΛE אמצעי. עתה ΛE אמצעי ואילו NE רציונלי; לפיכך ΛE חסר־מידה עם NE . וכפי ש- ΛE אל NE , כך ΛO אל ON ; לכן ΛO חסר־מידה באורך עם ON . ושניהם רציונליים; לפיכך AO , ON רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן AN אפוטומה. וריבועו שווה לשטח AB ; לכן הקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה.

לפיכך, אם שטח כלול בין קו רציונלי — וכן הלאה.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה שנייה, הקו שריבועו שווה לשטח הוא אפוטומה אמצעית ראשונה.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AG לבין האפוטומה השנייה AD. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה אמצעית ראשונה.

יהי ΔH הקו המצורף ל-AD; לפיכך HA , AH רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, והקו המצורף ΔH בן-מידה עם הקו הרציונלי הנתון AG, ואילו השלם AH גדול בריבוע מן הקו המצורף HA בריבוע שעל קו בן-מידה באורך עמו. ומאחר ש- AH גדול בריבוע מן HA בריבוע שעל קו בן-מידה עמו, אם בצמוד ל- AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל HA וחסרה בצורת ריבוע, היא מחלקת אותו לחלקים בני-מידה. ייחצה אפוא ΔH ב- E ; ובצמוד ל- AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ , ZH , השווה לריבוע שעל EH ; לפיכך AZ בן-מידה באורך עם ZH . לכן גם AH בן-מידה באורך עם כל אחד מן AZ , ZH . אך AH רציונלי וחסר-מידה באורך עם AG; לפיכך גם כל אחד מן AZ , ZH רציונלי וחסר-מידה באורך עם AG, ולכן כל אחד מן AI , ZK אמצעי. ושוב, מאחר ש- ΔE בן-מידה עם EH , גם ΔH בן-מידה עם כל אחד מן ΔE , EH . אך ΔH בן-מידה באורך עם AG; לפיכך כל אחד מן $\Delta\theta$, EK רציונלי.

ייבנה אפוא הריבוע ΔM השווה ל- AI , וממנו ייגרע NE השווה ל- ZK ובעל עם ΔM את אותה הזווית ΔOM ; לפיכך הריבועים ΔM , NE סביב אותו אלכסון. יהי אלכסונם OP , ותושלם הצורה. מאחר ש- AI , ZK אמצעיים ושווים לריבועים שעל ΔO , ON , גם הריבועים שעל ΔO , ON אמצעיים; ולכן גם ΔO , ON אמצעיים ובני-מידה בריבוע בלבד. ומאחר שהמלבן הכלול בין AZ ,

ZH שווה לריבוע שעל EH, כפי ש־AZ אל EH, כך EH אל ZH. אך כפי ש־AZ אל EH, כך AI אל EK, וכפי ש־EH אל ZH, כך EK אל ZK; לפיכך EK הוא ממוצע פרופורציונלי בין AI, ZK וגם MN הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים NE, AM; ו־AI שווה ל־AM ו־ZK שווה ל־NE; לכן MN שווה ל־EK. אך $\Delta \Theta$ שווה ל־EK ו־ $\Delta \Lambda$ שווה ל־MN; לפיכך השלם ΔK שווה יחד לגנומון YΦX ול־NE. ומאחר שהשלם AK שווה ל־NE, AM, NE, ומתוכו ΔK שווה לגנומון YΦX ול־NE, השארית AB שווה ל־TΣ. אך TΣ הוא הריבוע שעל AN; לפיכך הריבוע שעל AN שווה לשטח AB, ומכאן ריבועו של AN שווה לשטח AB.

אומר אני ש־AN אפוטומה אמצעית ראשונה.

מאחר ש־EK רציונלי ושווה ל־ $\Delta \Lambda$, גם $\Delta \Lambda$ רציונלי, כלומר המלבן הכלול בין ΔO , ON רציונלי. אך NE הוכח כאמצעי; לפיכך $\Delta \Lambda$ חסר־מידה עם NE. וכפי ש־ $\Delta \Lambda$ אל NE, כך ΔO אל ON; לכן ΔO , ON חסר־מידה באורך. לפיכך ΔO , ON אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד, והם כוללים מלבן רציונלי. מכאן AN אפוטומה אמצעית ראשונה; וריבועו שווה לשטח AB.

לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה אמצעית ראשונה; מש״ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה שלישית, הקו שריבועו שווה לשטח הוא אפוטומה אמצעית שנייה.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AI לבין האפוטומה השלישית $\Delta \Lambda$. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה אמצעית שנייה.

יהי ΔH הקו המצורף ל- ΔA ; לפיכך $AH, H\Delta$ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ואף אחד מן $AH, H\Delta$ אינו בני-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $A\Gamma$, ואילו השלם AH גדול בריבוע מן הקו המצורף ΔH בריבוע שעל קו בני-מידה באורך עמו. ומאחר ש- AH גדול בריבוע מן $H\Delta$ בריבוע שעל קו בני-מידה עמו, אם בצמוד ל- AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ΔH וחסרה בצורת ריבוע, היא תחלק אותו לחלקים בני-מידה. ייחצה אפוא ΔH ב- E , ובצמוד ל- AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ, ZH . ודרך הנקודות E, Z, H יועברו המקבילים $E\Theta, ZI, HK$ ל- $A\Gamma$. לפיכך AZ, ZH בני-מידה, ולכן גם AI בני-מידה עם ZK . ומאחר ש- AZ, ZH בני-מידה באורך, גם AH בני-מידה באורך עם כל אחד מהם. אך AH רציונלי וחסר-מידה באורך עם $A\Gamma$; לכן כך גם AZ, ZH , ומכאן כל אחד מן AI, ZK אמצעי. ושוב, מאחר ש- ΔE בני-מידה באורך עם EH , גם ΔH בני-מידה באורך עם כל אחד מהם. אך $H\Delta$ רציונלי וחסר-מידה באורך עם $A\Gamma$; לפיכך גם כל אחד מן $\Delta E, EH$ רציונלי וחסר-מידה באורך עם $A\Gamma$, ולכן כל אחד מן $\Delta\Theta, EK$ אמצעי. ומאחר ש- $AH, H\Delta$ בני-מידה בריבוע בלבד, AH חסר-מידה באורך עם $H\Delta$. אך AH בני-מידה באורך עם AZ ו- ΔH בני-מידה עם EH ; לפיכך AZ חסר-מידה באורך עם EH . וכפי ש- AZ אל EH , כך AI אל EK ; לכן AI חסר-מידה עם EK .

ייבנה אפוא הריבוע ΛM השווה ל- $A\Gamma$, וממנו ייגרע NE השווה ל- ZK ובעל עמו אותה זווית; לפיכך $\Lambda M, NE$ סביב אותו אלכסון. יהי אלכסונם OP , ותושלם הצורה. ומאחר שהמלבן הכלול בין AZ, ZH שווה לריבוע שעל EH , כפי ש- AZ אל EH , כך EH אל ZH . אך כפי ש- AZ אל EH , כך AI אל EK , וכפי ש- EH אל ZH , כך EK אל ZK ; לפיכך כפי ש- AI אל EK , כך EK אל

ZK. לכן EK הוא ממוצע פרופורציונלי בין AI, ZK. וגם MN הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים $\Delta M, N\Xi$; ו־ AI שווה ל־ ΔM ו־ ZK שווה ל־ $N\Xi$; לפיכך EK שווה ל־MN. אך MN שווה ל־ ΔE ו־EK שווה ל־ $\Delta\Theta$; לכן השלם ΔK שווה יחד לגנומון $Y\Phi X$ ול־ $N\Xi$. ועוד AK שווה ל־ $\Delta M, N\Xi$; לפיכך השארית AB שווה ל־ ΣT , כלומר לריבוע שעל AN. מכאן ריבועו של AN שווה לשטח AB.

אומר אני ש־AN אפוטומה אמצעית שנייה.

מאחר ש־AI, ZK הוכחו כאמצעיים ושווים לריבועים שעל $\Delta O, ON$, גם כל אחד מן הריבועים שעל $\Delta O, ON$ אמצעי; לפיכך כל אחד מן $\Delta O, ON$ אמצעי. ומאחר ש־ AI בן־מידה עם ZK, גם הריבוע שעל ΔO בן־מידה עם הריבוע שעל ON. ושוב, מאחר ש־ AI הוכח חסר־מידה עם EK, גם ΔM חסר־מידה עם MN, כלומר הריבוע שעל ΔO חסר־מידה עם המלבן הכלול בין $\Delta O, ON$; ולכן גם ΔO חסר־מידה באורך עם ON. לפיכך $\Delta O, ON$ אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד.

אומר אני שהם גם כוללים מלבן אמצעי.

שהרי EK הוכח כאמצעי ושווה למלבן הכלול בין $\Delta O, ON$; לפיכך גם המלבן הכלול בין $\Delta O, ON$ אמצעי. לכן $\Delta O, ON$ אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד הכוללים מלבן אמצעי. מכאן AN אפוטומה אמצעית שנייה; וריבועו שווה לשטח AB.

לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח AB הוא אפוטומה אמצעית שנייה; מש״ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה רביעית, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו הקטן.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AG לבין האפוטומה הרביעית AD. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא הקו הקטן.

יהי ΔH הקו המצורף ל-AD; לפיכך HA , AH רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, AH בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון AG, והשלם AH גדול בריבוע מן הקו המצורף ΔH בריבוע שעל קו חסר-מידה באורך עמו. ומאחר ש- AH גדול בריבוע מן HA בריבוע שעל קו חסר-מידה באורך עמו, אם בצמוד ל- AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ΔH וחסרה בצורת ריבוע, היא תחלק אותו לחלקים חסרי-מידה. ייחצה אפוא ΔH ב- E , ובצמוד ל- AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ , ZH , השווה לריבוע שעל EH ; לפיכך AZ חסר-מידה באורך עם ZH . דרך E , Z , H יועברו המקבילים $E\Theta$, ZI , HK ל- BD , AG . ומאחר ש- AH רציונלי ובן-מידה באורך עם AG, השלם AK רציונלי. ושוב, מאחר ש- ΔH חסר-מידה באורך עם AG ושניהם רציונליים, ΔK אמצעי. ושוב, מאחר ש- AZ חסר-מידה באורך עם ZH , גם AI חסר-מידה עם ZK . ייבנה אפוא הריבוע ΔM השווה ל- AI , וממנו ייגרע הריבוע ΔN השווה ל- ZK ובעל עמו את אותה הזווית ΔOM ; לפיכך הריבועים ΔM , ΔN סביב אותו אלכסון. יהי אלכסון OP , ותושלם הצורה. מאחר שהמלבן הכלול בין AZ , ZH שווה לריבוע שעל EH , כפי ש- AZ אל EH , כך EH אל ZH . אך כפי ש- AZ אל EH , כך AI אל EK , וכפי ש- EH אל ZH , כך EK אל ZK ; לפיכך EK הוא ממוצע פרופורציונלי בין AI , ZK . וגם MN הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים ΔM , ΔN ; AI שווה ל- ΔM ו- ZK שווה ל- ΔN ; לכן EK שווה ל- MN . אך $\Delta \Theta$ שווה ל- EK ו- $\Delta \Xi$ שווה

ל־MN; לפיכך השלם ΔK שווה יחד לגנומון $Y\Phi X$ ולריבוע NE . ומאחר שהשלם AK שווה לריבועים AM , NE , ומתוכו ΔK שווה לגנומון $Y\Phi X$ ולריבוע NE , השארית AB שווה ל־ ΣT , כלומר לריבוע שעל AN . מכאן ריבועו של AN שווה לשטח AB .

אומר אני ש־ AN הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הקטן.

מאחר ש־ AK רציונלי ושווה לסכום הריבועים שעל AO , ON , סכום הריבועים שעל AO , ON רציונלי. ושוב, מאחר ש־ ΔK אמצעי ושווה לפעמיים המלבן הכלול בין AO , ON , פעמיים המלבן הכלול בין AO , ON אמצעי. ומאחר ש־ AI הוכח חסר־מידה עם ZK , גם הריבוע שעל AO חסר־מידה עם הריבוע שעל ON . לפיכך AO , ON חסר־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. לכן AN הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו הקטן; וריבועו שווה לשטח AB .

לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח AB הוא הקו הקטן; מש״ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה חמישית, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AI לבין האפוטומה החמישית $A\Delta$. אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

יהי ΔH הקו המצורף ל־ $A\Delta$; לפיכך AH , $H\Delta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, הקו המצורף $H\Delta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון AI , והשלם AH גדול בריבוע מן הקו המצורף ΔH בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו.

לפיכך, אם בצמוד ל־AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ΔH וחסרה בצורת ריבוע, היא תחלק אותו לחלקים חסרי־מידה. ייחצה אפוא ΔH בנקודה E, ובצמוד ל־AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ, ZH, השווה לריבוע שעל EH; לפיכך AZ חסר־מידה באורך עם ZH. ומאחר ש־AH חסר־מידה באורך עם ΓA ושניהם רציונליים, AK אמצעי. ושוב, מאחר ש־ ΔH רציונלי ובן־מידה עם ΔK , ΔF רציונלי. ייבנה אפוא הריבוע AM השווה ל־AI, וממנו יגרע הריבוע NE השווה ל־ZK ובעל עמו את אותה הזווית AOM; לפיכך הריבועים AM, NE סביב אותו אלכסון. יהי אלכסונם OP, ותושלם הצורה. בדומה נוכיח שריבועו של AN שווה לשטח AB.

אומר אני ש־AN הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

מאחר ש־AK הוכח כאמצעי ושווה לסכום הריבועים שעל ΔO , ON, סכום הריבועים שעל ΔO , ON אמצעי. ושוב, מאחר ש־ ΔK רציונלי ושווה לפעמיים המלבן הכלול בין ΔO , ON, גם פעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי. ומאחר ש־AI חסר־מידה עם ZK, גם הריבוע שעל ΔO חסר־מידה עם הריבוע שעל ON; לפיכך ΔO , ON חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי. לכן השארית AN היא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי; וריבועו שווה לשטח AB.

לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח AB הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי; מש״ל.

אם שטח כלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה שישית, הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

יהי אפוא השטח AB כלול בין הקו הרציונלי AG לבין האפוטומה השישית AD . אומר אני שהקו שריבועו שווה לשטח AB הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

יהי ΔH הקו המצורף ל- AD ; לפיכך HA , AH רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ואף אחד מהם אינו בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון AG , והשלם AH גדול בריבוע מן הקו המצורף ΔH בריבוע שעל קו חסר-מידה באורך עמו. ומאחר ש- AH גדול בריבוע מן HA בריבוע שעל קו חסר-מידה באורך עמו, אם בצמוד ל- AH נבנית מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ΔH וחסרה בצורת ריבוע, היא תחלק אותו לחלקים חסרי-מידה. ייחצה אפוא ΔH ב- E , ובצמוד ל- AH תיבנה המקבילית החסרה בצורת ריבוע, המלבן הכלול בין AZ , ZH , השווה לריבוע שעל EH ; לפיכך AZ חסר-מידה באורך עם ZH . וכפי ש- AZ אל ZH , כך AI אל ZK ; לכן AI חסר-מידה עם ZK . ומאחר ש- AH , AG רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, AK אמצעי. ושוב, מאחר ש- ΔH , AG רציונליים וחסרי-מידה באורך, גם ΔK אמצעי. ומאחר ש- HA , AH בני-מידה בריבוע בלבד, AH חסר-מידה באורך עם HA . וכפי ש- AH אל HA , כך AK אל KA ; לפיכך AK חסר-מידה עם KA . ייבנה אפוא הריבוע AM השווה ל- AI , וממנו ייגרע NE השווה ל- ZK ובעל עמו אותה זווית; לפיכך הריבועים AM , NE סביב אותו אלכסון. יהי אלכסונם OP , ותושלם הצורה. בדומה להוכחות שלעיל נוכיח שריבועו של AN שווה לשטח AB .

אומר אני ש- AN הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

מאחר ש- AK הוכח כאמצעי ושווה לסכום הריבועים שעל AO , ON , סכום הריבועים שעל AO , ON אמצעי. ושוב, מאחר ש- ΔK הוכח כאמצעי ושווה

לפעמיים המלבן הכלול בין ΔO , ON , גם פעמיים המלבן הכלול בין ΔO , ON אמצעי. ומאחר ש- AK הוכח חסר־מידה עם ΔK , גם סכום הריבועים שעל ΔO , ON חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. ומאחר ש- AI חסר־מידה עם ΔK , גם הריבוע שעל ΔO חסר־מידה עם הריבוע שעל ON . לפיכך ΔO , ON חסר־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי, פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם פעמיים המלבן. לכן ΔN הוא הקו האי־רציונלי הנקרא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי; וריבועו שווה לשטח AB .

לפיכך הקו שריבועו שווה לשטח הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי; מש"ל.

כאשר הריבוע שעל אפוטומה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה ראשונה.

תהי AB אפוטומה ויהי ΔA קו רציונלי; בצמוד ל־ ΔA תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני ש־ ΓZ אפוטומה ראשונה.

יהי BH הקו המצורף ל־ AB ; לפיכך AH , HB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ובצמוד ל־ ΔA ייבנו $\Gamma \Theta$ השווה לריבוע שעל AH ו־ KA השווה לריבוע שעל BH . לפיכך השלם ΓA שווה לסכום הריבועים שעל AH , HB ; ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB , ולכן השארית ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH , HB . ייחצה ZM בנקודה N , ודרך N יועבר NE מקביל ל־ ΔA ; לפיכך כל אחד מן ZE , ΔN שווה למלבן הכלול בין AH , HB . ומאחר שהריבועים שעל AH , HB רציונליים, ו־ ΔM שווה לסכומם, ΔM רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΔA ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי ובני־מידה באורך

עם $\Gamma\Delta$. ושוב, מאחר שפעמיים המלבן הכלול בין AH , HB אמצעי ושווה ל- $Z\Lambda$, גם $Z\Lambda$ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $\Gamma\Delta$ ויוצר כרוחב את ZM ; לפיכך ZM רציונלי וחסר-מידה באורך עם $\Gamma\Delta$. ומאחר שסכום הריבועים שעל AH , HB רציונלי ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, הם חסרי-מידה זה עם זה. והראשון שווה ל- ΔM והשני ל- $Z\Lambda$; לפיכך ΔM חסר-מידה עם $Z\Lambda$. וכפי ש- ΔM אל $Z\Lambda$, כך ΓM אל ZM ; לכן ΓM חסר-מידה באורך עם ZM . ושניהם רציונליים; לפיכך ΓM , MZ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם הראשונה.

מאחר שהמלבן הכלול בין AH , HB הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל AH , HB , ו- $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל $K\Lambda$, AH , שווה לריבוע שעל BH , ו- $N\Lambda$ שווה למלבן הכלול ביניהם, גם $N\Lambda$ הוא ממוצע פרופורציונלי בין $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. לפיכך כפי ש- $\Gamma\Theta$ אל $N\Lambda$, כך $N\Lambda$ אל $K\Lambda$. אך כפי ש- $\Gamma\Theta$ אל $N\Lambda$, כך ΓK אל NM , וכפי ש- $N\Lambda$ אל $K\Lambda$, כך NM אל KM ; לכן המלבן הכלול בין ΓK , KM שווה לריבוע שעל NM , כלומר לרבע הריבוע שעל ZM . ומאחר שהריבוע שעל AH בן-מידה עם הריבוע שעל HB , גם $\Gamma\Theta$ בן-מידה עם $K\Lambda$. וכפי ש- $\Gamma\Theta$ אל $K\Lambda$, כך ΓK אל KM ; לפיכך ΓK בן-מידה עם KM . עתה ΓM , MZ שני קווים לא-שווים, ובצמוד ל- ΓM נבנתה המקבילית, המלבן הכלול בין ΓK , KM , השווה לרבע הריבוע שעל ZM וחסרה בצורת ריבוע, ו- ΓK בן-מידה עם KM ; לפיכך ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל קו בן-מידה באורך עמו. ועוד ΓM בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma\Delta$. לכן ΓZ אפוטומה ראשונה.

לפיכך, כאשר הריבוע שעל אפוטומה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה ראשונה; מש"ל.

כאשר הריבוע שעל אפוטומה אמצעית ראשונה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שנייה.

תהי AB אפוטומה אמצעית ראשונה ויהי ΓA קו רציונלי; בצמוד ל ΓA תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני ש ΓZ אפוטומה שנייה.

יהי BH הקו המצורף ל AB ; לפיכך AH, HB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד והם כוללים מלבן רציונלי. בצמוד ל ΓA ייבנה $\Gamma \Theta$ השווה לריבוע שעל AH והיוצר כרוחב את ΓK , ו ΓK השווה לריבוע שעל HB והיוצר כרוחב את KM . לפיכך השלם ΓA שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB , ולכן גם ΓA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΓA ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓA . ומאחר ש ΓA שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB , ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB , השארית ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB . אך פעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי; לפיכך ZA רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ZE ויוצר כרוחב את ZM ; לכן ZM רציונלי ובן־מידה באורך עם ΓA . עתה סכום הריבועים שעל AH, HB , כלומר ΓA , אמצעי, ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם, כלומר ZA , רציונלי; לפיכך ΓA חסר־מידה עם ZA . וכפי ש ΓA אל ZA , כך ΓM אל ZM ; לכן ΓM חסר־מידה באורך עם ZM . ושניהם רציונליים; לפיכך $\Gamma M, MZ$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השנייה.

ייחזה ZM ב־N, ודרך N יועבר NE מקביל ל־ $\Gamma\Delta$; לפיכך כל אחד מן ZE, NA שווה למלבן הכלול בין AH, HB. ומאחר שהמלבן הכלול בין AH, HB הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל AH, HB, ו־ $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל NA, AH, NA שווה למלבן הכלול ביניהם, ו־ $K\Lambda$ שווה לריבוע שעל BH, גם NA הוא ממוצע פרופורציונלי בין $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. לפיכך כפי ש־ $\Gamma\Theta$ אל NA, כך NA אל $K\Lambda$. אך כפי ש־ $\Gamma\Theta$ אל NA, כך ΓK אל NM, וכפי ש־NA אל $K\Lambda$, כך NM אל MK; לכן כפי ש־ ΓK אל NM, כך NM אל KM. לפיכך המלבן הכלול בין ΓK , KM שווה לריבוע שעל NM, כלומר לרבע הריבוע שעל ZM. עתה ΓM , MZ שני קווים לא־שווים, ובצמוד לגדול ΓM נבנתה המקבילית, המלבן הכלול בין ΓK , KM, השווה לרבע הריבוע שעל MZ וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים בני־מידה. לכן ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ועוד הקו המצורף ZM בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma\Delta$. לפיכך ΓZ אפוטומה שנייה.

לפיכך, כאשר הריבוע שעל אפוטומה אמצעית ראשונה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שנייה; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל אפוטומה אמצעית שנייה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שלישית.

תהי AB אפוטומה אמצעית שנייה ויהי $\Gamma\Delta$ קו רציונלי; בצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני ש־ ΓZ אפוטומה שלישית.

יהי BH הקו המצורף ל־AB; לפיכך AH, HB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד והם כוללים מלבן אמצעי. בצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ ייבנה $\Gamma\Theta$ השווה לריבוע שעל

AH והיוצר כרוחב את ΓK , ובצמוד ל־ $K\Theta$ ייבנה KA השווה לריבוע שעל BH והיוצר כרוחב את KM . לפיכך השלם ΓA שווה לסכום הריבועים שעל AH , HB , ולכן גם ΓA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ΓA ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓA . ומאחר שהשלם ΓA שווה לסכום הריבועים שעל AH , HB , ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB , השארית AZ שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH , HB . ייחצה אפוא ZM בנקודה N , ויועבר NE מקביל ל־ ΓA ; לפיכך כל אחד מן ZE , NA שווה למלבן הכלול בין AH , HB . והמלבן הכלול בין AH , HB אמצעי; לכן גם ZA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את ZM ; לפיכך ZM רציונלי וחסר־מידה באורך עם ΓA . ומאחר ש־ AH , HB בני־מידה בריבוע בלבד, AH חסר־מידה באורך עם HB ; לכן הריבוע שעל AH חסר־מידה עם המלבן הכלול בין AH , HB . אך סכום הריבועים שעל AH , HB בן־מידה עם הריבוע שעל AH , ופעמיים המלבן הכלול ביניהם בן־מידה עם המלבן הכלול ביניהם; לפיכך סכום הריבועים שעל AH , HB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם. אך ΓA שווה לסכום הריבועים, ו־ ZA שווה לפעמיים המלבן; לכן ΓA חסר־מידה עם ZA . וכפי ש־ ΓA אל ZA , כך ΓM אל ZM ; לפיכך ΓM חסר־מידה באורך עם ZM . ושניהם רציונליים; לכן ΓM , MZ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השלישית.

מאחר שהריבוע שעל AH בן־מידה עם הריבוע שעל HB , גם $\Gamma\Theta$ בן־מידה עם KA ; ולכן גם ΓK בן־מידה עם KM . ומאחר שהמלבן הכלול בין AH , HB הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל AH , HB , ו־ $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל KA , AH שווה לריבוע שעל HB , ו־ NA שווה למלבן הכלול ביניהם, גם NA

הוא ממוצע פרופורציונלי בין $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. לפיכך כפי ש- $\Gamma\Theta$ אל NA , כך NA אל $K\Lambda$. אך כפי ש- $\Gamma\Theta$ אל NA , כך ΓK אל NM , וכפי ש- NA אל $K\Lambda$, כך NM אל KM ; לכן כפי ש- ΓK אל MN , כך MN אל KM . לפיכך המלבן הכלול בין ΓK , KM שווה לרבע הריבוע שעל ZM . עתה ΓM , MZ שני קווים לא־שווים, ובצמוד ל- ΓM נבנתה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ZM וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים בני־מידה; לכן ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו. ואף אחד מן ΓM , MZ אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma\Delta$. לפיכך ΓZ אפוטומה שלישית.

לפיכך, כאשר הריבוע שעל אפוטומה אמצעית שנייה נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שלישית; מש"ל.

כאשר הריבוע שעל הקו הקטן נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה רביעית.

יהי AB הקו הקטן ויהי $\Gamma\Delta$ קו רציונלי; בצמוד לקו הרציונלי $\Gamma\Delta$ תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני ש- ΓZ אפוטומה רביעית.

יהי BH הקו המצורף ל- AB ; לפיכך AH , HB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי. בצמוד ל- $\Gamma\Delta$ ייבנה $\Gamma\Theta$ השווה לריבוע שעל AH והיוצר כרוחב את ΓK , וכן $K\Lambda$ השווה לריבוע שעל BH והיוצר כרוחב את KM . לפיכך השלם $\Gamma\Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל AH , HB . והסכום הזה רציונלי; לכן גם $\Gamma\Lambda$ רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $\Gamma\Delta$ ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי ובן־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$. ומאחר שהשלם $\Gamma\Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל

AH, HB , ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB , השארית ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB . ייחצה אפוא ZM בנקודה N , ודרך N יועבר NE מקביל לכל אחד מן $\Gamma A, MA$; לפיכך כל אחד מן ZE, NA שווה למלבן הכלול בין AH, HB . ומאחר שפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB אמצעי ושווה ל- ZA , גם ZA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ZE ויוצר כרוחב את ZM ; לפיכך ZM רציונלי וחסר-מידה באורך עם ΓA . ומאחר שסכום הריבועים שעל AH, HB רציונלי ואילו פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, הם חסרי-מידה זה עם זה. אך ΓA שווה לסכום הריבועים ו- ZA שווה לפעמיים המלבן; לפיכך ΓA חסר-מידה עם ZA . וכפי ש- ΓA אל ZA , כך ΓM אל MZ ; לכן ΓM חסר-מידה באורך עם MZ . ושניהם רציונליים; לפיכך $\Gamma M, MZ$ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם הרביעית.

מאחר ש- AH, HB חסרי-מידה בריבוע, הריבוע שעל AH חסר-מידה עם הריבוע שעל HB . ו- $\Gamma \Theta$ שווה לריבוע שעל AH , ו- KA שווה לריבוע שעל HB ; לפיכך $\Gamma \Theta$ חסר-מידה עם KA . וכפי ש- $\Gamma \Theta$ אל KA , כך ΓK אל KM ; לכן ΓK חסר-מידה באורך עם KM . ומאחר שהמלבן הכלול בין AH, HB הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל AH, HB , ו- $\Gamma \Theta$ שווה לריבוע שעל KA , AH, KA שווה לריבוע שעל HB , ו- NA שווה למלבן הכלול ביניהם, גם NA הוא ממוצע פרופורציונלי בין $\Gamma \Theta, KA$. לפיכך כפי ש- $\Gamma \Theta$ אל NA , כך NA אל KA . אך כפי ש- $\Gamma \Theta$ אל NA , כך ΓK אל NM , וכפי ש- NA אל KA , כך NM אל KM ; לכן כפי ש- ΓK אל MN , כך MN אל KM . לפיכך המלבן הכלול בין $\Gamma K, KM$ שווה לריבוע שעל MN , כלומר לרבע הריבוע שעל ZM . עתה $\Gamma M, MZ$ שני קווים לא-שווים, ובצמוד ל- ΓM נבנתה המקבילית, המלבן הכלול בין $\Gamma K, KM$,

השווה לרבע הריבוע שעל MZ וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים חסרי־מידה. לכן ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד השלם ΓM בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma \Delta$. לפיכך ΓZ אפוטומה רביעית.

לפיכך הריבוע שעל הקו הקטן — וכן הלאה.

כאשר הריבוע שעל הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה חמישית.

יהי AB הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי ויהי $\Gamma \Delta$ קו רציונלי; בצמוד ל־ $\Gamma \Delta$ תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני ש־ ΓZ אפוטומה חמישית.

יהי BH הקו המצורף ל־AB; לפיכך הקווים AH, HB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי ופעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי. בצמוד ל־ $\Gamma \Delta$ ייבנו $\Gamma \Theta$ השווה לריבוע שעל AH ו־KA השווה לריבוע שעל HB. לפיכך השלם $\Gamma \Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB. אך סכום הריבועים שעליהם אמצעי; לכן $\Gamma \Lambda$ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $\Gamma \Delta$ ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי וחסר־מידה באורך עם $\Gamma \Delta$. ומאחר שהשלם $\Gamma \Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB, ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB, השארית ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB. ייחצה אפוא ZM ב־N, ודרך N יועבר NE מקביל לכל אחד מן $\Gamma \Delta$, MA; לפיכך כל אחד מן ZE, NA שווה למלבן הכלול בין AH, HB. ומאחר שפעמיים המלבן הכלול ביניהם רציונלי ושווה ל־ZA, ZA רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי EZ ויוצר כרוחב את ZM; לפיכך ZM רציונלי ובן־מידה באורך עם $\Gamma \Delta$. ומאחר

שֶׁ־ $\Gamma\Lambda$ אמצעי ואילו $Z\Lambda$ רציונלי, $\Gamma\Lambda$ חסר־מידה עם $Z\Lambda$. וכפי שֶׁ־ $\Gamma\Lambda$ אל $Z\Lambda$, כך ΓM אל MZ ; לכן ΓM חסר־מידה באורך עם MZ . ושניהם רציונליים; לפיכך $\Gamma M, MZ$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם החמישית.

בדומה נוכיח שהמלבן הכלול בין $\Gamma K, KM$ שווה לריבוע שעל NM , כלומר לרבע הריבוע שעל ZM . ומאחר שהריבוע שעל AH חסר־מידה עם הריבוע שעל HB , ואילו $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל AH ו־ $K\Lambda$ שווה לריבוע שעל $\Gamma\Theta$, HB חסר־מידה עם $K\Lambda$. וכפי שֶׁ־ $\Gamma\Theta$ אל $K\Lambda$, כך ΓK אל KM ; לפיכך ΓK חסר־מידה באורך עם KM . עתה $\Gamma M, MZ$ שני קווים לא־שווים, ובצמוד ל־ ΓM נבנתה מקבילית השווה לרבע הריבוע שעל ZM וחסרה בצורת ריבוע, והיא מחלקת אותו לחלקים חסרי־מידה; לכן ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו. ועוד הקו המצורף ZM בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma\Delta$. לפיכך ΓZ אפוטומה חמישית; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שישית.

יהי AB הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי ויהי $\Gamma\Delta$ קו רציונלי; בצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ תיבנה ΓE השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΓZ . אומר אני שֶׁ־ ΓZ אפוטומה שישית.

יהי BH הקו המצורף ל־ AB ; לפיכך AH, HB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי, פעמיים המלבן הכלול ביניהם אמצעי, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם פעמיים המלבן. בצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ ייבנו $\Gamma\Theta$

השווה לריבוע שעל AH והיוצר כרוחב את ΓK , ו־ $K\Lambda$ השווה לריבוע שעל BH. לפיכך השלם $\Gamma\Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB, ולכן $\Gamma\Lambda$ אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $\Gamma\Delta$ ויוצר כרוחב את ΓM ; לפיכך ΓM רציונלי וחסר־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$. ומאחר ש־ $\Gamma\Lambda$ שווה לסכום הריבועים שעל AH, HB, ומתוכו ΓE שווה לריבוע שעל AB, השארית ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB. וזה אמצעי; לכן גם ZA אמצעי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי ZE ויוצר כרוחב את ZM; לפיכך ZM רציונלי וחסר־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$. ומאחר שסכום הריבועים שעל AH, HB חסר־מידה עם פעמיים המלבן הכלול ביניהם, ו־ $\Gamma\Lambda$ שווה לראשון ו־ZA לשני, $\Gamma\Lambda$ חסר־מידה עם ZA. וכפי ש־ $\Gamma\Lambda$ אל ZA, כך ΓM אל MZ; לפיכך ΓM חסר־מידה באורך עם MZ. ושניהם רציונליים; לכן ΓM , MZ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן ΓZ אפוטומה.

אומר אני שהיא גם השישית.

מאחר ש־ZA שווה לפעמיים המלבן הכלול בין AH, HB, ייחצה ZM ב־N, ודרך N יועבר NE מקביל ל־ $\Gamma\Delta$; לפיכך כל אחד מן ZE, NA שווה למלבן הכלול בין AH, HB. ומאחר ש־AH, HB חסרי־מידה בריבוע, הריבוע שעל AH חסר־מידה עם הריבוע שעל HB. אך $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל AH ו־ $K\Lambda$ שווה לריבוע שעל HB; לכן $\Gamma\Theta$ חסר־מידה עם $K\Lambda$. וכפי ש־ $\Gamma\Theta$ אל $K\Lambda$, כך ΓK אל KM; לפיכך ΓK חסר־מידה באורך עם KM. ומאחר שהמלבן הכלול בין AH, HB הוא ממוצע פרופורציונלי בין הריבועים שעל AH, HB, ו־ $\Gamma\Theta$ שווה לריבוע שעל AH, $K\Lambda$ שווה לריבוע שעל HB, ו־NA שווה למלבן הכלול ביניהם, גם NA הוא ממוצע פרופורציונלי בין $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. לפיכך כפי ש־ $\Gamma\Theta$ אל NA, כך NA אל $K\Lambda$. ומאותם טעמים ΓM גדול בריבוע מן MZ בריבוע שעל

קו חסר־מידה באורך עמו. ואף אחד מהם אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Gamma\Delta$. לפיכך ΓZ אפוטומה שישית; מש"ל.

קו בן־מידה באורך עם אפוטומה הוא אפוטומה ומאותו סדר.

תהי AB אפוטומה, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה באורך עם AB . אומר אני שגם $\Gamma\Delta$ אפוטומה ומאותו סדר כמו AB .

מאחר ש־ AB אפוטומה, יהי BE הקו המצורף לה; לפיכך EB , AE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ויעשה כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך BE אל ΔZ ; ולכן, כפי שאחד אל אחד כך כולם אל כולם, כלומר כפי שהשלם AE אל השלם ΓZ , כך AB אל $\Gamma\Delta$. אך AB בן־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$; לפיכך AE בן־מידה עם ΓZ ו־ BE עם ΔZ . AE , EB רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; לכן גם ΓZ , ΔZ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד.

ומאחר שכפי ש־ AE אל ΓZ , כך BE אל ΔZ , בחילוף כפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל ΔZ . עתה AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו בן־מידה עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. אם AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו בן־מידה עמו, גם ΓZ יהיה גדול בריבוע מן ΔZ בריבוע שעל קו בן־מידה עמו. ואם AE בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם ΓZ ; ואם BE בן־מידה עמו, כך גם ΔZ ; ואם אף אחד מן AE , EB אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן ΓZ , ΔZ אינו בן־מידה עמו. ואם AE גדול בריבוע מן EB בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו, גם ΓZ יהיה גדול בריבוע מן ΔZ בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. ושוב, אם AE בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם ΓZ ; אם BE בן־מידה עמו, כך גם ΔZ ; ואם אף אחד מן AE , EB אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן ΓZ , ΔZ אינו בן־מידה עמו.

לפיכך $\Gamma\Delta$ אפוטומה ומאותו סדר כמו AB ; מש"ל.

קו בן־מידה עם אפוטומה אמצעית הוא אפוטומה אמצעית ומאותו סדר.

תהי AB אפוטומה אמצעית, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה באורך עם AB . אומר אני שגם $\Gamma\Delta$ אפוטומה אמצעית ומאותו סדר כמו AB .

מאחר ש־ AB אפוטומה אמצעית, יהי EB הקו המצורף לה. לפיכך AE , EB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד. ויעשה כפי ש־ AB אל $\Gamma\Delta$, כך BE אל ΔZ ; לפיכך AE בן־מידה עם ΓZ ו־ BE עם ΔZ . אך AE , EB אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד; לכן גם ΓZ , ΔZ אמצעיים ובני־מידה בריבוע בלבד. לפיכך $\Gamma\Delta$ אפוטומה אמצעית.

אומר אני שהיא גם מאותו סדר כמו AB .

מאחר שכפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל ΔZ , גם כפי שהריבוע שעל AE אל המלבן הכלול בין AE , EB , כך הריבוע שעל ΓZ אל המלבן הכלול בין ΓZ , ΔZ . אך הריבוע שעל AE בן־מידה עם הריבוע שעל ΓZ ; לפיכך גם המלבן הכלול בין AE , EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , ΔZ . לכן אם המלבן הכלול בין AE , EB רציונלי, גם המלבן הכלול בין ΓZ , ΔZ רציונלי; ואם המלבן הראשון אמצעי, גם השני אמצעי.

לפיכך $\Gamma\Delta$ אפוטומה אמצעית ומאותו סדר כמו AB ; מש"ל.

קו בן־מידה עם הקו הקטן הוא הקו הקטן.

יהי AB הקו הקטן, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם AB . אומר אני שגם $\Gamma\Delta$ הוא הקו הקטן.

ייעשו אותם הדברים שנעשו קודם. ומאחר ש־ AE , EB חסרי־מידה בריבוע, גם ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע. ומאחר שכפי ש־ AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$, גם כפי שהריבוע שעל AE אל הריבוע שעל EB , כך הריבוע שעל ΓZ אל הריבוע שעל $Z\Delta$. ובהרכבה, כפי שסכום הריבועים שעל AE , EB אל הריבוע שעל EB , כך סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$ אל הריבוע שעל $Z\Delta$. אך הריבוע שעל BE בן־מידה עם הריבוע שעל ΔZ ; לפיכך גם סכום הריבועים שעל AE , EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$. וסכום הריבועים שעל AE , EB רציונלי; לכן גם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$ רציונלי. ושוב, מאחר שכפי שהריבוע שעל AE אל המלבן הכלול בין AE , EB , כך הריבוע שעל ΓZ אל המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$, והריבוע שעל AE בן־מידה עם הריבוע שעל ΓZ , גם המלבן הכלול בין AE , EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. אך המלבן הכלול בין AE , EB אמצעי; לכן גם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$ אמצעי. לפיכך ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם רציונלי והמלבן הכלול ביניהם אמצעי.

לפיכך $\Gamma\Delta$ הוא הקו הקטן; מש"ל.

קו בן־מידה עם הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי הוא גם הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

יהי AB הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם AB . אומר אני שגם $\Gamma\Delta$ הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

יהי BE הקו המצורף ל־ AB ; לפיכך AE , EB חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי. וייעשו אותם הדברים שנעשו קודם. בדומה נוכיח ש־ ΓZ , $Z\Delta$ עומדים באותו יחס כמו AE ,

EB, שסכום הריבועים שעל AE, EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$, ושהמלבן הכלול בין AE, EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$ לפיכך גם ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, סכום הריבועים שעליהם אמצעי והמלבן הכלול ביניהם רציונלי.

לפיכך $\Gamma\Delta$ הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי; מש"ל.

קו בן־מידה עם הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי הוא גם הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

יהי AB הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי, ויהי $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם AB. אומר אני שגם $\Gamma\Delta$ הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

יהי BE הקו המצורף ל־AB, ויעשו אותם הדברים שנעשו קודם. לפיכך AE, EB חסרי־מידה בריבוע, גם סכום הריבועים שעליהם וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעיים, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם המלבן. וכפי שהוכח, AE, EB בני־מידה בהתאמה עם ΓZ , $Z\Delta$; סכום הריבועים שעל AE, EB בן־מידה עם סכום הריבועים שעל ΓZ , $Z\Delta$; והמלבן הכלול בין AE, EB בן־מידה עם המלבן הכלול בין ΓZ , $Z\Delta$. לפיכך גם ΓZ , $Z\Delta$ חסרי־מידה בריבוע, גם סכום הריבועים שעליהם וגם המלבן הכלול ביניהם אמצעיים, ועוד שסכום הריבועים חסר־מידה עם המלבן.

לפיכך $\Gamma\Delta$ הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי; מש"ל.

כאשר גורעים שטח אמצעי משטח רציונלי, הקו שריבועו שווה לשטח הנשאר נעשה אחד משני קווים אי־רציונליים: אפוטומה או הקו הקטן.

מן השטח הרציונלי $B\Gamma$ ייגרע השטח האמצעי BA . אומר אני שהקו שריבועו שווה לשארית $E\Gamma$ נעשה אחד משני קווים אי־רציונליים: אפוטומה או הקו הקטן.

יונח הקו הרציונלי ZH ; בצמוד ל־ ZH תיבנה המקבילית ישרת־הזווית $H\Theta$ השווה ל־ $B\Gamma$, וממנה ייגרע HK השווה ל־ ΔB . לפיכך השארית $E\Gamma$ שווה ל־ $\Lambda\Theta$. עתה $B\Gamma$ רציונלי ו־ BA אמצעי; וכן $B\Gamma$ שווה ל־ $H\Theta$ ו־ BA שווה ל־ HK . לפיכך $H\Theta$ רציונלי ו־ HK אמצעי. ושניהם בנויים בצמוד לקו הרציונלי ZH ; לכן $Z\Theta$ רציונלי ובן־מידה באורך עם ZH , ואילו ZK רציונלי וחסר־מידה באורך עם ZH . לפיכך $Z\Theta$ חסר־מידה באורך עם ZK . לכן $Z\Theta$, ZK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; מכאן $K\Theta$ אפוטומה ו־ KZ הקו המצורף לה. עתה ΘZ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו בן־מידה עמו או שאינו בן־מידה עמו.

תחילה יהי גדול בריבוע שעל קו בן־מידה עמו. והשלם ΘZ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ZH ; לפיכך $K\Theta$ אפוטומה ראשונה. אך הקו שריבועו שווה לשטח הכלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה ראשונה הוא אפוטומה. לכן הקו שריבועו שווה ל־ $\Lambda\Theta$, כלומר ל־ $E\Gamma$, הוא אפוטומה.

ואם ΘZ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, והשלם $Z\Theta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ZH , $K\Theta$ אפוטומה רביעית. אך הקו שריבועו שווה לשטח הכלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה רביעית הוא הקו הקטן. לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ $\Lambda\Theta$, כלומר ל־ $E\Gamma$, הוא הקו הקטן; מש״ל.

כאשר גורעים שטח רציונלי משטח אמצעי, מתקבלים שני קווים אי־רציונליים אחרים: אפוטומה אמצעית ראשונה או הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

מן השטח האמצעי BF ייגרע השטח הרציונלי BA . אומר אני שהקו שריבועו שווה לשארית EF נעשה אחד משני קווים אי־רציונליים: אפוטומה אמצעית ראשונה או הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי.

יונח הקו הרציונלי ZH , והשטחים ייבנו בצמוד אליו באותו אופן. מכאן $Z\Theta$ רציונלי וחסר־מידה באורך עם ZH , ואילו KZ רציונלי ובן־מידה באורך עם ZH . לפיכך $Z\Theta$, ZK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; לכן $K\Theta$ אפוטומה ו־ ZK הקו המצורף לה. עתה ΘZ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו.

אם ΘZ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, והקו המצורף ZK בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ZH , $K\Theta$ אפוטומה שנייה. ו־ ZH רציונלי; לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ $\Lambda\Theta$, כלומר ל־ EF , הוא אפוטומה אמצעית ראשונה.

ואם ΘZ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, והקו המצורף ZK בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון ZH , $K\Theta$ אפוטומה חמישית; לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ EF הוא הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי; מש״ל.

כאשר משטח אמצעי גורעים שטח אמצעי החסר־מידה עם השלם, מתקבלים שני הקווים האי־רציונליים הנותרים: אפוטומה אמצעית שנייה או הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

מן השטח האמצעי BF ייגרע, כבשרטוטים הקודמים, השטח האמצעי BA החסר־מידה עם השלם. אומר אני שהקו שריבועו שווה ל־ EF הוא אחד משני

קווים אי־רציונליים: אפוטומה אמצעית שנייה או הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

מאחר שכל אחד מן BA , BF אמצעי ו־ BF חסר־מידה עם BA , מתקבל שכל אחד מן ZK , $Z\theta$ רציונלי וחסר־מידה באורך עם ZH . ומאחר ש־ BF חסר־מידה עם BA , כלומר $H\theta$ עם HK , גם θZ חסר־מידה עם ZK . לפיכך $Z\theta$, ZK רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן $K\theta$ אפוטומה.

אם $Z\theta$ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, ואף אחד מן $Z\theta$, ZK אינו בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $K\theta$, ZH אפוטומה שלישית. ו־ $K\Lambda$ רציונלי; אך המלבן הכלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה שלישית אי־רציונלי, והקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי ונקרא אפוטומה אמצעית שנייה. לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ $\Lambda\theta$, כלומר ל־ EF , הוא אפוטומה אמצעית שנייה.

ואם $Z\theta$ גדול בריבוע מן ZK בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, ואף אחד מן ZK , θZ אינו בן־מידה באורך עם $K\theta$, ZH אפוטומה שישית. אך הקו שריבועו שווה לשטח הכלול בין קו רציונלי לבין אפוטומה שישית הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי. לפיכך הקו שריבועו שווה ל־ $\Lambda\theta$, כלומר ל־ EF , הוא הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי; מש״ל.

האפוטומה אינה זהה לקו הדר־איברי.

תהי AB אפוטומה. אומר אני ש־ AB אינה זהה לקו הדר־איברי.

שאם אפשר, תהי זהה לו. ויונח הקו הרציונלי $\Delta\Gamma$; בצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ תיבנה המקבילית ישרת־הזווית ΓE השווה לריבוע שעל AB והיוצרת כרוחב את ΔE .

מאחר ש- AB אפוטומה, ΔE אפוטומה ראשונה. יהי EZ הקו המצורף לה; לפיכך ZE , ΔZ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ΔZ גדול בריבוע מן ZE בריבוע שעל קו בן-מידה באורך עמו, ו- ΔZ בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Delta\Gamma$. ושוב, מאחר ש- AB דו-איברי, ΔE דו-איברי ראשון. ייחלק לאיבריו ב- H , ויהי ΔH האיבר הגדול; לפיכך HE , ΔH רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ΔH גדול בריבוע מן HE בריבוע שעל קו בן-מידה באורך עמו, והגדול ΔH בן-מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון $\Delta\Gamma$. לכן ΔZ בן-מידה באורך עם ΔH , ומכאן גם השארית HZ בת-מידה באורך עם ΔZ . אך ΔZ חסר-מידה ΔH , ומכאן גם EZ ; לפיכך גם ZH חסר-מידה באורך עם EZ . לכן ZE , HZ רציונליים ובני-מידה בריבוע בלבד, ומכאן EH אפוטומה. אך EH גם רציונלי, וזה בלתי-אפשרי.

לפיכך האפוטומה אינה זהה לקו הדו-איברי; מש"ל.

האפוטומה והקווים האי-רציונליים הבאים אחריה אינם זהים לא לקו האמצעי ולא זה לזה.

שהרי כאשר הריבוע שעל קו אמצעי נבנה בצמוד לקו רציונלי, הרוחב שהוא יוצר רציונלי וחסר-מידה באורך עם הקו שאליו נבנה; הריבוע שעל אפוטומה יוצר אפוטומה ראשונה; הריבוע שעל אפוטומה אמצעית ראשונה יוצר אפוטומה שנייה; הריבוע שעל אפוטומה אמצעית שנייה יוצר אפוטומה שלישית; הריבוע שעל הקו הקטן יוצר אפוטומה רביעית; הריבוע שעל הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי יוצר אפוטומה חמישית; והריבוע שעל הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי יוצר אפוטומה שישית. מאחר שהרוחבים האמורים שונים הן מן הראשון והן זה מזה — מן הראשון מפני שהוא רציונלי,

זהו מזה מפני שאינם מאותו סדר — ברור שגם הקווים האי־רציונליים עצמם שונים זה מזה. וכבר הוכח שהאפוטומה אינה זהה לדו־איברי. ועוד, כאשר הריבועים שעל הקווים שאחרי האפוטומה נבנים בצמוד לקו רציונלי, הם יוצרים כרוחבים אפוטומות לפי סדרו של כל אחד; ואילו הריבועים שעל הקווים שאחרי הדו־איברי יוצרים דו־איבריים לפי סדרם. לפיכך הקווים שאחרי האפוטומה שונים מן הקווים שאחרי הדו־איברי. כך יש בסדר שלושה־עשר קווים אי־רציונליים:

הקו האמצעי;

הקו הדו־איברי;

הדו־אמצעי הראשון;

הדו־אמצעי השני;

הקו הגדול;

הקו השווה בריבוע לרציונלי ולאמצעי;

הקו השווה בריבוע לשני אמצעיים;

האפוטומה;

האפוטומה האמצעית הראשונה;

האפוטומה האמצעית השנייה;

הקו הקטן;

הקו היוצר עם רציונלי שלם אמצעי;

הקו היוצר עם אמצעי שלם אמצעי.

כאשר הריבוע שעל קו רציונלי נבנה בצמוד לקו דו־איברי, הרוחב שהוא יוצר הוא אפוטומה שאיבריה בני־מידה עם איברי הקו הדו־איברי ואף עומדים באותו יחס, ועוד שהאפוטומה הנוצרת היא מאותו סדר כמו הקו הדו־איברי.

יהי A קו רציונלי ו־BΓ קו דו־איברי, שאיברו הגדול ΔΓ; ויהי המלבן הכלול בין BΓ, EZ שווה לריבוע שעל A. אומר אני ש־EZ אפוטומה שאיבריה בני־מידה עם ΔB, ΓΔ, ועומדים באותו יחס, ועוד ש־EZ תהיה מאותו סדר כמו BΓ.

ושוב יהי המלבן הכלול בין BΔ, H שווה לריבוע שעל A. מאחר שהמלבן הכלול בין BΓ, EZ שווה למלבן הכלול בין BΔ, H, כפי ש־ΓB אל BΔ, כך H אל EZ. אך ΓB גדול מ־BΔ; לפיכך גם H גדול מ־EZ. יהי EΘ שווה ל־H; לכן כפי ש־ΓB אל BΔ, כך EΘ אל EZ, ובהפרדה כפי ש־ΓΔ אל BΔ, כך EΘ אל ZE. וייעשה כפי ש־EZ אל ZE, כך ZK אל KE. לפיכך גם כפי שהשלם EΘ אל השלם KZ, כך ZK אל KE; שהרי כפי שאחד מן הקודמים אל אחד מן העוקבים, כך כל הקודמים יחד אל כל העוקבים יחד. אך כפי ש־ZK אל KE, כך ΓΔ אל ΔB; לפיכך כפי ש־EΘ אל KZ, כך ΓΔ אל ΔB. והריבוע שעל ΓΔ בן־מידה עם הריבוע שעל ΔB; לכן גם הריבוע שעל EΘ בן־מידה עם הריבוע שעל KZ. וכפי שהריבוע שעל EΘ אל הריבוע שעל KZ, כך EΘ אל KE, מפני ששלושת הקווים EΘ, KZ, KE עומדים בפרופורציה; לפיכך EΘ בן־מידה באורך עם KE. לכן גם EΘ בן־מידה באורך עם EK. ומאחר שהריבוע שעל A שווה למלבן הכלול בין EΘ, BΔ, והוא רציונלי, גם המלבן הכלול בין EΘ, BΔ רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי BΔ; לפיכך EΘ רציונלי ובן־

מידה באורך עם ΔB . לכן גם EK , הבן־מידה עמו, רציונלי ובן־מידה באורך עם ΔB . עתה כפי ש־ $\Gamma\Delta$ אל ΔB , כך ZK אל KE ; ו־ $\Gamma\Delta$, ΔB בני־מידה בריבוע בלבד, ולכן גם ZK , KE בני־מידה בריבוע בלבד. ו־ KE רציונלי; לפיכך גם ZK רציונלי. לכן ZK , KE רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד, ומכאן EZ אפוטומה.

עתה $\Gamma\Delta$ גדול בריבוע מן ΔB בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו או בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו.

אם $\Gamma\Delta$ גדול בריבוע מן ΔB בריבוע שעל קו בן־מידה עמו, גם ZK יהיה גדול בריבוע מן KE בריבוע שעל קו בן־מידה עמו. ואם $\Gamma\Delta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם ZK ; אם ΔB בן־מידה עמו, כך גם KE ; ואם אף אחד מן $\Gamma\Delta$, ΔB אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן ZK , KE אינו בן־מידה עמו.

ואם $\Gamma\Delta$ גדול בריבוע מן ΔB בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, גם ZK יהיה גדול בריבוע מן KE בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. ואם $\Gamma\Delta$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם ZK ; אם ΔB בן־מידה עמו, כך גם KE ; ואם אף אחד מן $\Gamma\Delta$, ΔB אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן ZK , KE אינו בן־מידה עמו. לפיכך ZE אפוטומה, שאיבריה ZK , KE בני־מידה עם איברי הקו הדו־איברי $\Gamma\Delta$, ΔB ועומדים באותו יחס, והיא מאותו סדר כמו $B\Gamma$; מש״ל.

כאשר הריבוע שעל קו רציונלי נבנה בצמוד לאפוטומה, הרוחב שהוא יוצר הוא קו דו־איברי שאיבריו בני־מידה עם איברי האפוטומה ועומדים באותו יחס, ועוד שהקו הדו־איברי הנוצר הוא מאותו סדר כמו האפוטומה.

יהי A קו רציונלי ו־ ΔB אפוטומה, ויהי המלבן הכלול בין ΔB , $K\Theta$ שווה לריבוע שעל A , כך שהריבוע שעל הקו הרציונלי A , בהיבנותו בצמוד לאפוטומה ΔB ,

יוצר כרוחב את $K\Theta$. אומר אני ש־ $K\Theta$ דו־איברי, שאיבריו בני־מידה עם איברי BA ועומדים באותו יחס, ועוד ש־ $K\Theta$ מאותו סדר כמו BA .

יהי $\Delta\Gamma$ הקו המצורף ל־ BA ; לפיכך $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. ויהי גם המלבן הכלול בין H , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל A . אך הריבוע שעל A רציונלי; לפיכך גם המלבן הכלול בין H , $B\Gamma$ רציונלי. והוא בנוי בצמוד לקו הרציונלי $B\Gamma$; לכן H רציונלי ובני־מידה באורך עם $B\Gamma$. ומאחר שהמלבן הכלול בין H , $B\Gamma$ שווה למלבן הכלול בין $K\Theta$, BA , כפי ש־ ΓB אל BA , כך $K\Theta$ אל H . אך $B\Gamma$ גדול מ־ BA ; לפיכך גם $K\Theta$ גדול מ־ H . יונח KE שווה ל־ H ; לכן KE בן־מידה באורך עם $B\Gamma$. ומאחר שכפי ש־ ΓB אל BA , כך ΘK אל KE , בהמרה כפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך $K\Theta$ אל ΘE . וייעשה כפי ש־ $K\Theta$ אל ΘE , כך ΘZ אל ZE ; לפיכך גם השארית KZ אל $Z\Theta$ כפי ש־ $K\Theta$ אל ΘE , כלומר כפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$. אך $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ בני־מידה בריבוע בלבד; לכן גם KZ , $Z\Theta$ בני־מידה בריבוע בלבד. ומאחר שכפי ש־ $K\Theta$ אל ΘE , כך KZ אל $Z\Theta$, ואילו כפי ש־ $K\Theta$ אל ΘE , כך ΘZ אל ZE , הרי כפי ש־ KZ אל $Z\Theta$, כך ΘZ אל ZE . ולכן, כפי שהראשון אל השלישי, כך הריבוע שעל הראשון אל הריבוע שעל השני; כלומר כפי ש־ KZ אל ZE , כך הריבוע שעל KZ אל הריבוע שעל ZE . אך הריבוע שעל KZ בני־מידה עם הריבוע שעל $Z\Theta$; לפיכך KZ בני־מידה באורך עם $Z\Theta$, ומכאן KZ בני־מידה באורך גם עם KE . ו־ KE רציונלי ובני־מידה באורך עם $B\Gamma$; לפיכך גם KZ רציונלי ובני־מידה באורך עם $B\Gamma$. ומאחר שכפי ש־ $B\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$, כך KZ אל $Z\Theta$, בחילוף כפי ש־ $B\Gamma$ אל KZ , כך $\Delta\Gamma$ אל $Z\Theta$. אך $B\Gamma$ בני־מידה עם KZ ; לפיכך גם $Z\Theta$ בני־מידה באורך עם $\Gamma\Delta$. ו־ $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד; לכן גם KZ , $Z\Theta$ רציונליים ובני־מידה בריבוע בלבד. לפיכך $K\Theta$ דו־איברי.

אם $B\Gamma$ גדול בריבוע מן $\Gamma\Delta$ בריבוע שעל קו בן־מידה באורך עמו, גם KZ יהיה גדול בריבוע מן $Z\Theta$ בריבוע שעל קו בן־מידה עמו. ואם $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם KZ ; אם $\Gamma\Delta$ בן־מידה עמו, כך גם $Z\Theta$; ואם אף אחד מן $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן $Z\Theta$, KZ אינו בן־מידה עמו.

ואם $B\Gamma$ גדול בריבוע מן $\Gamma\Delta$ בריבוע שעל קו חסר־מידה באורך עמו, גם KZ יהיה גדול בריבוע מן $Z\Theta$ בריבוע שעל קו חסר־מידה עמו. ואם $B\Gamma$ בן־מידה באורך עם הקו הרציונלי הנתון, כך גם KZ ; אם $\Gamma\Delta$ בן־מידה עמו, כך גם $Z\Theta$; ואם אף אחד מן $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ אינו בן־מידה עמו, גם אף אחד מן $Z\Theta$, KZ אינו בן־מידה עמו.

לפיכך $K\Theta$ דו־איברי, שאיבריו $Z\Theta$, KZ בני־מידה עם איברי האפוטומה $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ועומדים באותו יחס, ועוד ש־ $K\Theta$ מאותו סדר כמו $B\Delta$; מש״ל.

אם שטח כלול בין אפוטומה לבין קו דו־איברי שאיבריו בני־מידה עם איברי האפוטומה ועומדים באותו יחס, הקו שריבועו שווה לשטח רציונלי.

יהי השטח הכלול בין $\Gamma\Delta$, AB כלול בין האפוטומה AB לבין הקו הדו־איברי $\Gamma\Delta$, שאיברו הגדול ΓE ; ויהיו איברי הקו הדו־איברי $E\Delta$, ΓE בני־מידה עם איברי האפוטומה ZB , AZ ועומדים באותו יחס. ויהי H הקו שריבועו שווה למלבן הכלול בין $\Gamma\Delta$, AB . אומר אני ש־ H רציונלי.

יונח הקו הרציונלי Θ , ובצמוד ל־ $\Gamma\Delta$ תיבנה מקבילית השווה לריבוע שעל Θ והיוצרת כרוחב את $K\Lambda$. לפיכך $K\Lambda$ אפוטומה, שאיבריה $M\Lambda$, KM בני־מידה עם איברי הקו הדו־איברי $E\Delta$, ΓE ועומדים באותו יחס. אך גם $E\Delta$, ΓE בני־מידה עם ZB , AZ ועומדים באותו יחס; לכן כפי ש־ AZ אל ZB , כך KM אל

MA . בחילוף, כפי ש־ AZ אל KM , כך BZ אל AM ; ולכן גם השארית AB אל השארית KA כפי ש־ AZ אל KM . אך AZ בן־מידה עם KM ; לפיכך AB בן־מידה עם KA . וכפי ש־ AB אל KA , כך המלבן הכלול בין AB , $\Gamma\Delta$ אל המלבן הכלול בין KA , $\Gamma\Delta$; לכן גם המלבן הכלול בין AB , $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם המלבן הכלול בין KA , $\Gamma\Delta$. אך המלבן הכלול בין KA , $\Gamma\Delta$ שווה לריבוע שעל Θ ; לפיכך המלבן הכלול בין AB , $\Gamma\Delta$ בן־מידה עם הריבוע שעל Θ . והריבוע שעל H שווה למלבן הכלול בין AB , $\Gamma\Delta$; לכן הריבוע שעל H בן־מידה עם הריבוע שעל Θ . והריבוע שעל Θ רציונלי; לפיכך גם הריבוע שעל H רציונלי, ומכאן H רציונלי. וריבועו שווה למלבן הכלול בין AB , $\Gamma\Delta$.

לפיכך, אם שטח כלול בין אפוטומה לבין קו דר־איברי שאיבריו בנ־מידה עם איברי האפוטומה ועומדים באותו יחס, הקו שריבועו שווה לשטח רציונלי.

מסקנה.

ומכאן התברר לנו גם שייתכן ששטח רציונלי יהיה כלול בין קווים ישרים א־רציונליים; מש״ל.

מן הקו האמצעי נוצרים קווים א־רציונליים רבים לאין שיעור, ואף לא אחד מהם זהה לאחד מן הקודמים.

יהי A קו אמצעי. אומר אני שמ־ A נוצרים קווים א־רציונליים רבים לאין שיעור, ואף לא אחד מהם זהה לאחד מן הקודמים.

יונח הקו הרציונלי B , ויהי הריבוע שעל Γ שווה למלבן הכלול בין A , B ; לפיכך Γ א־רציונלי, שהרי שטח הכלול בין קו א־רציונלי לבין קו רציונלי הוא א־רציונלי. והוא אינו זהה לאף אחד מן הקווים הקודמים, שהרי ריבועו של אף

אחד מן הקודמים, בהיבנותו בצמוד לקו רציונלי, אינו יוצר כרוחב קו אמצעי. ושוב יהי הריבוע שעל Δ שווה למלבן הכלול בין Γ , B; לפיכך הריבוע שעל Δ אי־רציונלי, ולכן Δ אי־רציונלי. והוא אינו זהה לאף אחד מן הקודמים, שהרי ריבועו של אף אחד מן הקודמים, בהיבנותו בצמוד לקו רציונלי, אינו יוצר כרוחב את Γ . ובדומה, מאחר שסדר כזה נמשך לאין שיעור, ברור שמן הקו האמצעי נוצרים קווים אי־רציונליים רבים לאין שיעור, ואף לא אחד מהם זהה לאחד מן הקודמים; מש״ל.

ספר יא

גוף הוא מה שיש לו אורך, רוחב ועומק.

גבולו של גוף הוא משטח.

קו ישר ניצב למישור כאשר הוא יוצר זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור.

מישור ניצב למישור כאשר הקווים הישרים המועברים באחד המישורים בזוויות ישרות לחיתוך המשותף של המישורים ניצבים למישור האחר.

נטיית קו ישר למישור היא הזווית הכלולה בין הקו המועבר לבין הקו העומד, כאשר מן הקצה המוגבה של הקו הישר מורד אנך אל המישור, ומן הנקודה שנוצרה מחובר קו ישר אל קצה הקו הישר המצוי במישור.

נטיית מישור למישור היא הזווית החדה הכלולה בין הקווים המועברים בכל אחד מן המישורים מאותה נקודה בזוויות ישרות לחיתוך המשותף.

מישור נקרא נוטה למישור באותו אופן שבו מישור אחר נוטה לאחר, כאשר זוויות הנטייה האמורות שוות זו לזו.

מישורים מקבילים הם מישורים שאינם נפגשים.

גופים דומים הם גופים הכלולים במספר שווה של מישורים דומים.

גופים שווים ודומים הם גופים הכלולים במישורים דומים, השווים הן במספרם הן בגודלם.

זווית מרחבית היא הנטייה, בכל הקווים יחד, הנוצרת מיותר משני קווים הנוגעים זה בזה ואינם נמצאים באותו משטח. ובדרך אחרת: זווית מרחבית היא זווית הכלולה ביותר משתי זוויות מישוריות, שאינן באותו מישור ונפגשות בנקודה אחת.

פירמידה היא גוף הכלול במישורים, הבנוי ממישור אחד ומתכנס בנקודה אחת. מנסרה היא גוף הכלול במישורים, ששניים מן המישורים הנגדיים שווים, דומים ומקבילים, ושאר המישורים מקבילים.

כדור הוא הגוף הנוצר כאשר חצי־מעגל, שקוטרו נשאר קבוע, מסתובב עד שהוא שב אל המקום שממנו החל לנוע.

ציר הכדור הוא הקו הישר הקבוע שסביבו מסתובב חצי־המעגל.

מרכז הכדור הוא אותה נקודה שהיא גם מרכז חצי־המעגל.

קוטר הכדור הוא קו ישר כלשהו העובר דרך המרכז ומסתיים בשני צדדיו במשטח הכדור.

חרוט הוא הגוף הנוצר כאשר משולש ישר־זווית, שאחת הצלעות הסמוכות לזווית הישרה נשארת קבועה, מסתובב עד שהוא שב אל המקום שממנו החל לנוע. אם הקו הישר הקבוע שווה לצלע האחרת הסמוכה לזווית הישרה והמסתובבת, החרוט יהיה ישר־זווית; אם הוא קטן ממנה, קהה־זווית; ואם הוא גדול ממנה, חד־זווית.

ציר החרוט הוא הקו הישר הקבוע שסביבו מסתובב המשולש.

בסיס החרוט הוא המעגל המתואר על ידי הקו הישר המסתובב.

גליל הוא הגוף הנוצר כאשר מקבילית ישרת־זווית, שאחת הצלעות הסמוכות לזווית הישרה נשארת קבועה, מסתובבת עד שהיא שבה אל המקום שממנו החלה לנוע.

ציר הגליל הוא הקו הישר הקבוע שסביבו מסתובבת המקבילית.

בסיסי הגליל הם המעגלים המתוארים על ידי שתי הצלעות הנגדיות המסתובבות.

חרוטים וגלילים דומים הם אלה שציריהם וקוטרי בסיסיהם עומדים בפרופורציה.

קובייה היא גוף הכלול בשישה ריבועים שווים.

תמניון הוא גוף הכלול בשמונה משולשים שווים ושווי־צלעות.

עשרימון הוא גוף הכלול בעשרים משולשים שווים ושווי־צלעות.

תריסרון הוא גוף הכלול בשנים־עשר מחומשים שווים, שווי־צלעות ושווי־זוויות.

לא ייתכן שחלק אחד של קו ישר נמצא במישור הנתון וחלק אחר נמצא מעליו.

ש אם אפשר, יהי חלק אחד AB של הקו הישר $AB\Gamma$ במישור הנתון, וחלק אחר $B\Gamma$ מעליו.

יהיה אפוא במישור הנתון קו ישר כלשהו הרצוף ל- AB ובקו ישר עמו; יהי BA . לפיכך לשני הקווים הישרים $AB\Gamma$, $AB\Delta$ יהיה הקטע המשותף AB ; וזה בלתי־אפשרי, מפני שאם נתאר מעגל שמרכזו B ורדיוסו AB , הקטרים יחתכו חלקים לא־שווים מהיקף המעגל.

לפיכך לא ייתכן שחלק אחד של קו ישר נמצא במישור הנתון וחלק אחר נמצא מעליו; מש"ל.

אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה, הם נמצאים במישור אחד; וכל משולש נמצא במישור אחד.

יחתכו שני הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ זה את זה בנקודה E . אומר אני ש־ $\Gamma\Delta$, AB נמצאים במישור אחד, ושכל משולש נמצא במישור אחד.

יילקחו על EB , EF הנקודות המקריות H , Z ; יחוברו ΓB , ZH , ויוארכו $Z\Theta$, HK . אומר אני תחילה שהמשולש EFB נמצא במישור אחד. שהרי אם חלק מן המשולש EFB , כלומר $Z\Theta\Gamma$ או HBK , נמצא במישור הנתון והחלק הנותר במישור אחר, גם חלק מאחד הקווים הישרים EB , EF יהיה במישור הנתון וחלקו האחר במישור אחר. ואם החלק $Z\Gamma BH$ של המשולש EFB נמצא במישור הנתון והחלק הנותר במישור אחר, גם מכל אחד משני הקווים הישרים EB , EF יהיה חלק במישור הנתון וחלק במישור אחר; וזה הוכח כאבסורד. לפיכך המשולש EFB נמצא במישור אחד. ובמישור שבו נמצא המשולש EFB נמצאים גם כל אחד מן EB , EF ; ובמישור שבו נמצאים כל אחד מן EB , EF נמצאים גם AB , $\Gamma\Delta$. לכן הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ נמצאים במישור אחד, וכל משולש נמצא במישור אחד; מש"ל.

אם שני מישורים חותכים זה את זה, החיתוך המשותף שלהם הוא קו ישר.

יחתכו שני המישורים AB , $B\Gamma$ זה את זה, ויהי הקו ΔB החיתוך המשותף שלהם. אומר אני שהקו ΔB ישר.

שאם לא, יחוברו מ Δ אל B הקו הישר ΔEB במישור AB והקו הישר ΔZB במישור $B\Gamma$. לפיכך לשני הקווים הישרים ΔEB , ΔZB יהיו אותם קצוות, וברור שהם יקיפו שטח; וזה אבסורד. לכן ΔEB , ΔZB אינם קווים ישרים. ובדומה נוכיח ששום קו אחר המחובר מ Δ אל B לא יהיה ישר, מלבד ΔB , החיתוך המשותף של המישורים AB , $B\Gamma$.

לפיכך, אם שני מישורים חותכים זה את זה, החיתוך המשותף שלהם הוא קו ישר; מש"ל.

אם קו ישר עומד בניצב, בנקודת החיתוך המשותפת, לשני קווים ישרים החותכים זה את זה, הוא יהיה ניצב גם למישור העובר דרכם.

יעמוד הקו הישר EZ מן הנקודה E בניצב לשני הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ החותכים זה את זה בנקודה E . אומר אני ש ΔEZ ניצב גם למישור העובר דרך AB , $\Gamma\Delta$.

יילקחו AE , EB , ΓE , ED שווים זה לזה; יועבר דרך E קו מקרי $HE\Theta$; יחוברו $AA\Delta$, ΓB ; ומנקודה מקרית Z יחוברו ZA , ZH , $Z\Delta$, $Z\Gamma$, $Z\Theta$, ZB . מאחר ששתי הצלעות AE , ED שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΓE , EB וכוללות זוויות שוות, הבסיס AD שווה לבסיס ΓB והמשולש $AE\Delta$ שווה למשולש ΓEB ; לכן גם הזווית ΔAE שווה לזווית $EB\Gamma$. וגם הזווית AEH שווה לזווית $BE\Theta$. לפיכך לשני המשולשים AHE , $BE\Theta$ שתי זוויות השוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע

אחת השווה לצלע אחת, זו הסמוכה לזוויות השוות, AE ל- EB ; לכן גם הצלעות הנותרות שוות בהתאמה. מכאן HE שווה ל- EO ו- AH שווה ל- BO . ומאחר ש- AE שווה ל- EB , ו- ZE משותף וניצב להם, הבסיס ZA שווה לבסיס ZB . מאותם טעמים גם $Z\Gamma$ שווה ל- $Z\Delta$. ומאחר ש- AD שווה ל- ΓB וגם ZA שווה ל- ZB , שתי הצלעות ZA, AD שוות בהתאמה לשתי הצלעות $ZB, B\Gamma$; והבסיס $Z\Delta$ הוכח שווה לבסיס $Z\Gamma$. לפיכך הזווית ZAD שווה לזווית $ZB\Gamma$. ושוב, AH הוכח שווה ל- BO , וגם ZA שווה ל- ZB ; לכן שתי הצלעות ZA, AH שוות לשתי הצלעות $ZB, B\Theta$. והזווית ZAH הוכחה שווה לזווית $ZB\Theta$; לפיכך הבסיס ZH שווה לבסיס $Z\Theta$. ושוב, HE הוכח שווה ל- EO ו- EZ משותף; לכן שתי הצלעות HE, EZ שוות לשתי הצלעות $\Theta E, EZ$, והבסיס ZH שווה לבסיס $Z\Theta$. לפיכך הזווית HEZ שווה לזווית ΘEZ , ולכן כל אחת מהן ישרה. מכאן ZE ניצב לקו המקרי $H\Theta$ העובר דרך E . ובדומה נוכיח ש- ZE ייצור זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור הנתון. אך קו ישר ניצב למישור כאשר הוא יוצר זוויות ישרות עם כל הקווים הנוגעים בו ונמצאים באותו מישור. לכן ZE ניצב למישור הנתון, שהוא המישור העובר דרך הקווים $AB, \Gamma\Delta$. לפיכך ZE ניצב למישור העובר דרך $AB, \Gamma\Delta$.

לפיכך, אם קו ישר עומד בניצב, בנקודת החיתוך המשותפת, לשני קווים ישרים החותכים זה את זה, הוא יהיה ניצב גם למישור העובר דרכם; מש"ל.

אם קו ישר עומד בניצב, בנקודת המגע המשותפת, לשלושה קווים ישרים הנוגעים זה בזה, שלושת הקווים הישרים נמצאים במישור אחד.

עמוד הקו הישר AB בניצב לשלושת הקווים $B\Gamma, BA, BE$ בנקודת המגע B . אומר אני ש- $BE, BA, B\Gamma$ נמצאים במישור אחד.

שאם לא, יהיו, אם אפשר, BA , BE במישור הנתון ו־ $B\Gamma$ במישור מוגבה יותר; ויוארך המישור העובר דרך AB , $B\Gamma$. הוא ייצור במישור הנתון חיתוך משותף שהוא קו ישר; יהי BZ . לפיכך שלושת הקווים הישרים AB , $B\Gamma$, BZ נמצאים במישור אחד, הוא המישור שהעובר דרך AB , $B\Gamma$. ומאחר ש־ AB ניצב לכל אחד מן BA , BE , הוא ניצב גם למישור העובר דרך BA , BE . והמישור העובר דרך BA , BE הוא המישור הנתון; לפיכך AB ניצב למישור הנתון. לכן AB ייצור זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור הנתון. אך BZ נוגע בו ונמצא במישור הנתון; לכן הזווית ABZ ישרה. וגם הזווית $AB\Gamma$ הונחה ישרה; לפיכך הזווית ABZ שווה לזווית $AB\Gamma$. והן נמצאות במישור אחד, וזה בלתי־אפשרי. לכן הקו הישר $B\Gamma$ אינו במישור מוגבה יותר; לפיכך שלושת הקווים $B\Gamma$, BA , BE נמצאים במישור אחד.

לפיכך, אם קו ישר עומד בניצב, בנקודת המגע, לשלושה קווים ישרים הנוגעים זה בזה, שלושת הקווים הישרים נמצאים במישור אחד; מש״ל.

אם שני קווים ישרים ניצבים לאותו מישור, הקווים הישרים יהיו מקבילים.

יהיו שני הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ ניצבים למישור הנתון. אומר אני ש־ AB מקביל ל־ $\Gamma\Delta$.

יפגשו את המישור הנתון בנקודות B , Δ ; יחובר הקו הישר BA ; ובמישור הנתון יועבר ΔE בניצב ל־ BA . יונח ΔE שווה ל־ AB , ויחוברו AE , BE .

מאחר ש־ AB ניצב למישור הנתון, הוא ייצור זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור הנתון. וכל אחד מן BA , BE נוגע ב־ AB ונמצא במישור הנתון; לפיכך כל אחת מן הזוויות $AB\Delta$, ABE ישרה. מאותם

טעמים גם כל אחת מן הזוויות $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ ישרה. ומאחר ש- AB שווה ל- AE ו- BD משותף, שתי הצלעות AB , BD שוות לשתי הצלעות AE , ED , והן כוללות זוויות ישרות; לפיכך הבסיס AD שווה לבסיס BE . ומאחר ש- AB שווה ל- AE וגם AD שווה ל- BE , שתי הצלעות AB , BE שוות לשתי הצלעות AE , ED , והבסיס AE משותף; לפיכך הזווית ABE שווה לזווית EDA . אך הזווית ABE ישרה; לכן גם EDA ישרה, ומכאן ED ניצב ל- AD . והוא ניצב גם לכל אחד מן BD , $\Delta\Gamma$. לפיכך ED עומד בניצב, בנקודת המגע, לשלושת הקווים BD , ΔA , $\Delta\Gamma$; לכן שלושת הקווים BD , ΔA , $\Delta\Gamma$ נמצאים במישור אחד. ובמישור שבו נמצאים ΔB , ΔA נמצא גם AB , שהרי כל משולש נמצא במישור אחד; לכן הקווים AB , BD , $\Delta\Gamma$ נמצאים במישור אחד. וכל אחת מן הזוויות ABD , $B\Delta\Gamma$ ישרה; לפיכך AB מקביל ל- $\Gamma\Delta$.

לפיכך, אם שני קווים ישרים ניצבים לאותו מישור, הקווים הישרים יהיו מקבילים; מש"ל.

אם שני קווים ישרים מקבילים, ונלקחו על כל אחד מהם נקודות מקריות, הקו הישר המחבר את הנקודות נמצא באותו מישור שבו המקבילים.

יהיו שני הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ מקבילים, ועל כל אחד מהם יילקחו הנקודות המקריות E , Z . אומר אני שהקו הישר המחבר את הנקודות E , Z נמצא באותו מישור שבו המקבילים.

שאם לא, יהיה, אם אפשר, במישור מוגבה יותר, כגון EHZ , ויועבר מישור דרך EHZ . מישור זה ייצור במישור הנתון חיתוך שהוא קו ישר; יהי החיתוך EZ . לפיכך שני הקווים הישרים EHZ , EZ יקיפו שטח; וזה בלתי־אפשרי. לכן הקו

הישר המחבר את E אל Z אינו במישור מוגבה יותר; לפיכך הקו הישר המחבר את E אל Z נמצא במישור העובר דרך המקבילים $AB, \Gamma\Delta$.

לפיכך, אם שני קווים ישרים מקבילים, ונלקחו על כל אחד מהם נקודות מקריות, הקו הישר המחבר את הנקודות נמצא באותו מישור שבו המקבילים; מש"ל.

אם שני קווים ישרים מקבילים, ואחד מהם ניצב למישור כלשהו, גם הנותר יהיה ניצב לאותו מישור.

יהיו שני הקווים הישרים $AB, \Gamma\Delta$ מקבילים, ויהי אחד מהם, AB , ניצב למישור הנתון. אומר אני שגם הנותר, $\Gamma\Delta$, יהיה ניצב לאותו מישור.

יפגשו $AB, \Gamma\Delta$ את המישור הנתון בנקודות B, Δ , ויחובר $B\Delta$; ובמישור הנתון יועבר ΔE בניצב ל- $B\Delta$, ויונח ΔE שווה ל- AB , ויחוברו $BE, AE, A\Delta$. ומאחר ש- AB ניצב למישור הנתון, הרי AB ניצב גם לכל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור הנתון; לפיכך כל אחת מן הזוויות $AB\Delta, ABE$ ישרה. ומאחר שהקו הישר $B\Delta$ נופל על הקווים המקבילים $AB, \Gamma\Delta$, הזוויות $AB\Delta, \Gamma\Delta B$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. והזווית $AB\Delta$ ישרה; לפיכך גם הזווית $\Gamma\Delta B$ ישרה, ולכן $\Gamma\Delta$ ניצב ל- $B\Delta$. ומאחר ש- AB שווה ל- ΔE ו- $B\Delta$ משותף, שתי הצלעות $AB, B\Delta$ שוות לשתי הצלעות $\Delta E, \Delta B$, והזווית $AB\Delta$ שווה לזווית $E\Delta B$, שהרי שתיהן ישרות; לפיכך הבסיס $A\Delta$ שווה לבסיס BE . ומאחר ש- AB שווה ל- ΔE ו- BE שווה ל- $A\Delta$, שתי הצלעות AB, BE שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta E, \Delta A$, והבסיס AE משותף; לפיכך הזווית ABE שווה לזווית $E\Delta A$. והזווית ABE ישרה; לכן גם הזווית $E\Delta A$ ישרה, ומכאן ΔE ניצב ל- $A\Delta$. והוא ניצב גם ל- $B\Delta$; לפיכך ΔE ניצב גם למישור העובר דרך $B\Delta, \Delta A$. לכן ΔE

ייצור זוויות ישרות גם עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור העובר דרך $B\Delta A$. אך $\Delta\Gamma$ נמצא במישור העובר דרך $B\Delta A$, שכן $AB, B\Delta$ נמצאים במישור העובר דרך $B\Delta A$, ובמישור שבו נמצאים $AB, B\Delta$ נמצא גם $\Delta\Gamma$. לפיכך $E\Delta$ ניצב ל $\Delta\Gamma$, ולכן גם $\Gamma\Delta$ ניצב ל ΔE . והוא ניצב גם ל $B\Delta$. לפיכך $\Gamma\Delta$ עומד בניצב, מנקודת החיתוך Δ , לשני הקווים הישרים $\Delta E, \Delta B$ החותכים זה את זה; לכן $\Gamma\Delta$ ניצב גם למישור העובר דרך $\Delta E, \Delta B$. והמישור העובר דרך $\Delta E, \Delta B$ הוא המישור הנתון; לפיכך $\Gamma\Delta$ ניצב למישור הנתון.

לפיכך, אם שני קווים ישרים מקבילים, ואחד מהם ניצב למישור כלשהו, גם הנותר יהיה ניצב לאותו מישור; מש"ל.

קווים ישרים המקבילים לאותו קו ישר, אף שאינם נמצאים עמו באותו מישור, מקבילים גם זה לזה.

יהיה כל אחד מן $AB, \Gamma\Delta$ מקביל ל EZ , אף שאינם נמצאים עמו באותו מישור. אומר אני ש AB מקביל ל $\Gamma\Delta$.

תילקח על EZ נקודה מקרית H , וממנה יועבר $H\Theta$ בניצב ל EZ במישור העובר דרך AB, EZ ; ובמישור העובר דרך $\Gamma\Delta, ZE$, יועבר שוב HK בניצב ל EZ . ומאחר ש EZ ניצב לכל אחד מן $H\Theta, HK$, הרי EZ ניצב גם למישור העובר דרך $H\Theta, HK$. ו EZ מקביל ל AB ; לפיכך גם AB ניצב למישור העובר דרך ΘHK . מאותם טעמים גם $\Gamma\Delta$ ניצב למישור העובר דרך ΘHK ; לפיכך כל אחד מן $AB, \Gamma\Delta$ ניצב למישור העובר דרך ΘHK . ואם שני קווים ישרים ניצבים לאותו מישור, הקווים הישרים מקבילים; לפיכך AB מקביל ל $\Gamma\Delta$; מש"ל.

אם שני קווים ישרים הנוגעים זה בזה מקבילים בהתאמה לשני קווים ישרים הנוגעים זה בזה, ואינם נמצאים באותו מישור, הם יכילו זוויות שוות.

יהיו שני הקווים הישרים AB, BF , הנוגעים זה בזה, מקבילים בהתאמה לשני הקווים הישרים AE, EZ , הנוגעים זה בזה, ולא יהיו באותו מישור. אומר אני שהזווית ABF שווה לזווית AEZ .

ייקטעו BA, BF, EA, EZ שווים זה לזה, ויחברו $AD, \Gamma Z, BE, AF, \Delta Z$ ומאחר ש- BA שווה ומקביל ל- EA , הרי גם AD שווה ומקביל ל- BE . מאותם טעמים גם ΓZ שווה ומקביל ל- BE ; לפיכך כל אחד מן $AD, \Gamma Z$ שווה ומקביל ל- BE . וקווים המקבילים לאותו קו ישר, אף שאינם נמצאים עמו באותו מישור, מקבילים גם זה לזה; לכן AD מקביל ושווה ל- ΓZ . והקווים $AF, \Delta Z$ מחברים אותם; לפיכך גם AF שווה ומקביל ל- ΔZ . ומאחר ששתי הצלעות AB, BF שוות לשתי הצלעות AE, EZ , והבסיס AF שווה לבסיס ΔZ , הרי הזווית ABF שווה לזווית AEZ .

לפיכך, אם שני קווים ישרים הנוגעים זה בזה מקבילים בהתאמה לשני קווים ישרים הנוגעים זה בזה, ואינם נמצאים באותו מישור, הם יכילו זוויות שוות; מש"ל.

להעביר מן הנקודה הנתונה שמעל למישור קו ישר מאונך אל המישור הנתון.

תהי הנקודה הנתונה שמעל למישור A , ויהי המישור הנתון המישור המונח. צריך אפוא להעביר מן הנקודה A קו ישר מאונך אל המישור המונח.

יועבר במישור המונח קו ישר מקרי BF , ומן הנקודה A יועבר AD מאונך אל BF . אם אפוא AD מאונך גם אל המישור המונח, כבר נעשה הנדרש. ואם לא,

יועבר מן הנקודה Δ , במישור המונח, ΔE בניצב ל- $B\Gamma$; ומן A יועבר AZ מאונך אל ΔE ; ודרך הנקודה Z יועבר $H\Theta$ מקביל ל- $B\Gamma$.

ומאחר ש- $B\Gamma$ ניצב לכל אחד מן ΔA , ΔE , הרי $B\Gamma$ ניצב גם למישור העובר דרך $E\Delta A$. ו- $H\Theta$ מקביל לו; ואם שני קווים ישרים מקבילים ואחד מהם ניצב למישור כלשהו, גם הנותר יהיה ניצב לאותו מישור. לפיכך גם $H\Theta$ ניצב למישור העובר דרך $E\Delta$, ΔA . לכן $H\Theta$ ניצב לכל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור העובר דרך $E\Delta$, ΔA . והקו AZ נוגע בו ונמצא במישור העובר דרך $E\Delta$, ΔA ; לפיכך $H\Theta$ ניצב ל- AZ , ולכן גם ZA ניצב ל- ΘH . וגם AZ ניצב ל- ΔE ; לפיכך AZ ניצב לכל אחד מן ΔE , $H\Theta$. ואם קו ישר עומד בניצב, בנקודת החיתוך, לשני קווים ישרים החותכים זה את זה, הוא יהיה ניצב גם למישור העובר דרכם; לכן ZA ניצב למישור העובר דרך $E\Delta$, $H\Theta$. והמישור העובר דרך $E\Delta$, $H\Theta$ הוא המישור המונח; לפיכך AZ ניצב למישור המונח.

לפיכך הועבר מן הנקודה הנתונה A שמעל למישור אל המישור המונח הקו הישר המאונך AZ ; כנדרש לעשות.

להעמיד מן הנקודה הנתונה שעל המישור הנתון קו ישר בניצב למישור.

יהי המישור הנתון המישור המונח, ותהי הנקודה שעליו A . צריך אפוא להעמיד מן הנקודה A קו ישר בניצב למישור המונח.

תיחשב נקודה כלשהי B שמעל למישור, ומן B יועבר $B\Gamma$ מאונך אל המישור המונח, ודרך הנקודה A יועבר $A\Delta$ מקביל ל- $B\Gamma$.

ומאחר ששני הקווים הישרים $A\Delta$, ΓB מקבילים, ואחד מהם, $B\Gamma$, ניצב למישור המונח, הרי גם הנותר, $A\Delta$, ניצב למישור המונח.

לפיכך הועמד מן הנקודה הנתונה A שעל המישור הנתון הקו AA בניצב למישור; כנדרש לעשות.

מאותה נקודה לא יועמדו שני קווים ישרים בניצב לאותו מישור ובאותו צד שלו.

שאם אפשר, יועמדו מאותה נקודה A שני הקווים הישרים AB , AF בניצב למישור המונח ובאותו צד שלו, ויועבר המישור העובר דרך BA , AF . הוא ייצור במישור המונח חיתוך העובר דרך A , שהוא קו ישר; יהי החיתוך ΔAE . לפיכך הקווים הישרים AB , AF , ΔAE נמצאים במישור אחד. ומאחר ש- ΓA ניצב למישור המונח, הוא ייצור זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור המונח. והקו ΔAE נוגע בו ונמצא במישור המונח; לפיכך הזווית ΓAE ישרה. מאותם טעמים גם הזווית BAE ישרה; לכן הזווית ΓAE שווה לזווית BAE . והן נמצאות במישור אחד; וזה בלתי־אפשרי.

לפיכך מאותה נקודה לא יועמדו שני קווים ישרים בניצב לאותו מישור ובאותו צד שלו; מש"ל.

המישורים שאותו קו ישר ניצב להם יהיו מקבילים.

יהי קו ישר כלשהו AB ניצב לכל אחד מן המישורים ΓA , EZ . אומר אני שהמישורים מקבילים.

שאם לא, הם ייפגשו כאשר יוארכו. ייפגשו אפוא, וייצרו חיתוך משותף שהוא קו ישר; יהי $H\Theta$. ועל $H\Theta$ תילקח נקודה מקרית K , ויחברו AK , BK . ומאחר ש- AB ניצב למישור EZ , הרי AB ניצב גם לקו הישר BK הנמצא במישור EZ המוארך; לפיכך הזווית ABK ישרה. מאותם טעמים גם הזווית BAK ישרה. לפיכך במשולש ABK שתי הזוויות ABK , BAK שוות לשתי זוויות ישרות; וזה

בלתי־אפשרי. לכן המישורים $\Gamma\Delta$, EZ לא ייפגשו כאשר יוארכו; לפיכך המישורים $\Gamma\Delta$, EZ מקבילים.

לפיכך המישורים שאותו קו ישר ניצב להם מקבילים; מש"ל.

אם שני קווים ישרים הנוגעים זה בזה מקבילים בהתאמה לשני קווים ישרים הנוגעים זה בזה, ואינם נמצאים באותו מישור, המישורים העוברים דרכם מקבילים.

יהיו שני הקווים הישרים AB , $B\Gamma$, הנוגעים זה בזה, מקבילים בהתאמה לשני הקווים הישרים ΔE , EZ , הנוגעים זה בזה, ולא יהיו באותו מישור. אומר אני שהמישורים העוברים דרך AB , $B\Gamma$ ודרך ΔE , EZ לא ייפגשו זה בזה כאשר יוארכו.

יועבר מן הנקודה B אל המישור העובר דרך ΔE , EZ הקו המאונך BH , ויפגוש את המישור בנקודה H ; ודרך H יועבר $H\Theta$ מקביל ל־ EA ו־ HK מקביל ל־ EZ . ומאחר ש־ BH ניצב למישור העובר דרך ΔE , EZ , הוא ייצור זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור העובר דרך ΔE , EZ . וכל אחד מן $H\Theta$, HK נוגע בו ונמצא במישור העובר דרך ΔE , EZ ; לפיכך כל אחת מן הזוויות $BH\Theta$, BHK ישרה. ומאחר ש־ BA מקביל ל־ $H\Theta$, הזוויות HBA , $BH\Theta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות. והזווית $BH\Theta$ ישרה; לפיכך גם הזווית HBA ישרה, ולכן HB ניצב ל־ BA . מאותם טעמים HB ניצב גם ל־ $B\Gamma$. ומאחר שהקו הישר HB עומד בניצב לשני הקווים הישרים BA , $B\Gamma$ החותכים זה את זה, הרי HB ניצב גם למישור העובר דרך BA , $B\Gamma$. אך המישורים שאותו קו ישר ניצב להם מקבילים; לפיכך המישור העובר דרך AB , $B\Gamma$ מקביל למישור העובר דרך ΔE , EZ .

לפיכך, אם שני קווים ישרים הנוגעים זה בזה מקבילים בהתאמה לשני קווים ישרים הנוגעים זה בזה, ואינם נמצאים באותו מישור, המישורים העוברים דרכם מקבילים; מש"ל.

אם שני מישורים מקבילים נחתכים על ידי מישור כלשהו, חיתוכיהם המשותפים מקבילים.

ייחתכו שני המישורים המקבילים $AB, \Gamma\Delta$ על ידי המישור $EZH\Theta$, ויהיו חיתוכיהם המשותפים $EZ, H\Theta$. אומר אני ש- EZ מקביל ל- $H\Theta$.

שאם לא, הקווים $EZ, H\Theta$, כאשר יוארכו, ייפגשו או בצדדים Z, Θ או בצדדים E, H . יוארכו לעבר הצדדים Z, Θ וייפגשו תחילה בנקודה K . ומאחר ש- EZK נמצא במישור AB , הרי גם כל הנקודות שעל EZK נמצאות במישור AB . והנקודה K היא אחת הנקודות שעל הקו הישר EZK ; לפיכך K נמצאת במישור AB . מאותם טעמים K נמצאת גם במישור $\Gamma\Delta$; לכן המישורים $AB, \Gamma\Delta$ ייפגשו כאשר יוארכו. אך הם אינם נפגשים, מפני שהונחו מקבילים; לפיכך הקווים הישרים $EZ, H\Theta$ לא ייפגשו כאשר יוארכו לעבר הצדדים Z, Θ . ובדומה נוכיח שהקווים הישרים $EZ, H\Theta$ לא ייפגשו גם כאשר יוארכו לעבר הצדדים E, H . וקווים שאינם נפגשים בשום צד הם מקבילים; לפיכך EZ מקביל ל- $H\Theta$.

לפיכך, אם שני מישורים מקבילים נחתכים על ידי מישור כלשהו, חיתוכיהם המשותפים מקבילים; מש"ל.

אם שני קווים ישרים נחתכים על ידי מישורים מקבילים, הם ייחלקו באותם יחסים.

ייתכן שני הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$ על ידי המישורים המקבילים $H\Theta$, $K\Lambda$, MN בנקודות A , E , B ובנקודות Γ , Z , Δ . אומר אני שכפי שהקו הישר AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$.

יחברו AD , BA , AF , ויפגוש AD את המישור $K\Lambda$ בנקודה Ξ , ויחברו $E\Xi$, EZ . ומאחר ששני המישורים המקבילים MN , $K\Lambda$ נחתכים על ידי המישור $EB\Delta\Xi$, חיתוכיהם המשותפים BA , $E\Xi$ מקבילים. מאותם טעמים, מאחר ששני המישורים המקבילים $K\Lambda$, $H\Theta$ נחתכים על ידי המישור $A\Xi Z\Gamma$, חיתוכיהם המשותפים EZ , AF מקבילים. ומאחר שבמשולש ABA הועבר הקו $E\Xi$ במקביל לאחת הצלעות, BA , הרי כפי ש- AE אל EB , כך $A\Xi$ אל $E\Delta$. ושוב, מאחר שבמשולש $AD\Gamma$ הועבר הקו EZ במקביל לאחת הצלעות, AF , הרי כפי ש- $A\Xi$ אל $E\Delta$, כך ΓZ אל $Z\Delta$. אך הוכח גם שכפי ש- $A\Xi$ אל $E\Delta$, כך AE אל EB ; לפיכך כפי ש- AE אל EB , כך ΓZ אל $Z\Delta$.

לפיכך, אם שני קווים ישרים נחתכים על ידי מישורים מקבילים, הם ייחלקו באותם יחסים; מש"ל.

אם קו ישר ניצב למישור כלשהו, גם כל המישורים העוברים דרכו יהיו ניצבים לאותו מישור.

יהי קו ישר כלשהו AB ניצב למישור המונח. אומר אני שגם כל המישורים העוברים דרך AB ניצבים למישור המונח.

יועבר דרך AB המישור ΔE , ויהי ΓE החיתוך המשותף של המישור ΔE ושל המישור המונח. על ΓE תילקח נקודה מקרית Z , ומן Z יועבר במישור ΔE הקו ZH בניצב ל- ΓE . ומאחר ש- AB ניצב למישור המונח, הרי AB ניצב לכל

הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור המונח; ולכן הוא ניצב גם ל ΓE , ומכאן הזווית ABZ ישרה. וגם הזווית HZB ישרה; לפיכך AB מקביל ל ZH . אך AB ניצב למישור המונח; לכן גם ZH ניצב למישור המונח. ומישור ניצב למישור כאשר הקווים הישרים המועברים באחד המישורים בניצב לחיתוך המשותף של המישורים ניצבים למישור האחר. והקו ZH , שהועבר במישור ΔE בניצב לחיתוך המשותף ΓE של המישורים, הוכח ניצב למישור המונח; לפיכך המישור ΔE ניצב למישור המונח. ובדומה יוכח שגם כל המישורים העוברים דרך AB ניצבים למישור המונח.

לפיכך, אם קו ישר ניצב למישור כלשהו, גם כל המישורים העוברים דרכו יהיו ניצבים לאותו מישור; מש"ל.

אם שני מישורים החותכים זה את זה ניצבים למישור כלשהו, גם חיתוכם המשותף יהיה ניצב לאותו מישור.

יהיו שני המישורים AB , $B\Gamma$ ניצבים למישור המונח, ויהי חיתוכם המשותף BA . אומר אני ש ΔBA ניצב למישור המונח.

שאם לא, יועברו מן הנקודה Δ : במישור AB הקו ΔE בניצב לקו $A\Delta$, ובמישור $B\Gamma$ הקו ΔZ בניצב ל $\Gamma\Delta$. ומאחר שהמישור AB ניצב למישור המונח, ו ΔE הועבר במישור AB בניצב לחיתוכם המשותף $A\Delta$, הרי ΔE ניצב למישור המונח. ובדומה נוכיח שגם ΔZ ניצב למישור המונח. לפיכך מאותה נקודה Δ הועמדו שני קווים ישרים בניצב למישור המונח ובאותו צד שלו; וזה בלתי אפשרי. לכן לא יועמד מן הנקודה Δ קו בניצב למישור המונח מלבד ΔB , חיתוכם המשותף של המישורים AB , $B\Gamma$.

לפיכך, אם שני מישורים החותכים זה את זה ניצבים למישור כלשהו, גם חיתוכם המשותף יהיה ניצב לאותו מישור; מש"ל.

אם זווית מרחבית מוכלת בשלוש זוויות מישוריות, כל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת.

תהי הזווית המרחבית שב- A מוכלת בשלוש הזוויות המישוריות BAG , $ΓAD$, $ΔAB$. אומר אני שמבין הזוויות BAG , $ΓAD$, $ΔAB$ כל שתיים, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת.

אם אפוא הזוויות BAG , $ΓAD$, $ΔAB$ שוות זו לזו, ברור שכל שתיים מהן גדולות מן הנותרת. ואם לא, תהי BAG הגדולה שבהן, ובמישור העובר דרך BAG תיבנה על הקו AB ובנקודה A שעליו הזווית BAE השווה לזווית $ΔAB$; יונח AE שווה ל- AD ; והקו BE , המועבר דרך הנקודה E , יחתוך את הקווים AB , AG בנקודות B , $Γ$; ויחברו $ΔB$, $ΔΓ$. ומאחר ש- $ΔA$ שווה ל- AE ו- AB משותף, שתי צלעות שוות לשתי צלעות; והזווית $ΔAB$ שווה לזווית BAE ; לפיכך הבסיס $ΔB$ שווה לבסיס BE . ומאחר ששני הקווים $ΔΓ$, BD גדולים יחד מ- BE , ומביניהם הוכח $ΔB$ שווה ל- BE , הרי הנותר $ΔΓ$ גדול מן הנותר EF . ומאחר ש- $ΔA$ שווה ל- AE , ו- AG משותף, והבסיס $ΔΓ$ גדול מן הבסיס EF , הרי הזווית $ΔAG$ גדולה מן הזווית EAG . והוכח גם שהזווית $ΔAB$ שווה לזווית BAE ; לפיכך הזוויות $ΔAB$, $ΔAG$ גדולות יחד מן הזווית BAG . ובדומה נוכיח שגם כל זוג אחר גדול מן הזווית הנותרת.

לפיכך, אם זווית מרחבית מוכלת בשלוש זוויות מישוריות, כל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת; מש"ל.

כל זווית מרחבית מוכלת בזוויות מישוריות שסכומן קטן מארבע זוויות ישרות.

תהי הזווית המרחבית שב- A מוכלת בזוויות המישוריות ΔAB , ΓAD , $BA\Gamma$.
אומר אני שהזוויות ΔAB , ΓAD , $BA\Gamma$ קטנות יחד מארבע זוויות ישרות.

יילקחו על כל אחד מן AB , $A\Gamma$, AD הנקודות המקריות Δ , Γ , B , ויחברו $B\Gamma$, ΔB , $\Gamma\Delta$. ומאחר שהזווית המרחבית שב- B מוכלת בשלוש הזוויות המישוריות ΓBA , $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, כל שתיים מהן גדולות מן הנותרת; לפיכך הזוויות ΓBA , $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$ גדולות יחד מן הזווית $\Gamma B\Delta$. מאותם טעמים גם הזוויות $A\Gamma\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Gamma\Delta$ גדולות יחד מן $B\Gamma\Delta$, והזוויות $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$, $\Gamma\Delta B$ גדולות יחד מן $B\Gamma\Delta$. לפיכך שש הזוויות ΓBA , $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$ גדולות יחד משלוש הזוויות $\Gamma B\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta B$. אך שלוש הזוויות $\Gamma B\Delta$, $B\Delta\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ שוות יחד לשתי זוויות ישרות; לכן שש הזוויות ΓBA , $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$ גדולות יחד משתי זוויות ישרות. ומאחר שבכל אחד מן המשולשים $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta B$ שלוש הזוויות שוות לשתי זוויות ישרות, הרי תשע הזוויות של שלושת המשולשים, ΓBA , $A\Gamma B$, $BA\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $\Gamma\Delta\Delta$, $A\Delta B$, ΔBA , $BA\Delta$ שוות יחד לשש זוויות ישרות. ומהן שש הזוויות $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$, ΔBA גדולות יחד משתי זוויות ישרות; לפיכך שלוש הזוויות הנותרות $BA\Gamma$, $\Gamma\Delta\Delta$, ΔAB המכילות את הזווית המרחבית, קטנות יחד מארבע זוויות ישרות.

לפיכך כל זווית מרחבית מוכלת בזוויות מישוריות שסכומן קטן מארבע זוויות ישרות; מש"ל.

אם נתונות שלוש זוויות מישוריות שכל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת, וקווים ישרים שווים מכילים אותן, אפשר לבנות משולש מן הקווים המחברים את הקווים הישרים השווים.

יהיו שלוש הזוויות המישוריות $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, שכל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת: $AB\Gamma$, ΔEZ גדולות יחד מ־ $H\Theta K$; ΔEZ , $H\Theta K$ גדולות יחד מ־ $AB\Gamma$; וגם $AB\Gamma$, $H\Theta K$ גדולות יחד מ־ ΔEZ . ויהיו הקווים הישרים AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK שווים, ויחברו $A\Gamma$, ΔZ , HK . אומר אני שאפשר לבנות משולש מקווים השווים ל־ $A\Gamma$, ΔZ , HK ; כלומר, שכל שניים מן $A\Gamma$, ΔZ , HK גדולים מן הנותר.

אם אפוא הזוויות $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ שוות זו לזו, ברור שגם $A\Gamma$, ΔZ , HK שווים, ואפשר לבנות משולש מקווים השווים להם. ואם לא, יהיו בלתי־שוות; ועל הקו ΘK ובנקודה Θ שעליו תיבנה הזווית $K\Theta\Lambda$ השווה לזווית $AB\Gamma$; יונח $\Theta\Lambda$ שווה לאחד מן AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK ; ויחברו $K\Lambda$, $H\Lambda$. ומאחר ששתי הצלעות AB , $B\Gamma$ שוות לשתי הצלעות $K\Theta$, $\Theta\Lambda$, והזווית שב־ B שווה לזווית $K\Theta\Lambda$, הרי הבסיס $A\Gamma$ שווה לבסיס $K\Lambda$. ומאחר שהזוויות $AB\Gamma$, $H\Theta K$ גדולות יחד מן הזווית ΔEZ , והזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית $K\Theta\Lambda$, הרי הזווית $H\Theta\Lambda$ גדולה מן הזווית ΔEZ . ומאחר ששתי הצלעות $H\Theta$, $\Theta\Lambda$ שוות לשתי הצלעות ΔE , EZ , והזווית $H\Theta\Lambda$ גדולה מן הזווית ΔEZ , הרי הבסיס $H\Lambda$ גדול מן הבסיס ΔZ . אך HK , $K\Lambda$ גדולים יחד מ־ $H\Lambda$; על אחת כמה וכמה HK , $K\Lambda$ גדולים יחד מ־ ΔZ . ו־ $K\Lambda$ שווה ל־ $A\Gamma$; לפיכך $A\Gamma$, HK גדולים יחד מן הנותר ΔZ . ובדומה נוכיח שגם $A\Gamma$, ΔZ גדולים יחד מ־ HK , וגם ΔZ , HK גדולים יחד מ־ $A\Gamma$. לפיכך אפשר לבנות משולש מקווים השווים ל־ $A\Gamma$, ΔZ , HK ; מש״ל.

לבנות זווית מרחבית משלוש זוויות מישוריות שכל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנותרת; ושלושתן צריכות להיות קטנות יחד מארבע זוויות ישרות.

יהיו שלוש הזוויות המישוריות הנתונות $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, שכל שתיים מהן, בכל צירוף, גדולות מן הנתורת, וגם שלושן קטנות יחד מארבע זוויות ישרות. צריך אפוא לבנות זווית מרחבית מזוויות השוות ל־ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$.

ייקטעו AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK שווים, ויחברו $A\Gamma$, ΔZ , HK . לפיכך אפשר לבנות משולש מקוים השווים ל־ $A\Gamma$, ΔZ , HK . ייבנה המשולש ΛMN . כך ש־ $A\Gamma$ שווה ל־ ΛM , ΔZ שווה ל־ MN , וגם HK שווה ל־ NA ; סביב המשולש ΛMN יתואר המעגל ΛMN , ילקח מרכזו ויהי E , ויחברו ΛE , ME , NE . אומר אני ש־ AB גדול מ־ ΛE . שאם לא, AB שווה ל־ ΛE או קטן ממנו. יהי תחילה שווה. ומאחר ש־ AB שווה ל־ ΛE , וגם AB שווה ל־ $B\Gamma$ ו־ ΛE שווה ל־ EM , הרי שתי הצלעות AB , $B\Gamma$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΛE , EM , והבסיס $A\Gamma$ הונח שווה לבסיס ΛM . לפיכך הזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית ΛEM . מאותם טעמים גם הזווית ΔEZ שווה לזווית MEN , וגם הזווית $H\Theta K$ שווה לזווית $NE\Lambda$. לפיכך שלוש הזוויות $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ שוות לשלוש הזוויות ΛEM , MEN , $NE\Lambda$. אך שלוש הזוויות ΛEM , MEN , $NE\Lambda$ שוות לארבע זוויות ישרות; לכן גם שלוש הזוויות $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ שוות לארבע זוויות ישרות. והן גם הונחו קטנות מארבע זוויות ישרות; וזה אבסורד. לכן AB אינו שווה ל־ ΛE . אומר אני שגם AB אינו קטן מ־ ΛE . שאם אפשר, יהי קטן; ויונח EO שווה ל־ AB ו־ EO שווה ל־ $B\Gamma$, ויחבר OP . ומאחר ש־ AB שווה ל־ $B\Gamma$, וגם EO שווה ל־ EO ; ולכן גם השארית AO שווה לשארית PM . לפיכך ΛM מקביל ל־ OP , והמשולש ΛME שווה־זוויות למשולש $OP E$; ולכן כפי ש־ ΛE אל ΛM , כך EO אל OP ; ובחילוף, כפי ש־ ΛE אל EO , כך EO אל OP . אך ΛE גדול מ־ EO ; לכן גם ΛM גדול מ־ OP . ו־ ΛM הונח שווה ל־ $A\Gamma$; לפיכך גם $A\Gamma$ גדול מ־ OP . ומאחר ששתי הצלעות AB , $B\Gamma$ שוות לשתי הצלעות OE , OP .

$\epsilon\pi$, והבסיס $\alpha\Gamma$ גדול מן הבסיס $\alpha\pi$, הרי הזווית $\alpha\beta\Gamma$ גדולה מן הזווית $\alpha\beta\pi$.
 ובדומה נוכיח שהזווית ΔEZ גדולה מן הזווית ΔEN , והזווית $\theta\theta K$ גדולה מן
 הזווית $\theta\theta\Lambda$. לפיכך שלוש הזוויות $\alpha\beta\Gamma$, ΔEZ , $\theta\theta K$ גדולות משלוש הזוויות
 $\alpha\epsilon\pi$, ΔEN , $\theta\theta\Lambda$. אך $\alpha\beta\Gamma$, ΔEZ , $\theta\theta K$ הונחו קטנות מארבע זוויות
 ישרות; על אחת כמה וכמה $\alpha\epsilon\pi$, ΔEN , $\theta\theta\Lambda$ קטנות מארבע זוויות ישרות.
 אך הן גם שוות לארבע זוויות ישרות; וזה אבסורד. לכן AB אינו קטן מ־ $\alpha\epsilon$.
 והוכח שגם אינו שווה לו; לפיכך AB גדול מ־ $\alpha\epsilon$. יועמד אפוא מן הנקודה ϵ
 הקו $\epsilon\pi$ בניצב למישור המעגל αMN ; וריבוע $\epsilon\pi$ יהיה שווה לעודף שבו ריבוע
 AB גדול מריבוע $\alpha\epsilon$; ויחוברו $\alpha\Lambda$, αM , αN . ומאחר ש־ $\epsilon\pi$ ניצב למישור
 המעגל αMN , הרי $\epsilon\pi$ ניצב לכל אחד מן $\alpha\epsilon$, αM , αN . ומאחר ש־ $\alpha\epsilon$ שווה
 ל־ ϵM , ו־ $\epsilon\pi$ משותף וניצב, הרי הבסיס $\alpha\Lambda$ שווה לבסיס αM . מאותם טעמים
 גם αN שווה לכל אחד מן $\alpha\Lambda$, αM ; לפיכך שלוש הקווים $\alpha\Lambda$, αM , αN
 שווים זה לזה. ומאחר שריבוע $\epsilon\pi$ הונח שווה לעודף שבו ריבוע AB גדול
 מריבוע $\alpha\epsilon$, הרי ריבוע AB שווה לסכום ריבועי $\alpha\epsilon$, $\epsilon\pi$. אך סכום ריבועי
 $\alpha\epsilon$, $\epsilon\pi$ שווה לריבוע $\alpha\Lambda$, שהרי הזווית $\alpha\epsilon\pi$ ישרה; לפיכך ריבוע AB שווה
 לריבוע $\alpha\Lambda$, ולכן AB שווה ל־ $\alpha\Lambda$. אך כל אחד מן $\theta\theta$, θK , $\theta\theta$, ΔE , $\beta\Gamma$ שווה
 ל־ AB , וכל אחד מן αM , αN שווה ל־ $\alpha\Lambda$; לפיכך כל אחד מן AB , $\beta\Gamma$, ΔE ,
 $\theta\theta$, θK , ΔE שווה לכל אחד מן $\alpha\Lambda$, αM , αN . ומאחר ששתי הצלעות $\alpha\Lambda$,
 αM שוות לשתי הצלעות AB , $\beta\Gamma$, והבסיס αM הונח שווה לבסיס $\alpha\Gamma$, הרי
 הזווית αPM שווה לזווית $\alpha\beta\Gamma$. מאותם טעמים גם הזווית αPN שווה לזווית
 ΔEZ , והזווית αPN שווה לזווית $\theta\theta K$.

לפיכך משלוש הזוויות המישוריות ΔPM , ΔPN , ΔAP , השוות לשלוש הזוויות הנתונות $\Delta AB\Gamma$, ΔEZ , $\Delta H\Theta K$, נבנתה הזווית המרחבית שב- P , המוכלת בזוויות ΔPM , ΔPN , ΔAP ; כנדרש לעשות.

לָמָּה

ואת האופן שבו אפשר לקחת את ריבוע ΔEP שווה לעודף שבו ריבוע AB גדול מריבוע ΔE נוכיח כך. יונחו הקווים הישרים AB , ΔE , ויהי AB הגדול; יתואר עליו חצי־המעגל $AB\Gamma$; ובחצי־המעגל $AB\Gamma$ יותאם הקו AF השווה לקו ΔE , שאינו גדול מן הקוטר AB ; ויחובר ΓB . ומאחר שהזווית AFB היא זווית בחצי־המעגל $AB\Gamma$, הרי הזווית AFB ישרה. לפיכך ריבוע AB שווה לסכום ריבועי AF , ΓB ; לכן ריבוע AB גדול מריבוע AF בריבוע ΓB . אך AF שווה ל- ΔE ; לפיכך ריבוע AB גדול מריבוע ΔE בריבוע ΓB . אם אפוא ניקח את ΔEP שווה ל- ΔE , יהיה ריבוע AB גדול מריבוע ΔE בריבוע ΔEP ; כנדרש לעשות.

אם גוף מוכל במישורים מקבילים, פניו הנגדיים שווים ומקבילים.

יהי הגוף $\Delta\Theta H$ מוכל במישורים המקבילים AE , BZ , ΔZ , $A\Theta$, HZ , AF . אומר אני שפניו הנגדיים שווים ומקבילים.

מאחר ששני המישורים המקבילים ΓE , BH נחתכים על ידי המישור AF , חיתוכיהם המשותפים מקבילים; לפיכך AB מקביל ל- ΔF . ושוב, מאחר ששני המישורים המקבילים AE , BZ נחתכים על ידי המישור AF , חיתוכיהם המשותפים מקבילים; לפיכך BF מקביל ל- ΔA . והוכח גם ש- AB מקביל ל- ΔF ; לכן AF מקבילית. ובדומה נוכיח שגם כל אחד מן BZ , HB , ZH , ΔZ , AE הוא מקבילית.

יחברו ΔZ , $A\Theta$. ומאחר ש- AB מקביל ל- $\Delta\Gamma$ ו- $B\Theta$ מקביל ל- ΓZ , הרי שני הקווים AB , $B\Theta$, הנוגעים זה בזה, מקבילים בהתאמה לשני הקווים $\Delta\Gamma$, ΓZ , הנוגעים זה בזה, ואינם באותו מישור; לפיכך הם מכילים זוויות שוות, ולכן הזווית $AB\Theta$ שווה לזווית $\Delta\Gamma Z$. ומאחר ששתי הצלעות AB , $B\Theta$ שוות לשתי הצלעות $\Delta\Gamma$, ΓZ , והזווית $AB\Theta$ שווה לזווית $\Delta\Gamma Z$, הרי הבסיס $A\Theta$ שווה לבסיס ΔZ , והמשולש $AB\Theta$ שווה למשולש $\Delta\Gamma Z$. והמקבילית BH כפולה מן המשולש $AB\Theta$, והמקבילית ΓE כפולה מן המשולש $\Delta\Gamma Z$; לפיכך המקבילית BH שווה למקבילית ΓE . ובדומה נוכיח ש- AF שווה ל- HZ , ו- AE שווה ל- BZ . לפיכך, אם גוף מוכל במישורים מקבילים, פניו הנגדיים שווים ומקביליות; מש"ל.

אם מקבילון נחתך על ידי מישור המקביל לפאותיו הנגדיות, כפי שהבסיס אל הבסיס, כך הגוף אל הגוף.

ייחתך המקבילון $AB\Gamma\Delta$ על ידי המישור ZH המקביל לפאות הנגדיות $\Delta\Theta$, PA . אומר אני שכפי שהבסיס $AEZ\Phi$ אל הבסיס $E\Theta\Gamma Z$, כך הגוף $ABZY$ אל הגוף $E\Theta\Gamma\Delta$.

יוארך $A\Theta$ בשני הכיוונים; יונחו כמה קווים שיימצאו, AK , KA , שווים ל- AE , וכמה קווים שיימצאו, ΘM , MN , שווים ל- $E\Theta$; ויושלמו המקביליות ΛO , $K\Phi$, ΘX , $M\Xi$ והגופים $\Lambda\Pi$, KP , ΔM , MT . ומאחר שהקווים הישרים ΛK , KA שווים זה לזה, גם המקביליות ΛO , $K\Phi$, AZ שוות זו לזו; וכן $K\Xi$, KB , AH שוות זו לזו, וגם $\Lambda\Psi$, $K\Pi$, AP שוות זו לזו, שכן הן נגדיות. מאותם טעמים גם המקביליות $E\Gamma$, ΘX , $M\Xi$ שוות זו לזו; ΘH , ΘI , IN שוות זו לזו; וגם $\Delta\Theta$, $M\Omega$ שוות זו לזו. לפיכך שלוש פאות של הגופים $\Lambda\Pi$, KP , AY שוות בהתאמה

לשלוש פאות; אך שלוש אלה שוות לשלוש הפאות הנגדיות; לכן שלושת הגופים $\Delta\Lambda\Pi$, KP , AY שווים זה לזה. מאותם טעמים גם שלושת הגופים $E\Delta$, ΔM , MT שווים זה לזה. לפיכך, פי כמה שהבסיס AZ הוא מן הבסיס AZ , פי אותו מספר הגוף ΔY הוא מן הגוף AY . מאותם טעמים, פי כמה שהבסיס NZ הוא מן הבסיס $Z\Theta$, פי אותו מספר הגוף NY הוא מן הגוף ΘY . ואם הבסיס AZ שווה לבסיס NZ , גם הגוף ΔY שווה לגוף NY ; ואם הבסיס AZ גדול מן הבסיס NZ , גם הגוף ΔY גדול מן הגוף NY ; ואם הוא קטן, גם הגוף קטן. הנה מתוך ארבעה גדלים — שני הבסיסים AZ , $Z\Theta$ ושני הגופים AY , $Y\Theta$ — נלקחו כפולות שוות־מספר: הבסיס AZ והגוף ΔY של הבסיס AZ ושל הגוף AY , והבסיס NZ והגוף NY של הבסיס ΘZ ושל הגוף ΘY . והוכח שאם הבסיס AZ גדול מן הבסיס ZN , גם הגוף ΔY גדול מן NY ; אם הוא שווה, גם הגוף שווה; ואם הוא קטן, גם הגוף קטן. לפיכך כפי שהבסיס AZ אל הבסיס $Z\Theta$, כך הגוף AY אל הגוף $Y\Theta$; מש"ל.

לבנות על הקו הישר הנתון, ובנקודה הנתונה שעליו, זווית מרחבית השווה לזווית המרחבית הנתונה.

יהי הקו הישר הנתון AB , תהי הנקודה הנתונה שעליו A , ותהי הזווית המרחבית הנתונה זו שב־ Δ , המוכלת בזוויות המישוריות $\Delta\epsilon\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$. צריך אפוא לבנות על הקו AB ובנקודה A שעליו זווית מרחבית השווה לזווית המרחבית שב־ Δ .

תילקח על ΔZ נקודה מקרית Z , ומן Z יועבר ZH מאונך אל המישור העובר דרך $E\Delta$, $\Delta\Gamma$, ויפגוש את המישור בנקודה H ; יחובר ΔH ; ועל הקו AB ובנקודה A שעליו תיבנה הזווית BAA השווה לזווית $\epsilon\Delta\Gamma$, וכן הזווית BAK השווה

לזווית $E\Delta H$. יונח AK שווה ל- ΔH ; מן הנקודה K יועמד $K\Theta$ בניצב למישור העובר דרך $B\Delta\Delta$; יונח $K\Theta$ שווה ל- HZ ; ויחובר ΘA . אומר אני שהזווית המרחבית שב- A , המוכלת בזוויות $B\Delta\Delta$, $B\Delta\Theta$, $\Theta A\Delta$, שווה לזווית המרחבית שב- Δ , המוכלת בזוויות $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$.

ייקטעו AB , ΔE שווים, ויחברו ΘB , KB , ZE , HE . ומאחר ש- ZH ניצב למישור המונח, הוא יוצר זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנוגעים בו ונמצאים במישור המונח; לפיכך כל אחת מן הזוויות ZHA , ZHE ישרה. מאותם טעמים גם כל אחת מן הזוויות ΘKA , ΘKB ישרה. ומאחר ששתי הצלעות KA , AB שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΔE , HA , והן כוללות זוויות שוות, הרי הבסיס KB שווה לבסיס HE . וגם $K\Theta$ שווה ל- HZ , והן כוללות זוויות ישרות; לפיכך גם ΘB שווה ל- ZE . ושוב, מאחר ששתי הצלעות AK , $K\Theta$ שוות לשתי הצלעות ΔH , HZ , והן כוללות זוויות ישרות, הרי הבסיס $A\Theta$ שווה לבסיס $Z\Delta$. וגם AB שווה ל- ΔE ; לפיכך שתי הצלעות ΘA , AB שוות לשתי הצלעות ΔZ , ΔE , והבסיס ΘB שווה לבסיס ZE ; לכן הזווית $B\Delta\Theta$ שווה לזווית $E\Delta Z$. מאותם טעמים גם הזווית $\Theta A\Delta$ שווה לזווית $Z\Delta\Gamma$. וגם הזווית $B\Delta\Delta$ שווה לזווית $E\Delta\Gamma$.

לפיכך נבנתה על הקו הישר הנתון AB ובנקודה הנתונה A שעליו זווית מרחבית השווה לזווית המרחבית הנתונה שב- Δ ; כנדרש לעשות.

לבנות על הקו הישר הנתון מקבילון הדומה למקבילון הנתון ומונח באותו אופן.

יהי הקו הישר הנתון AB , ויהי המקבילון הנתון $\Gamma\Delta$. צריך אפוא לבנות על הקו הישר הנתון AB מקבילון הדומה למקבילון הנתון $\Gamma\Delta$ ומונח באותו אופן.

על הקו AB ובנקודה A שעליו תיבנה זווית מרחבית המוכלת בזוויות $BA\Theta$, ΘAK , KAB והשווה לזווית המרחבית שב Γ , כך שהזווית $BA\Theta$ תהיה שווה לזווית EFZ , הזווית BAK לזווית EFH , והזווית $KA\Theta$ לזווית HGZ . ויעשה כפי ש Γ אל GH , כך BA אל AK ; וכפי ש Γ אל HG , כך KA אל $A\Theta$. לכן, בשוויון, כפי ש Γ אל EF , כך BA אל $A\Theta$. ותושלם המקבילית ΘB והגוף $A\Lambda$.

ומאחר שכפי ש Γ אל GH כך BA אל AK , והצלעות סביב הזוויות השוות EFH , BAK פרופורציונליות, הרי המקבילית HE דומה למקבילית KB . מאותם טעמים גם המקבילית $K\Theta$ דומה למקבילית HZ , וגם ZE דומה ל ΘB . לפיכך שלוש מקביליות של הגוף $\Gamma\Delta$ דומות לשלוש מקביליות של הגוף $A\Lambda$. אך שלוש הראשונות שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן, וגם שלוש האחרות שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן; לפיכך הגוף $\Gamma\Delta$ כולו דומה לגוף $A\Lambda$ כולו.

לפיכך נבנה על הקו הישר הנתון AB המקבילון $A\Lambda$, הדומה למקבילון הנתון $\Gamma\Delta$ ומונח באותו אופן; כנדרש לעשות.

אם מקבילון נחתך על ידי מישור העובר באלכסוני הפאות הנגדיות, הגוף ייחצה על ידי המישור.

ייחתך המקבילון AB על ידי המישור $\Gamma\Delta EZ$ העובר באלכסוני הפאות הנגדיות $\Gamma\Delta$, AE . אומר אני שהגוף AB ייחצה על ידי המישור $\Gamma\Delta EZ$.

מאחר שהמשולש ΓHZ שווה למשולש ΓZB , והמשולש $A\Delta E$ שווה למשולש $\Delta E\Theta$, וגם המקבילית ΓA שווה למקבילית EB , שהרי הן נגדיות, וכן HE שווה ל Θ , הרי המנסרה המוכלת בשני המשולשים $A\Delta E$, ΓHZ ובשלוש

המקביליות ΓZB , $\Delta E\Theta$ שווה למנסרה המוכלת בשני המשולשים HE , AF , FE ובשלוש המקביליות $\Gamma\Theta$, BE , FE ; שהרי הן מופלות בפאות השוות במספרן ובגודלן. לפיכך הגוף AB כולו נחצה על ידי המישור $\Gamma\Delta EZ$; מש"ל.

מקבילונים הנמצאים על אותו בסיס ובאותו גובה, שמקצועותיהם הזקופים נמצאים על אותם קווים ישרים, שווים זה לזה.

יהיו המקבילונים ΓM , ΓN על אותו בסיס AB ובאותו גובה, ויהיו מקצועותיהם הזקופים AH , AZ , ΛM , ΛN , $\Gamma\Delta$, FE , $B\Theta$, BK , AK . אומר אני שהגוף ΓM שווה לגוף ΓN .

מאחר שכל אחת מן $\Gamma\Theta$, ΓK היא מקבילית, ΓB שווה לכל אחד מן $\Delta\Theta$, EK ; ולכן גם $\Delta\Theta$ שווה ל- EK . תחוסר $E\Theta$ המשותפת; לפיכך השארית ΔE שווה לשארית ΘK . לכן המשולש ΔFE שווה למשולש ΘBK , והמקבילית ΔH שווה למקבילית ΘN . מאותם טעמים גם המשולש AZH שווה למשולש $\Lambda M N$. וגם המקבילית ΓZ שווה למקבילית BM , והמקבילית ΓH שווה ל- BN , שהרי הן נגדיות. לפיכך המנסרה המוכלת בשני המשולשים ΔFE , AZH ובשלוש המקביליות AD , ΔH , ΓH שווה למנסרה המוכלת בשני המשולשים $\Lambda M N$, ΘBK ובשלוש המקביליות BM , ΘN , BN . יתווסף לשתייהן הגוף המשותף שבסיסו המקבילית AB ופאתו הנגדית $HE\Theta M$; לפיכך המקבילון ΓM כולו שווה למקבילון ΓN כולו.

לפיכך מקבילונים הנמצאים על אותו בסיס ובאותו גובה, שמקצועותיהם הזקופים נמצאים על אותם קווים ישרים, שווים זה לזה; מש"ל.

מקבילונים הנמצאים על אותו בסיס ובאותו גובה, שמקצועותיהם הזקופים אינם נמצאים על אותם קווים ישרים, שווים זה לזה.

יהיו המקבילונים ΓM , ΓN על אותו בסיס AB ובאותו גובה, ולא יהיו מקצועותיהם הזקופים AZ , AH , ΛM , ΛN , $\Gamma \Delta$, ΓE , $B\Theta$, BK על אותם קווים ישרים. אומר אני שהגוף ΓM שווה לגוף ΓN .

יוארכו NK , $\Delta\Theta$ ויפגשו זו בזו בנקודה P ; וכן יוארכו ZM , HE אל O ; ויחברו $A\Xi$, ΛO , $\Gamma\Pi$, BP . הנה הגוף ΓM , שבסיסו המקבילית $AGBA$ ופאתו הנגדית $Z\Delta\Theta M$, שווה לגוף ΓO , שבסיסו המקבילית $AGBA$ ופאתו הנגדית ΞPRO ; שהרי הם על אותו בסיס $AGBA$ ובאותו גובה, ומקצועותיהם הזקופים AZ , $A\Xi$, ΛM , ΛO , $\Gamma \Delta$, $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP , ZO נמצאים על אותם קווים ישרים ΞPRO , ΔP . אך הגוף ΓO , שבסיסו המקבילית $AGBA$ ופאתו הנגדית ΞPRO , שווה לגוף ΓN , שבסיסו המקבילית $AGBA$ ופאתו הנגדית $HEKN$; שהרי גם הם על אותו בסיס $AGBA$ ובאותו גובה, ומקצועותיהם הזקופים AH , $A\Xi$, ΓE , $\Gamma\Pi$, ΛN , ΛO , BK , BP נמצאים על אותם קווים ישרים HN , NP . לפיכך גם הגוף ΓM שווה לגוף ΓN .

לפיכך מקבילונים הנמצאים על אותו בסיס ובאותו גובה, שמקצועותיהם הזקופים אינם נמצאים על אותם קווים ישרים, שווים זה לזה; מש"ל.

מקבילונים הנמצאים על בסיסים שווים ובאותו גובה שווים זה לזה.

יהיו המקבילונים AE , ΓZ על הבסיסים השווים AB , $\Gamma \Delta$ ובאותו גובה. אומר אני שהגוף AE שווה לגוף ΓZ .

ΘK , BE , AH , ΛM , OP , ΔZ , ΓE , $P\Sigma$ יהיו תחילה המקצועות הזקופים AB , $\Gamma\Delta$ ניצבים לבסיסים PT יוארך בקו ישר עם GP ; על הקו PT ובנקודה P שעליו תיבנה הזווית TPY השווה לזווית $A\Lambda B$; יונח PT שווה ל- $\Lambda\Lambda$ ו- PY שווה ל- AB ; ויושלמו הבסיס PX והגוף ΨY . ומאחר ששתי הצלעות TP , PY שוות לשתי הצלעות $\Lambda\Lambda$, AB והן כוללות זוויות שוות, הרי המקבילית PX שווה ודומה למקבילית $\Theta\Lambda$. ושוב, מאחר ש- $\Lambda\Lambda$ שווה ל- PT ו- ΛM שווה ל- $P\Sigma$, והן כוללות זוויות ישרות, הרי המקבילית $P\Psi$ שווה ודומה למקבילית AM . מאותם טעמים גם ΛE שווה ודומה ל- ΣY . לפיכך שלוש מקביליות של הגוף ΛE שוות ודומות לשלוש מקביליות של הגוף ΨY . אך שלוש הראשונות שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן, וגם שלוש האחרות לשלוש הנגדיות להן; לפיכך המקבילון ΛE כולו שווה למקבילון ΨY כולו. יועברו ΔP , XY וייפגשו בנקודה Ω ; דרך T יועבר $\alpha T\eta$ מקביל ל- $\Delta\Omega$; יוארך OA עד α ; ויושלמו הגופים $\Omega\Psi$, PI . הנה הגוף $\Psi\Omega$, שבסיסו המקבילית $P\Psi$ ופאתו הנגדית $\Omega\Sigma$, שווה לגוף ΨY , שבסיסו המקבילית $P\Psi$ ופאתו הנגדית $Y\Phi$; שהרי הם על אותו בסיס $P\Psi$ ובאותו גובה, ומקצועותיהם הזקופים $P\Omega$, PY , $T\eta$, TX , $\Sigma\zeta$, $\Sigma\delta$, $\Psi\zeta$, $\Psi\Phi$ נמצאים על אותם קווים ישרים ΩX , $\zeta\Phi$. אך הגוף ΨY שווה ל- ΛE ; לפיכך גם הגוף $\Psi\Omega$ שווה לגוף ΛE . ומאחר שהמקבילית $PYXT$ שווה למקבילית ΩT , שהרי הן על אותו בסיס PT ובין אותם מקבילים PT , ΩX ; והמקבילית $PYXT$ שווה ל- $\Gamma\Delta$, מפני שהיא שווה גם ל- AB ; לפיכך גם המקבילית ΩT שווה ל- $\Gamma\Delta$. והמקבילית ΔT היא אחרת; לכן כפי שהבסיס $\Gamma\Delta$ אל ΔT , כך ΩT אל ΔT . ומאחר שהמקבילון ΓI נחתך על ידי המישור PZ המקביל לפאות הנגדיות, הרי כפי שהבסיס $\Gamma\Delta$ אל הבסיס ΔT , כך הגוף ΓZ אל הגוף PI . ומאותם טעמים, מאחר שהמקבילון ΩI נחתך על ידי המישור $P\Psi$ המקביל לפאות הנגדיות, כפי שהבסיס ΩT אל הבסיס TA , כך הגוף $\Omega\Psi$ אל PI . אך כפי שהבסיס $\Gamma\Delta$ אל

ידי המישור ΔH המקביל לפאות הנגדיות, הרי כפי שהבסיס ΓZ אל הבסיס $Z\Theta$, כך הגוף $\Gamma\Delta$ אל הגוף $\Delta\Theta$. אך הבסיס $Z\Theta$ שווה לבסיס AE , והגוף HK שווה לגוף AB ; לפיכך גם כפי שהבסיס AE אל הבסיס ΓZ , כך הגוף AB אל הגוף $\Gamma\Delta$.

לפיכך מקבילונים הנמצאים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסים; מש"ל.

מקבילונים דומים מתייחסים זה לזה ביחס המשולש של צלעותיהם המתאימות.

יהיו המקבילונים AB , $\Gamma\Delta$ דומים, ותהי AE מתאימה ל- ΓZ . אומר אני שהיחס של הגוף AB אל הגוף $\Gamma\Delta$ הוא היחס המשולש של AE אל ΓZ .

יוארכו EM , EA , EK בקווים ישרים עם ΘE , HE , AE ; יונח EK שווה ל- ΓZ , EA שווה ל- ZN , וגם EM שווה ל- ZP ; ויושלמו המקבילית KA והגוף KO .

ומאחר ששתי הצלעות EA , KE שוות לשתי הצלעות ZN , ΓZ , וגם הזווית KEA שווה לזווית ΓZN — שהרי גם הזווית AEH שווה לזווית ΓZN מחמת דמיון הגופים AB , $\Gamma\Delta$ — הרי המקבילית KA שווה למקבילית ΓN . מאותם טעמים גם המקבילית KM שווה ודומה למקבילית ΓP , וגם EO שווה ודומה ל- ΔZ . לפיכך שלוש מקביליות של הגוף KO שוות ודומות לשלוש מקביליות של הגוף $\Gamma\Delta$. אך שלוש הראשונות שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן, וגם שלוש האחרות לשלוש הנגדיות להן; לפיכך הגוף KO כולו שווה ודומה לגוף $\Gamma\Delta$ כולו. תושלם המקבילית HK , ועל בסיסי המקביליות KA , HK ובגובה השווה לגובה הגוף AB יושלמו הגופים $\Lambda\Pi$, EE . ומאחר שמחמת דמיון הגופים AB , $\Gamma\Delta$, כפי ש- AE אל ΓZ כך EH אל ZN וכך $E\Theta$ אל ZP , ואילו ΓZ

שווה ל־ ZN , EK שווה ל־ EA , ו־ ZP שווה ל־ EM , הרי כפי ש־ AE אל EK , כך HE אל EA וכך ΘE אל EM . אך כפי ש־ AE אל EK , כך המקבילית AH אל המקבילית HK ; כפי ש־ HE אל EA , כך HK אל KA ; וכפי ש־ ΘE אל EM , כך PE אל KM . לפיכך כפי שהמקבילית AH אל HK , כך HK אל KA וכך PE אל KM . אך כפי ש־ AH אל HK , כך הגוף AB אל הגוף EE ; כפי ש־ HK אל KA , כך הגוף EE אל הגוף PA ; וכפי ש־ PE אל KM , כך הגוף PA אל הגוף KO . ואם ארבעה גדלים נמצאים בפרופורציה רצופה, יחס הראשון אל הרביעי הוא היחס המשולש של הראשון אל השני; לכן יחס הגוף AB אל KO הוא היחס המשולש של AB אל EE . אך כפי ש־ AB אל EE , כך המקבילית AH אל HK וכך הקו הישר AE אל EK ; לפיכך יחס הגוף AB אל KO הוא היחס המשולש של AE אל EK . והגוף KO שווה לגוף ΓA , והקו EK שווה ל־ ΓZ ; לפיכך יחס הגוף AB אל הגוף ΓA הוא היחס המשולש של צלעו המתאימה AE אל הצלע המתאימה ΓZ .

לפיכך מקבילונים דומים מתייחסים זה לזה ביחס המשולש של צלעותיהם המתאימות; מש״ל.

מסקנה

מכאן ברור שאם ארבעה קווים ישרים נמצאים בפרופורציה, כפי שהראשון אל הרביעי, כך המקבילון הבנוי על הראשון אל המקבילון הדומה והמונח באותו אופן הבנוי על השני; שהרי גם יחס הראשון אל הרביעי הוא היחס המשולש של הראשון אל השני.

במקבילונים שווים הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; ומקבילונים שבסיסיהם עומדים ביחס הפוך לגבהיהם שווים.

יהיו המקבילונים $AB, \Gamma\Delta$ שווים. אומר אני שבמקבילונים $AB, \Gamma\Delta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים, ושכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB .

יהיו תחילה המקצועות הזקופים $AH, EZ, \Lambda B, \Theta K, \Gamma M, N\Xi, O\Delta, \Pi P$ ניצבים לבסיסיהם. אומר אני שכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך ΓM אל AH .

אם אפוא הבסיס $E\Theta$ שווה לבסיס $N\Pi$, וגם הגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$, יהיה גם ΓM שווה ל- AH . שהרי מקבילונים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסיהם. ולכן כפי שהבסיס $E\Theta$ אל $N\Pi$, כך ΓM אל AH ; וברור שבמקבילונים $AB, \Gamma\Delta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים.

עתה לא יהי הבסיס $E\Theta$ שווה לבסיס $N\Pi$, אלא יהי $E\Theta$ גדול ממנו. וגם הגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$; לפיכך ΓM גדול מ- AH . יונח אפוא ΓT שווה ל- AH , ועל הבסיס $N\Pi$ ובגובה ΓT יושלם המקבילון $\Phi\Gamma$. ומאחר שהגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$, ו- $\Gamma\Phi$ הוא גודל חיצוני, והשוויים מתייחסים באותו יחס אל אותו גודל, הרי כפי שהגוף AB אל הגוף $\Gamma\Phi$, כך הגוף $\Gamma\Delta$ אל הגוף $\Gamma\Phi$. אך כפי שהגוף AB אל הגוף $\Gamma\Phi$, כך הבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, שהרי הגופים $AB, \Gamma\Phi$ שווי-גובה; וכפי שהגוף $\Gamma\Delta$ אל הגוף $\Gamma\Phi$, כך הבסיס $M\Pi$ אל הבסיס $T\Pi$ וכך ΓM אל ΓT . לפיכך כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך $M\Gamma$ אל ΓT . ו- ΓT שווה ל- AH ; לכן כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך $M\Gamma$ אל AH . לפיכך במקבילונים $AB, \Gamma\Delta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים.

ושוב, במקבילונים $AB, \Gamma\Delta$ יעמדו הבסיסים ביחס הפוך לגבהים, ויהי כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB . אומר אני שהגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$.

יהיו שוב המקצועות הזקופים ניצבים לבסיסים. ואם הבסיס $E\Theta$ שווה לבסיס $N\Pi$, וכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$ כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB , הרי גם גובה הגוף $\Gamma\Delta$ שווה לגובה הגוף AB . ומקבילונים שעל בסיסים שווים ובאותו גובה שווים זה לזה; לפיכך הגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$.

עתה לא יהי הבסיס $E\Theta$ שווה ל- $N\Pi$, אלא יהי $E\Theta$ גדול ממנו; לפיכך גם גובה הגוף $\Gamma\Delta$ גדול מגובה הגוף AB , כלומר ΓM גדול מ- AH . יונח שוב ΓT שווה ל- AH , ויושלם באופן דומה הגוף $\Gamma\Phi$. מאחר שכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$ כך $M\Gamma$ אל AH , ו- AH שווה ל- ΓT , הרי כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך ΓM אל ΓT . אך כפי ש- $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך הגוף AB אל הגוף $\Gamma\Phi$, שהרי הגופים $AB, \Gamma\Phi$ שווים לגובה; וכפי ש- ΓM אל ΓT , כך גם הבסיס $M\Pi$ אל הבסיס ΠT וגם הגוף $\Gamma\Delta$ אל הגוף $\Gamma\Phi$. לפיכך כפי שהגוף AB אל הגוף $\Gamma\Phi$, כך הגוף $\Gamma\Delta$ אל הגוף $\Gamma\Phi$. לכן לכל אחד מן $AB, \Gamma\Delta$ אותו יחס אל $\Gamma\Phi$; לפיכך הגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$.

עתה לא יהיו המקצועות הזקופים $ZE, BA, HA, \Theta K, EN, \Delta O, M\Gamma, P\Pi$ ניצבים לבסיסיהם. מן הנקודות $Z, H, B, K, E, M, \Delta, P$ יועברו מאונכים אל המישורים העוברים דרך $E\Theta, N\Pi$, ויפגשו את המישורים בנקודות Σ, T, Y, Φ , $X, \Psi, \Omega, \varsigma$; ויושלמו הגופים $Z\Phi, E\Omega$. אומר אני שגם כך, כאשר הגופים $AB, \Gamma\Delta$ שווים, הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים, וכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB .

מאחר שהגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$, אך AB שווה ל- BT , שהרי הם על אותו בסיס ZK ובאותו גובה; והגוף $\Gamma\Delta$ שווה לגוף $\Delta\Psi$, שהרי גם הם על אותו בסיס PE ובאותו גובה; לפיכך גם הגוף BT שווה לגוף $\Delta\Psi$. לכן כפי שהבסיס ZK אל הבסיס EP , כך גובה הגוף $\Delta\Psi$ אל גובה הגוף BT . והבסיס ZK שווה לבסיס $E\Theta$, והבסיס EP שווה לבסיס $N\Pi$; לפיכך כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Delta\Psi$ אל גובה הגוף BT . אך גבהי הגופים BT , $\Delta\Psi$ הם אותם גבהים של הגופים BA , $\Delta\Gamma$; לפיכך כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Delta\Gamma$ אל גובה הגוף AB . לכן במקבילונים AB , $\Gamma\Delta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים.

ושוב, במקבילונים AB , $\Gamma\Delta$ יעמדו הבסיסים ביחס הפוך לגבהים, ויהי כפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$, כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB . אומר אני שהגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$.

לאחר שנעשו אותם מבנים, מאחר שכפי שהבסיס $E\Theta$ אל הבסיס $N\Pi$ כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB , והבסיס $E\Theta$ שווה לבסיס ZK והבסיס $N\Pi$ שווה ל- EP , הרי כפי שהבסיס ZK אל הבסיס EP , כך גובה הגוף $\Gamma\Delta$ אל גובה הגוף AB . וגבהי הגופים AB , $\Gamma\Delta$ הם אותם גבהים של הגופים BT , $\Delta\Psi$; לפיכך כפי שהבסיס ZK אל הבסיס EP , כך גובה הגוף $\Delta\Psi$ אל גובה הגוף BT . לכן במקבילונים BT , $\Delta\Psi$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; לפיכך הגוף BT שווה לגוף $\Delta\Psi$. אך BT שווה ל- BA , שהרי הם על אותו בסיס ZK ובאותו גובה; והגוף $\Delta\Psi$ שווה לגוף $\Delta\Gamma$. לפיכך גם הגוף AB שווה לגוף $\Gamma\Delta$; מש"ל.

אם נתונות שתי זוויות מישוריות שוות, ועל קודקודיהן עומדים קווים ישרים שמעל למישורים, היוצרים בהתאמה זוויות שוות עם הקווים הישרים

המקוריים; ואם נלקחו על הקווים שמעל למישורים נקודות מקריות, ומהן הועברו מאונכים אל המישורים שבהם נמצאות הזוויות המקוריות; ואם מן הנקודות שנוצרו במישורים חוברו קווים ישרים אל קודקודי הזוויות המקוריות — הקווים המחברים יכילו עם הקווים שמעל למישורים זוויות שוות.

יהיו שתי הזוויות הקוויות $BA\Gamma$, EAZ שוות, ומן הנקודות A , Δ יעמדו הקווים AH , ΔM שמעל למישורים, ויכילו בהתאמה זוויות שוות עם הקווים המקוריים: הזווית $M\Delta E$ שווה ל- HAB , והזווית $M\Delta Z$ שווה ל- HAG . על AH , ΔM ילקחו הנקודות המקריות H , M ; מן הנקודות H , M יועברו המאונכים HA , MN אל המישורים העוברים דרך $BA\Gamma$, EAZ ויפגשו אותם בנקודות Λ , N ; ויחוברו ΛA , $N\Delta$. אומר אני שהזווית HAA שווה לזווית MAN .

יונח $A\Theta$ שווה ל- ΔM , ודרך הנקודה Θ יועבר ΘK מקביל ל- HA . והקו HA מאונך למישור העובר דרך $BA\Gamma$; לפיכך גם ΘK מאונך למישור העובר דרך $BA\Gamma$. מן הנקודות K , N יועברו אל הקווים AB , $A\Gamma$, ΔZ , ΔE המאונכים $K\Gamma$, NZ , KB , NE ויחוברו $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . מאחר שריבוע ΘA שווה לסכום ריבועי ΘK , KA ולריבוע KA שווה סכום ריבועי $K\Gamma$, ΓA , הרי ריבוע ΘA שווה לסכום ריבועי ΘK , $K\Gamma$, ΓA אך סכום ריבועי ΘK , $K\Gamma$ שווה לריבוע $\Theta\Gamma$; לכן ריבוע ΘA שווה לסכום ריבועי $\Theta\Gamma$, ΓA . לפיכך הזווית $\Theta\Gamma A$ ישרה. מאותם טעמים גם הזווית ΔZM ישרה; לכן הזווית $A\Gamma\Theta$ שווה לזווית ΔZM . וגם הזווית $\Theta A\Gamma$ שווה לזווית $M\Delta Z$. לפיכך בשני המשולשים $\Theta A\Gamma$, $M\Delta Z$ שתי זוויות שוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע אחת שווה לצלע אחת, והיא זו המשתרעת מול אחת הזוויות השוות, ΘA ל- $M\Delta$; ולכן גם הצלעות הנותרות שוות בהתאמה. לפיכך $A\Gamma$ שווה ל- ΔZ . ובדומה נוכיח שגם AB שווה ל- ΔE . ומאחר ש- $A\Gamma$ שווה ל- ΔZ ו- AB שווה ל- ΔE , שתי הצלעות ΓA , AB שוות לשתי

הצלעות ΔZ , ΔE . וגם הזווית ΓAB שווה לזווית $\angle ZAE$; לפיכך הבסיס ΓB שווה לבסיס EZ , המשולש שווה למשולש והזוויות הנותרות שוות לזוויות הנותרות; לכן הזווית ΓAB שווה לזווית $\angle ZAE$. וגם הזווית הישרה $\angle A\Gamma K$ שווה לזווית הישרה $\angle ZN$; לפיכך הזווית הנותרת $\angle B\Gamma K$ שווה לזווית הנותרת $\angle EZN$. מאותם טעמים גם הזווית ΓBK שווה לזווית $\angle ZEN$. לכן בשני המשולשים ΓBK , EZN שתי זוויות שוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע אחת שווה לצלע אחת, הצלע שבין הזוויות השוות ΓB ל- EZ ; לפיכך גם הצלעות הנותרות שוות בהתאמה, ולכן ΓK שווה ל- ZN . וגם $\angle A\Gamma$ שווה ל- $\angle Z$; לפיכך שתי הצלעות ΓK , ΓA שוות לשתי הצלעות ZN , $\angle Z$, והן כוללות זוויות ישרות; לכן הבסיס AK שווה לבסיס ΔN . ומאחר ש- $A\Theta$ שווה ל- ΔM , גם ריבוע $A\Theta$ שווה לריבוע ΔM . אך לריבוע $A\Theta$ שווה סכום ריבועי AK , $K\Theta$, שהרי הזווית $\angle AK\Theta$ ישרה; ולריבוע ΔM שווה סכום ריבועי ΔN , NM , שהרי הזווית $\angle \Delta NM$ ישרה. לפיכך סכום ריבועי AK , $K\Theta$ שווה לסכום ריבועי ΔN , NM ; ומביניהם ריבוע AK שווה לריבוע ΔN ; לכן הריבוע הנותר $K\Theta$ שווה לריבוע הנותר NM , ולכן ΘK שווה ל- MN . ומאחר ששתי הצלעות ΘA , AK שוות בהתאמה לשתי הצלעות ΔM , ΔN , והבסיס ΘK הוכח שווה לבסיס MN , הרי הזווית $\angle \Theta AK$ שווה לזווית $\angle MAN$.

לפיכך, אם נתונות שתי זוויות מישוריות שוות, וכן שאר דברי הניסוח.

מסקנה

מכאן ברור שאם נתונות שתי זוויות מישוריות שוות, ועליהן עומדים קווים ישרים שווים שמעל למישורים, היוצרים בהתאמה זוויות שוות עם הקווים הישרים המקוריים, המאונכים המועברים מהם אל המישורים שבהם נמצאות הזוויות המקוריות שווים זה לזה; מש"ל.

אם שלושה קווים ישרים נמצאים בפרופורציה, המקבילון הנוצר משלושתם שווה למקבילון הבנוי על האמצעי, שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות לנזכר תחילה.

יהיו שלושת הקווים הישרים A, B, Γ בפרופורציה, כך שכפי ש- A אל B , כך B אל Γ . אומר אני שהגוף הנוצר מן A, B, Γ שווה לגוף הבנוי על B , שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות לנזכר תחילה.

תנוח הזווית המרחבית שב- E , המוכלת בזוויות $\Delta EH, HEZ, ZEA$; כל אחד מן $\Delta E, HE, EZ$ יונח שווה ל- B , וישלם המקבילון EK . יונח ΛM שווה ל- A ; על הקו ΛM ובנקודה Λ שעליו תיבנה הזווית המרחבית המוכלת בזוויות $\Lambda \Delta E, \Lambda \Delta \Gamma$ ושהשווה לזווית המרחבית שב- E ; ויונח $\Lambda \Xi$ שווה ל- B ו- Γ אל B כך B אל Γ , ו- A שווה ל- B , ΛM שווה לכל אחד מן $\Delta E, \Delta \Gamma, \Lambda \Xi$, הרי כפי ש- ΛM אל EZ , כך ΔE אל ΛN . והצלעות סביב הזוויות השוות $\Delta EZ, \Delta E \Gamma$ עומדות ביחס הפוך; לפיכך המקבילית MN שווה למקבילית ΔZ . ומאחר ששתי הזוויות המישוריות הקוויות $\Delta EZ, \Delta E \Gamma$ שוות, ועליהן עומדים הקווים $\Lambda \Xi, EH$ שמעל למישורים, השווים זה לזה ויוצרים בהתאמה זוויות שוות עם הקווים המקוריים, המאונכים המועברים מן הנקודות H, Ξ אל המישורים העוברים דרך $\Delta EZ, \Delta E \Gamma$ שווים זה לזה. לכן הגופים $\Lambda \Theta, EK$ נמצאים באותו גובה. ומקבילונים שעל בסיסים שווים ובאותו גובה שווים זה לזה; לפיכך הגוף $\Theta \Lambda$ שווה לגוף EK . והגוף $\Lambda \Theta$ הוא הגוף הנוצר מן A, B, Γ , ואילו EK הוא הגוף הבנוי על B ; לפיכך המקבילון הנוצר מן A, B, Γ שווה למקבילון הבנוי על B , שהוא שווה-צלעות ושווה-זוויות לנזכר תחילה; מש"ל.

אם ארבעה קווים ישרים נמצאים בפרופורציה, גם המקבילונים הדומים והמונחים באותו אופן הבנויים עליהם יהיו בפרופורציה; ואם המקבילונים הדומים והמונחים באותו אופן הבנויים עליהם נמצאים בפרופורציה, גם הקווים הישרים עצמם יהיו בפרופורציה.

יהיו ארבעת הקווים הישרים AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ בפרופורציה, כך שכפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$; ועל AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ ייבנו המקבילונים הדומים והמונחים באותו אופן KA , $\Lambda\Gamma$, ME , NH . אומר אני שכפי ש- KA אל $\Lambda\Gamma$, כך ME אל NH .

מאחר שהמקבילון KA דומה ל- $\Lambda\Gamma$, יחס KA אל $\Lambda\Gamma$ הוא היחס המשולש של AB אל $\Gamma\Delta$. מאותם טעמים יחס ME אל NH הוא היחס המשולש של EZ אל $H\Theta$. וכפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$; לפיכך גם כפי ש- AK אל $\Lambda\Gamma$, כך ME אל NH .

אך עתה יהי כפי שהגוף AK אל הגוף $\Lambda\Gamma$, כך הגוף ME אל הגוף NH . אומר אני שכפי שהקו הישר AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$.

שהרי שוב יחס KA אל $\Lambda\Gamma$ הוא היחס המשולש של AB אל $\Gamma\Delta$, ויחס ME אל NH הוא היחס המשולש של EZ אל $H\Theta$; וכפי ש- KA אל $\Lambda\Gamma$, כך ME אל NH . לפיכך כפי ש- AB אל $\Gamma\Delta$, כך EZ אל $H\Theta$.

לפיכך, אם ארבעה קווים ישרים נמצאים בפרופורציה, וכן שאר דברי הניסוח; מש"ל.

אם צלעותיהן של פאות נגדיות בקובייה נחצות, ומישורים מועברים דרך נקודות החצייה, החיתוך המשותף של המישורים ואלכסון הקובייה חוצים זה את זה.

בקובייה AZ ייחצו צלעות הפאות הנגדיות ΓZ , $A\Theta$ בנקודות K, Λ, M, N, E ; Π, O, P ; דרך נקודות החצייה יועברו המישורים KN, EP ; יהי חיתוכם המשותף של המישורים YS , ויהי אלכסון הקובייה AZ הקו ΔH . אומר אני ש- YT שווה ל- $T\Sigma$, ו- ΔT שווה ל- TH .

יחוברו $\Delta Y, YE, B\Sigma, \Sigma H$. ומאחר ש- ΔE מקביל ל- OE , הזוויות המתחלפות $\Delta EY, YOE$ שוות זו לזו. ומאחר ש- ΔE שווה ל- OE ו- EY שווה ל- YO , והן כוללות זוויות שוות, הרי הבסיס ΔY שווה ל- YE , המשולש ΔEY שווה למשולש OYE , והזוויות הנותרות שוות בהתאמה; לפיכך הזווית $EY\Delta$ שווה לזווית OYE . משום כך ΔYE הוא קו ישר. מאותם טעמים גם $B\Sigma H$ הוא קו ישר, ו- $B\Sigma$ שווה ל- ΣH . ומאחר ש- ΓA שווה ומקביל ל- ΔB , אך ΓA גם שווה ומקביל ל- EH , הרי גם ΔB שווה ומקביל ל- EH . והקווים הישרים $\Delta E, BH$ מחברים אותם; לפיכך ΔE מקביל ל- BH . לכן הזווית $E\Delta T$ שווה לזווית BHT , שהרי הן מתחלפות; והזווית ΔTY שווה לזווית $HT\Sigma$. לפיכך בשני המשולשים $\Delta TY, HT\Sigma$ שתי זוויות שוות בהתאמה לשתי זוויות וצלע אחת שווה לצלע אחת, והיא זו המשתרעת מול אחת הזוויות השוות, ΔY ל- $H\Sigma$, שהרי הן חצאי $\Delta E, BH$. לכן גם הצלעות הנותרות שוות בהתאמה; לפיכך ΔT שווה ל- TH , ו- YT שווה ל- $T\Sigma$.

לפיכך, אם צלעותיהן של פאות נגדיות בקובייה נחצות, ומישורים מועברים דרך נקודות החצייה, החיתוך המשותף של המישורים ואלכסון הקובייה חוצים זה את זה; מש"ל.

אם שתי מנסרות שוות־גובה, ולאחת בסיס שהוא מקבילית ולאחרת בסיס שהוא משולש, והמקבילית כפולה מן המשולש, המנסרות יהיו שוות.

יהיו שתי המנסרות שוות־הגובה $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K\Lambda MN$; תהי לראשונה המקבילית AZ לבסיס, ולאחרת המשולש $H\Theta K$ לבסיס; ותהי המקבילית AZ כפולה מן המשולש $H\Theta K$. אומר אני שהמנסרה $AB\Gamma\Delta EZ$ שווה למנסרה $H\Theta K\Lambda MN$.

יושלמו הגופים $A\Xi$, HO . מאחר שהמקבילית AZ כפולה מן המשולש $H\Theta K$, וגם המקבילית ΘK כפולה מן המשולש $H\Theta K$, הרי המקבילית AZ שווה למקבילית ΘK . ומקבילונים הנמצאים על בסיסים שווים ובאותו גובה שווים זה לזה; לפיכך הגוף $A\Xi$ שווה לגוף HO . והמנסרה $AB\Gamma\Delta EZ$ היא מחצית הגוף $A\Xi$, והמנסרה $H\Theta K\Lambda MN$ היא מחצית הגוף HO ; לפיכך המנסרה $AB\Gamma\Delta EZ$ שווה למנסרה $H\Theta K\Lambda MN$.

לפיכך, אם שתי מנסרות שוות־גובה, ולאחת בסיס שהוא מקבילית ולאחרת בסיס שהוא משולש, והמקבילית כפולה מן המשולש, המנסרות שוות; מש"ל.

ספר יב

מצולעים דומים החסומים במעגלים מתייחסים זה לזה כריבועים שעל הקטרים.

יהיו המעגלים $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, ובתוכם יהיו המצולעים הדומים $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$; ויהיו קוטרי המעגלים BM , HN . אומר אני שכפי שהריבוע שעל BM אל הריבוע שעל HN , כך המצולע $AB\Gamma\Delta E$ אל המצולע $ZH\Theta K\Lambda$.

יחוברו BE , AM , HA , ZN . ומאחר שהמצולע $AB\Gamma\Delta E$ דומה למצולע $ZH\Theta K\Lambda$, גם הזווית BAE שווה לזווית HZA , וכפי ש־ BA אל AE , כך HZ אל ZA . לפיכך בשני המשולשים BAE , HZA זווית אחת שווה לזווית אחת, BAE ל־ HZA , והצלעות סביב הזוויות השוות פרופורציונליות; לכן המשולש ABE שווה־זוויות למשולש ZHA . לפיכך הזווית AEB שווה לזווית ZAH . אך הזווית AEB שווה לזווית AMB , שהרי הן עומדות על אותה קשת; והזווית ZAH שווה לזווית ZNH . וגם הזווית BAM שווה לזווית הישרה HZN ; לכן גם הזווית הנותרת שווה לזווית הנותרת. לפיכך המשולש ABM שווה־זוויות למשולש ZHN . לכן, בפרופורציה, כפי ש־ BM אל HN , כך BA אל HZ . אך יחס הריבוע שעל BM אל הריבוע שעל HN הוא היחס הכפול של BM אל HN , ויחס המצולע $AB\Gamma\Delta E$ אל המצולע $ZH\Theta K\Lambda$ הוא היחס הכפול של BA אל HZ . לפיכך כפי שהריבוע שעל BM אל הריבוע שעל HN , כך המצולע $AB\Gamma\Delta E$ אל המצולע $ZH\Theta K\Lambda$.

לפיכך מצולעים דומים החסומים במעגלים מתייחסים זה לזה כריבועים שעל הקטרים; מש"ל.

המעגלים מתייחסים זה לזה כריבועים שעל הקטרים.

יהיו המעגלים $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, וקוטריהם BA , $Z\Theta$. אומר אני שכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל $Z\Theta$.

שאם אין המעגל $AB\Gamma\Delta$ מתייחס אל המעגל $EZH\Theta$ כפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל $Z\Theta$, יהיה כפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל $Z\Theta$, כך המעגל $AB\Gamma\Delta$ או אל שטח קטן מן המעגל $EZH\Theta$ או אל שטח גדול ממנו. יהי תחילה אל השטח הקטן Σ . במעגל $EZH\Theta$ ייחסם הריבוע $EZH\Theta$. הריבוע החסום גדול ממחצית המעגל $EZH\Theta$; שהרי אם נעביר דרך הנקודות E, Z, H , Θ משיקים למעגל, הריבוע $EZH\Theta$ הוא מחצית הריבוע החסום את המעגל, והמעגל קטן מן הריבוע החסום; לפיכך הריבוע החסום $EZH\Theta$ גדול ממחצית המעגל $EZH\Theta$. ייחצו הקשתות $\Theta E, H\Theta, ZH, EZ$ בנקודות N, M, Λ, K , ויחברו $\Theta N, M\Theta, HM, \Lambda H, Z\Lambda, EK$. לפיכך כל אחד מן המשולשים $\Theta NE, HM\Theta, Z\Lambda H, EKZ$ גדול ממחצית קטע המעגל המתאים לו; שהרי אם נעביר דרך הנקודות N, M, Λ, K משיקים למעגל ונשלים את המקביליות שעל הקווים הישרים $\Theta E, H\Theta, ZH, EZ$, כל אחד מן המשולשים $\Theta NE, HM\Theta, Z\Lambda H, EKZ$ יהיה מחצית המקבילית המתאימה לו, ואילו קטע המעגל המתאים קטן מן המקבילית; לפיכך כל אחד מן המשולשים $EKZ, \Theta NE, HM\Theta, Z\Lambda H$ גדול ממחצית קטע המעגל המתאים לו. אם נחצה את הקשתות הנותרות, נחבר קווים ישרים ונעשה זאת תמיד, נשאיר קטעי מעגל שסכומם קטן מן העודף שבו המעגל $EZH\Theta$ גדול מן השטח Σ . שהרי הוכח

במשפט הראשון של הספר העשירי, שכאשר נתונים שני גדלים בלתי־שווים, ואם מן הגדול מחסרים יותר ממחציתו, ומן הנותר שוב יותר ממחציתו, ועושים זאת תמיד, יישאר גדול הקטן מן הגדול הקטן הנתון. יישארו אפוא קטעי המעגל EZHΘ שעל EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE העודף שבו המעגל EZHΘ גדול מן השטח Σ. לפיכך המצולע הנותר EKZΛHMΘN גדול מן השטח Σ. ובמעגל ABΓΔ יחסם המצולע AEBOΓΠΔP הדומה למצולע EKZΛHMΘN. לכן כפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל ZΘ, כך המצולע AEBOΓΠΔP אל המצולע EKZΛHMΘN. אך גם כפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל ZΘ, כך המעגל ABΓΔ אל השטח Σ; לפיכך כפי שהמעגל ABΓΔ אל השטח Σ, כך המצולע AEBOΓΠΔP אל המצולע EKZΛHMΘN. ובחילוף, כפי שהמעגל ABΓΔ אל המצולע שבתוכו, כך השטח Σ אל המצולע EKZΛHMΘN. אך המעגל ABΓΔ גדול מן המצולע שבתוכו; לפיכך גם השטח Σ גדול מן המצולע EKZΛHMΘN. אך הוא גם קטן ממנו; וזה בלתי־אפשרי. לכן אין זה שכפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל ZΘ, כך המעגל ABΓΔ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל EZHΘ. ובדומה נוכיח שאין זה שכפי שהריבוע שעל ZΘ אל הריבוע שעל BA, כך המעגל EZHΘ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל ABΓΔ.

אומר אני שגם אין זה שכפי שהריבוע שעל BA אל הריבוע שעל ZΘ, כך המעגל ABΓΔ אל שטח כלשהו הגדול מן המעגל EZHΘ.

שאם אפשר, יהי אל השטח הגדול Σ. בהיפוך אפוא, כפי שהריבוע שעל ZΘ אל הריבוע שעל ΔB, כך השטח Σ אל המעגל ABΓΔ. אך כפי שהשטח Σ אל המעגל ABΓΔ, כך המעגל EZHΘ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל ABΓΔ;

לפיכך כפי שהריבוע שעל $Z\Theta$ אל הריבוע שעל $B\Delta$, כך המעגל $EZH\Theta$ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל $AB\Gamma\Delta$; והוכח שזה בלתי־אפשרי. לכן אין זה שכפי שהריבוע שעל $B\Delta$ אל הריבוע שעל $Z\Theta$, כך המעגל $AB\Gamma\Delta$ אל שטח כלשהו הגדול מן המעגל $EZH\Theta$. והוכח שגם אינו מתייחס אל שטח קטן ממנו; לפיכך כפי שהריבוע שעל $B\Delta$ אל הריבוע שעל $Z\Theta$, כך המעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$.

לפיכך המעגלים מתייחסים זה לזה כריבועים שעל הקטרים; מש"ל.

לְמָה

אומר אני שכאשר השטח Σ גדול מן המעגל $EZH\Theta$, כפי שהשטח Σ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך המעגל $EZH\Theta$ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל $AB\Gamma\Delta$.

ייעשה כפי שהשטח Σ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך המעגל $EZH\Theta$ אל השטח T . אומר אני שהשטח T קטן מן המעגל $AB\Gamma\Delta$. שהרי מאחר שכפי שהשטח Σ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך המעגל $EZH\Theta$ אל השטח T , בחילוף כפי שהשטח Σ אל המעגל $EZH\Theta$, כך המעגל $AB\Gamma\Delta$ אל השטח T . אך השטח Σ גדול מן המעגל $EZH\Theta$; לפיכך גם המעגל $AB\Gamma\Delta$ גדול מן השטח T . לכן כפי שהשטח Σ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך המעגל $EZH\Theta$ אל שטח כלשהו הקטן מן המעגל $AB\Gamma\Delta$; מש"ל.

כל פירמידה שבסיסה משולש נחלקת לשתי פירמידות השוות ודומות זו לזו ולפירמידה השלמה, ושבסיסיהן משולשים, ולשתי מנסרות שוות; ושתי המנסרות גדולות ממחצית הפירמידה השלמה.

תהי פירמידה שבסיסה המשולש $AB\Gamma$ וקודקודה הנקודה Δ . אומר אני שהפירמידה $AB\Gamma\Delta$ נחלקת לשתי פירמידות השוות זו לזו, בעלות בסיסים משולשים ודומות לשלמה, ולשתי מנסרות שוות; ושתי המנסרות גדולות ממחצית הפירמידה השלמה.

יִיחֲצוּ $AB, B\Gamma, \Gamma A, A\Delta, \Delta B, \Delta \Gamma$ בנקודות $E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$ ויחברו ΘE , $EH, H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda\Theta, KZ, ZH$ מאחר ש- AE שווה ל- EB ו- ΘA שווה ל- ΘE , הרי $E\Theta$ מקביל ל- AB . מאותם טעמים גם ΘK מקביל ל- AB . לפיכך ΘEBK הוא מקבילית, ולכן ΘK שווה ל- EB . אך EB שווה ל- EA ; לכן גם AE שווה ל- ΘK . וגם ΘA שווה ל- $\Theta\Delta$; לפיכך שתי הצלעות $EA, A\Theta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Theta\Delta, K\Theta$, והזווית $EA\Theta$ שווה לזווית $K\Theta\Delta$; לכן הבסיס $E\Theta$ שווה לבסיס $K\Delta$. לפיכך המשולש $AE\Theta$ שווה ודומה למשולש $\Theta K\Delta$. מאותם טעמים גם המשולש $A\Theta H$ שווה ודומה למשולש $\Theta\Lambda\Delta$. ומאחר ששני הקווים הישרים $\Theta H, E\Theta$, הנוגעים זה בזה, מקבילים בהתאמה לשני הקווים הישרים $\Delta\Lambda, K\Delta$, הנוגעים זה בזה, ואינם נמצאים באותו מישור, הם יכילו זוויות שוות; לכן הזווית $E\Theta H$ שווה לזווית $K\Delta\Lambda$. ומאחר ששתי הצלעות $\Theta H, E\Theta$ שוות בהתאמה לשתי הצלעות $\Delta\Lambda, K\Delta$, והזווית $E\Theta H$ שווה לזווית $K\Delta\Lambda$, הרי הבסיס EH שווה לבסיס $K\Lambda$; לפיכך המשולש $E\Theta H$ שווה ודומה למשולש $K\Delta\Lambda$. מאותם טעמים גם המשולש AEH שווה ודומה למשולש $\Theta K\Lambda$. לכן הפירמידה שבסיסה המשולש AEH וקודקודה Θ שווה ודומה לפירמידה שבסיסה המשולש $\Theta K\Lambda$ וקודקודה Δ . ומאחר שבמשולש $A\Delta B$ הועבר ΘK במקביל לאחת הצלעות, AB , הרי המשולש $A\Delta B$ שווה-זוויות למשולש $\Delta\Theta K$, וצלעותיהם פרופורציונליות; לפיכך המשולש $A\Delta B$ דומה למשולש $\Delta\Theta K$. מאותם טעמים גם המשולש $\Delta B\Gamma$ דומה למשולש $\Delta K\Lambda$,

והמשולש $A\Delta\Gamma$ דומה למשולש $\Delta\Lambda\Theta$. ומאחר ששני הקווים הישרים BA , $A\Gamma$,
 הנוגעים זה בזה, מקבילים בהתאמה לשני הקווים $K\Theta$, $\Theta\Lambda$, הנוגעים זה בזה,
 ואינם נמצאים באותו מישור, הם יכילו זוויות שוות; לכן הזווית $B\Lambda\Gamma$ שווה
 לזווית $K\Theta\Lambda$. וכפי ש־ BA אל $A\Gamma$, כך $K\Theta$ אל $\Theta\Lambda$; לפיכך המשולש $AB\Gamma$
 דומה למשולש $\Theta K\Lambda$. לכן גם הפירמידה שבסיסה המשולש $AB\Gamma$ וקודקודה Δ
 דומה לפירמידה שבסיסה המשולש $\Theta K\Lambda$ וקודקודה Δ . אך הפירמידה
 שבסיסה המשולש $\Theta K\Lambda$ וקודקודה Δ הוכחה דומה לפירמידה שבסיסה
 המשולש AEH וקודקודה Θ . לפיכך כל אחת מן הפירמידות $\Theta K\Lambda\Delta$, $\Theta K\Lambda\Theta$,
 דומה לפירמידה השלמה $AB\Gamma\Delta$. ומאחר ש־ BZ שווה ל־ $Z\Gamma$, המקבילית
 $EBZH$ כפולה מן המשולש $HZ\Gamma$. ואם שתי מנסרות שוות־גובה, ולאחת בסיס
 שהוא מקבילית ולאחרת בסיס שהוא משולש, והמקבילית כפולה מן המשולש,
 המנסרות שוות; לפיכך המנסרה המוכלת בשני המשולשים $E\Theta H$, BKZ ,
 ובשלוש המקביליות ΘKZH , $EBK\Theta$, $EBZH$ שווה למנסרה המוכלת בשני
 המשולשים $\Theta K\Lambda$, $HZ\Gamma$ ובשלוש המקביליות ΘKZH , $\Lambda\Gamma H\Theta$, $KZ\Gamma\Lambda$. וברור
 שכל אחת משתי המנסרות — זו שבסיסה המקבילית $EBZH$ ופאתה הנגדית
 הקו הישר ΘK , וזו שבסיסה המשולש $HZ\Gamma$ ופאתה הנגדית המשולש $\Theta K\Lambda$
 — גדולה מכל אחת מן הפירמידות שבסיסיהן המשולשים $\Theta K\Lambda$, AEH ,
 וקודקודיהן הנקודות Δ , Θ . שהרי אם נחבר את הקווים EK , EZ , המנסרה
 שבסיסה המקבילית $EBZH$ ופאתה הנגדית הקו ΘK גדולה מן הפירמידה
 שבסיסה המשולש EBZ וקודקודה K . אך הפירמידה שבסיסה המשולש EBZ
 וקודקודה K שווה לפירמידה שבסיסה המשולש AEH וקודקודה Θ , שהרי הן
 מופלות בפאות שוות ודומות. לפיכך גם המנסרה שבסיסה המקבילית $EBZH$
 ופאתה הנגדית הקו ΘK גדולה מן הפירמידה שבסיסה המשולש AEH
 וקודקודה Θ . והמנסרה שבסיסה המקבילית $EBZH$ ופאתה הנגדית הקו ΘK

שווה למנסרה שבסיסה המשולש $HZ\Gamma$ ופאתה הנגדית המשולש ΘKA ; והפירמידה שבסיסה המשולש AEH וקודקודה Θ שווה לפירמידה שבסיסה המשולש ΘKA וקודקודה Δ . לפיכך שתי המנסרות האמורות גדולות משתי הפירמידות האמורות שבסיסיהן המשולשים AEH , ΘKA וקודקודיהן הנקודות Θ , Δ .

לפיכך הפירמידה השלמה שבסיסה המשולש $AB\Gamma$ וקודקודה הנקודה Δ נחלקה לשתי פירמידות השוות זו לזו ולשתי מנסרות שוות, ושתי המנסרות גדולות ממחצית הפירמידה השלמה; מש"ל.

אם יש שתי פירמידות באותו גובה ובעלות בסיסים משולשים, וכל אחת מהן נחלקת לשתי פירמידות השוות זו לזו ודומות לשלמה ולשתי מנסרות שוות, יהיה כפי שבסיס הפירמידה האחת אל בסיס האחרת, כך כל המנסרות שבפירמידה האחת אל כל המנסרות שוות־המספר שבפירמידה האחרת.

יהיו שתי פירמידות באותו גובה, שבסיסיהן המשולשים $AB\Gamma$, ΔEZ וקודקודיהן הנקודות Θ , H ; וכל אחת מהן תיחלק לשתי פירמידות השוות זו לזו ודומות לשלמה ולשתי מנסרות שוות. אומר אני שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך כל המנסרות שבפירמידה $AB\Gamma H$ אל המנסרות שוות־המספר שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$.

מאחר ש־ BE שווה ל־ $E\Gamma$ ו־ AE שווה ל־ $\Lambda\Gamma$, הרי ΛE מקביל ל־ AB והמשולש $AB\Gamma$ דומה למשולש $\Lambda E\Gamma$. מאותם טעמים גם המשולש ΔEZ דומה למשולש $P\Phi Z$. ומאחר ש־ $B\Gamma$ כפול מ־ $E\Gamma$ ו־ EZ כפול מ־ $Z\Phi$, כפי ש־ $B\Gamma$ אל $E\Gamma$ כך EZ אל $Z\Phi$. ועל $E\Gamma$, $B\Gamma$ נבנו הצורות הקוויות הדומות והמונחות באותו אופן $AB\Gamma$, $\Lambda E\Gamma$, ועל EZ , $Z\Phi$ נבנו הדומות והמונחות באותו אופן ΔEZ , $P\Phi Z$;

לפיכך כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $\Delta E\Gamma$, כך המשולש $\Delta E\Gamma$ אל המשולש $P\Phi Z$. ובחילוף, כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל $\Delta E\Gamma$, כך $\Delta E\Gamma$ אל המשולש $P\Phi Z$. אך כפי שהמשולש $\Delta E\Gamma$ אל המשולש $P\Phi Z$, כך המנסרה שבסיסה המשולש $\Delta E\Gamma$ ופאתה הנגדית OMN אל המנסרה שבסיסה המשולש $P\Phi Z$ ופאתה הנגדית ΣTY . לפיכך כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש $\Delta E\Gamma$, כך המנסרה שבסיסה המשולש $\Delta E\Gamma$ ופאתה הנגדית OMN אל המנסרה שבסיסה המשולש $P\Phi Z$ ופאתה הנגדית ΣTY . וכפי שהמנסרות האמורות זו אל זו, כך המנסרה שבסיסה המקבילית $KB\epsilon\Lambda$ ופאתה הנגדית OM אל המנסרה שבסיסה המקבילית $\Pi\epsilon\Phi P$ ופאתה הנגדית ΣT . לפיכך גם שתי המנסרות — זו שבסיסה המקבילית $KB\epsilon\Lambda$ ופאתה הנגדית OM , וזו שבסיסה $\Delta E\Gamma$ ופאתה הנגדית OMN — מתייחסות לשתי המנסרות — זו שבסיסה $\Pi\epsilon\Phi P$ ופאתה הנגדית ΣT , וזו שבסיסה המשולש $P\Phi Z$ ופאתה הנגדית ΣTY — באותו יחס. לכן כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס $\Delta E\Gamma$, כך שתי המנסרות האמורות אל שתי המנסרות האמורות.

ובדומה, אם הפירמידות $\Sigma TY\theta$, $OMNH$ ייחלקו לשתי מנסרות ולשתי פירמידות, יהיה כפי שהבסיס OMN אל הבסיס ΣTY , כך שתי המנסרות שבפירמידה $OMNH$ אל שתי המנסרות שבפירמידה $\Sigma TY\theta$. אך כפי שהבסיס OMN אל הבסיס ΣTY , כך הבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס $\Delta E\Gamma$, שהרי כל אחד מן המשולשים ΣTY , OMN שווה בהתאמה לכל אחד מן $\Delta E\Gamma$, $P\Phi Z$. לפיכך כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס $\Delta E\Gamma$, כך ארבע המנסרות אל ארבע המנסרות. ובדומה, גם אם נחלק את הפירמידות הנותרות לשתי פירמידות ולשתי מנסרות, יהיה כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס $\Delta E\Gamma$, כך כל המנסרות

שבפירמידה $AB\Gamma H$ אל כל המנסרות שוות־המספר שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$; מש"ל.

לָמָּה

ואת הדבר שכפי שהמשולש $\Lambda E\Gamma$ אל המשולש $P\Phi Z$ כך המנסרה שבסיסה המשולש $\Lambda E\Gamma$ ופאתה הנגדית OMN אל המנסרה שבסיסה $P\Phi Z$ ופאתה הנגדית ΣTY , יש להוכיח כך.

באותו שרטוט ייחשבו מאונכים מן Θ , H אל המישורים ΔEZ , $AB\Gamma$; והם כמובן שווים, מפני שהפירמידות הונחו שוות־גובה. ומאחר ששני הקווים הישרים $H\Gamma$ והמאונך מ־ H נחתכים על ידי המישורים המקבילים $AB\Gamma$, OMN , הם ייחלקו באותם יחסים. והקו $H\Gamma$ נחצה על ידי המישור OMN בנקודה N ; לפיכך גם המאונך מ־ H אל המישור $AB\Gamma$ ייחצה על ידי המישור OMN . מאותם טעמים גם המאונך מ־ Θ אל המישור ΔEZ ייחצה על ידי המישור ΣTY . והמאונכים מן Θ , H אל המישורים ΔEZ , $AB\Gamma$ שווים; לפיכך גם המאונכים מן המשולשים ΣTY , OMN אל המישורים ΔEZ , $AB\Gamma$ שווים. לכן המנסרות שבסיסיהן המשולשים $\Lambda E\Gamma$, $P\Phi Z$ ופאותיהן הנגדיות OMN , ΣTY שוות־גובה. לפיכך גם המקבילונים המושלמים מן המנסרות האמורות שווי־גובה ומתייחסים זה לזה כבסיסיהם; ולכן גם חצאיהם מתייחסים כך: כפי שהבסיס $\Lambda E\Gamma$ אל הבסיס $P\Phi Z$, כך המנסרות האמורות זו אל זו; מש"ל.

פירמידות הנמצאות באותו גובה ושבסיסיהן משולשים מתייחסות זו לזו כבסיסיהן.

יהיו פירמידות באותו גובה, שבסיסיהן המשולשים $AB\Gamma$, ΔEZ וקודקודיהן הנקודות H , Θ . אומר אני שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$.

שאם אין זה שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$, יהיה כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ או אל גוף קטן מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ או אל גוף גדול ממנה. יהי תחילה אל הגוף הקטן X . הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ תיחלק לשתי פירמידות השוות זו לזו ודומות לשלמה ולשתי מנסרות שוות; ושתי המנסרות גדולות ממחצית הפירמידה השלמה. ושוב ייחלקו באותו אופן הפירמידות שנוצרו מן החלוקה, והדבר ייעשה תמיד, עד שיישארו מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ פירמידות שסכומן קטן מן העודף שבו הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ גדולה מן הגוף X . יישארו אפוא, ולשם הדוגמה תהיינה $\Delta\Pi\P\Sigma$, $\Sigma TY\Theta$; לפיכך המנסרות הנותרות בפירמידה $\Delta EZ\Theta$ גדולות מן הגוף X . גם הפירמידה $AB\Gamma H$ תיחלק באותו אופן ובאותו מספר של חלקים כמו הפירמידה $\Delta EZ\Theta$. לכן כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך המנסרות שבפירמידה $AB\Gamma H$ אל המנסרות שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$. אך גם כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הגוף X ; לפיכך כפי שהפירמידה $AB\Gamma H$ אל הגוף X , כך המנסרות שבפירמידה $AB\Gamma H$ אל המנסרות שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$. ובחילוף, כפי שהפירמידה $AB\Gamma H$ אל המנסרות שבתוכה, כך הגוף X אל המנסרות שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$. אך הפירמידה $AB\Gamma H$ גדולה מן המנסרות שבתוכה; לפיכך גם הגוף X גדול מן המנסרות שבפירמידה $\Delta EZ\Theta$. אך הוא גם קטן מהן; וזה בלתי־אפשרי. לכן אין זה שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל גוף כלשהו הקטן מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$. ובדומה יוכח שאין זה שכפי שהבסיס

ΔEZ אל הבסיס $AB\Gamma$, כך הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן הפירמידה $AB\Gamma H$.

אומר אני שגם אין זה שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל גוף כלשהו הגדול מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$.

שאם אפשר, יהי אל הגוף הגדול X . בהיפוך אפוא, כפי שהבסיס ΔEZ אל הבסיס $AB\Gamma$, כך הגוף X אל הפירמידה $AB\Gamma H$. אך כפי שהגוף X אל הפירמידה $AB\Gamma H$, כך הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן הפירמידה $AB\Gamma H$, כפי שהוכח קודם; לפיכך כפי שהבסיס ΔEZ אל הבסיס $AB\Gamma$, כך הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן הפירמידה $AB\Gamma H$; והוכח שזה אבסורד. לכן אין זה שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל גוף כלשהו הגדול מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$. והוכח שגם אינה מתייחסת כך אל גוף קטן ממנה. לפיכך כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$; מש"ל.

פירמידות הנמצאות באותו גובה ושבסיסיהן מצולעים מתייחסות זו לזו כבסיסיהן.

יהיו פירמידות באותו גובה, שבסיסיהן המצולעים $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ וקודקודיהן הנקודות M , N . אומר אני שכפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta E$ אל הבסיס $ZH\Theta K\Lambda$, כך הפירמידה $AB\Gamma\Delta EM$ אל הפירמידה $ZH\Theta K\Lambda N$.

יחוברו $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$, $Z\Theta$, ZK . מאחר ששתי הפירמידות $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ בעלות בסיסים משולשים וגובה שווה, הן מתייחסות זו לזו כבסיסיהן; לפיכך כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס $A\Gamma\Delta$, כך הפירמידה $AB\Gamma M$ אל הפירמידה $A\Gamma\Delta M$.

$\Lambda\Gamma\Delta\text{M}$. ובהרכבה, כפי שהבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta$ אל הבסיס $\Lambda\Gamma\Delta$, כך הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{M}$ אל הפירמידה $\Lambda\Gamma\Delta\text{M}$. אך גם כפי שהבסיס $\Lambda\Gamma\Delta$ אל הבסיס $\Lambda\Delta\text{E}$, כך הפירמידה $\Lambda\Gamma\Delta\text{M}$ אל הפירמידה $\Lambda\Delta\text{EM}$. לפיכך, בשוויון, כפי שהבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta$ אל הבסיס $\Lambda\Delta\text{E}$, כך הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{M}$ אל הפירמידה $\Lambda\Delta\text{EM}$. ושוב בהרכבה, כפי שהבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}$ אל הבסיס $\Lambda\Delta\text{E}$, כך הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{EM}$ אל הפירמידה $\Lambda\Delta\text{EM}$. ובדומה יוכח שכפי שהבסיס $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda$ אל הבסיס $\text{ZH}\Theta$, כך הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda\text{N}$ אל הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{N}$. ומאחר ששתי הפירמידות $\Lambda\Delta\text{EM}$, $\text{ZH}\Theta\text{N}$ בעלות בסיסים משולשים וגובה שווה, כפי שהבסיס $\Lambda\Delta\text{E}$ אל הבסיס $\text{ZH}\Theta$, כך הפירמידה $\Lambda\Delta\text{EM}$ אל הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{N}$. אך כפי שהבסיס $\Lambda\Delta\text{E}$ אל הבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}$, כך הפירמידה $\Lambda\Delta\text{EM}$ אל הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{EM}$. לפיכך, בשוויון, כפי שהבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}$ אל הבסיס $\text{ZH}\Theta$, כך הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{EM}$ אל הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{N}$. ומנגד, כפי שהבסיס $\text{ZH}\Theta$ אל הבסיס $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda$, כך הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{N}$ אל הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda\text{N}$. לכן, בשוויון, כפי שהבסיס $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}$ אל הבסיס $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda$, כך הפירמידה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{EM}$ אל הפירמידה $\text{ZH}\Theta\text{K}\Lambda\text{N}$; מש"ל.

כל מנסרה שבסיסה משולש נחלקת לשלוש פירמידות השוות זו לזו ושבסיסיהן משולשים.

תהי מנסרה שבסיסה המשולש $\text{AB}\Gamma$ ופאתה הנגדית $\Delta\text{E}\text{Z}$. אומר אני שהמנסרה $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}\text{Z}$ נחלקת לשלוש פירמידות השוות זו לזו ושבסיסיהן משולשים.

יחברו BA , $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$. מאחר ש־ $\text{ABE}\Delta$ היא מקבילית ו־ BA אלכסונה, המשולש ABA שווה למשולש EBA . לפיכך הפירמידה שבסיסה המשולש ABA

וקודקודה Γ שווה לפירמידה שבסיסה המשולש ΔEB וקודקודה Γ . אך הפירמידה שבסיסה המשולש ΔEB וקודקודה Γ היא אותה פירמידה שבסיסה המשולש $EB\Gamma$ וקודקודה Δ , שהרי הן מופלות באותם מישורים. לפיכך הפירמידה שבסיסה המשולש $ABA\Delta$ וקודקודה Γ שווה לפירמידה שבסיסה המשולש $EB\Gamma$ וקודקודה Δ . ושוב, מאחר ש- $Z\Gamma BE^{-}$ היא מקבילית ו- ΓE^{-} אלכסונה, המשולש ΓEZ שווה למשולש ΓBE . לפיכך הפירמידה שבסיסה המשולש $B\Gamma E$ וקודקודה Δ שווה לפירמידה שבסיסה המשולש EFZ וקודקודה Δ . אך הפירמידה שבסיסה המשולש $B\Gamma E$ וקודקודה Δ הוכחה שווה לפירמידה שבסיסה המשולש $ABA\Delta$ וקודקודה Γ ; לפיכך גם הפירמידה שבסיסה המשולש ΓEZ וקודקודה Δ שווה לפירמידה שבסיסה המשולש $ABA\Delta$ וקודקודה Γ . לכן המנסרה $AB\Gamma\Delta EZ$ נחלקה לשלוש פירמידות השוות זו לזו ושבסיסיהן משולשים.

ומאחר שהפירמידה שבסיסה המשולש $ABA\Delta$ וקודקודה Γ היא אותה פירמידה שבסיסה המשולש ΓAB וקודקודה Δ , שהרי הן מופלות באותם מישורים; והפירמידה שבסיסה המשולש $ABA\Delta$ וקודקודה Γ הוכחה שליש מן המנסרה שבסיסה המשולש $AB\Gamma$ ופאתה הנגדית ΔEZ ; לפיכך גם הפירמידה שבסיסה המשולש $AB\Gamma$ וקודקודה Δ היא שליש מן המנסרה שלה אותו בסיס, המשולש $AB\Gamma$, ופאתה הנגדית ΔEZ .

מסקנה

מכאן ברור שכל פירמידה היא שליש מן המנסרה שלה אותו בסיס וגובה שווה; מש"ל.

פירמידות דומות שבסיסיהן משולשים מתייחסות זו לזו ביחס המשולש של צלעותיהן המתאימות.

יהיו פירמידות דומות ומונחות באותו אופן, שבסיסיהן המשולשים $AB\Gamma$, ΔEZ וקודקודיהן הנקודות H , Θ . אומר אני שיחס הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ .

יושלמו המקבילונים $BHMA$, $E\Theta PO$. ומאחר שהפירמידה $AB\Gamma H$ דומה לפירמידה $\Delta EZ\Theta$, הזווית $AB\Gamma$ שווה לזווית ΔEZ , הזווית $H B\Gamma$ שווה לזווית ΘEZ , והזווית ABH שווה לזווית $\Delta E\Theta$; וכפי ש- AB אל ΔE , כך $B\Gamma$ אל EZ וכך BH אל $E\Theta$. ומאחר שכפי ש- AB אל ΔE כך $B\Gamma$ אל EZ , והצלעות סביב הזוויות השוות פרופורציונליות, הרי המקבילית BM דומה למקבילית $E\Pi$. מאותם טעמים גם BN דומה ל- EP , ו- BK דומה ל- $E\Xi$. לפיכך שלוש הפאות MB , BK , BN דומות לשלוש הפאות EP , $E\Xi$, $E\Pi$. אך שלוש הפאות MB , BK , BN שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן, ושלוש הפאות EP , $E\Xi$, $E\Pi$ שוות ודומות לשלוש הנגדיות להן. לכן הגופים $BHMA$, $E\Theta PO$ מוכלים במספר שווה של פאות דומות; לפיכך הגוף $BHMA$ דומה לגוף $E\Theta PO$. ומקבילונים דומים מתייחסים ביחס המשולש של צלעותיהם המתאימות; לכן יחס הגוף $BHMA$ אל הגוף $E\Theta PO$ הוא היחס המשולש של הצלע המתאימה $B\Gamma$ אל הצלע המתאימה EZ . וכפי שהגוף $BHMA$ אל הגוף $E\Theta PO$, כך הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$, מפני שהפירמידה היא החלק השישי של הגוף: המנסרה היא מחצית המקבילון וגדולה פי שלושה מן הפירמידה. לפיכך יחס הפירמידה $AB\Gamma H$ אל הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ ; מש"ל.

מכאן ברור שגם פירמידות דומות שבסיסיהן מצולעים מתייחסות זו לזו ביחס המשולש של צלעותיהן המתאימות. שהרי אם מחלקים אותן לפירמידות שבתוכן שבסיסיהן משולשים, מפני שגם המצולעים הדומים שבבסיסים נחלקים למשולשים דומים, שווים במספרם ומתאימים לשלמים, יהיה כפי שפירמידה אחת בעלת בסיס משולש שבאחת אל פירמידה אחת בעלת בסיס משולש שבאחרת, כך כל הפירמידות בעלות הבסיסים המשולשים שבפירמידה האחת אל הפירמידות בעלות הבסיסים המשולשים שבאחרת; כלומר, הפירמידה עצמה שבסיסה מצולע אל הפירמידה שבסיסה מצולע. אך פירמידה בעלת בסיס משולש מתייחסת לאחרת ביחס המשולש של הצלעות המתאימות; לפיכך גם יחס הפירמידה בעלת הבסיס המצולע אל הדומה לה הוא היחס המשולש של צלע אל צלע.

בפירמידות שוות שבסיסיהן משולשים הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; ופירמידות בעלות בסיסים משולשים שבסיסיהן עומדים ביחס הפוך לגביהיהן שוות.

יהיו פירמידות שוות שבסיסיהן המשולשים $AB\Gamma$, ΔEZ וקודקודיהן הנקודות H , Θ . אומר אני שבפירמידות $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים, ושכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גובה הפירמידה $AB\Gamma H$.

יושלמו המקבילונים $BHMA$, $E\Theta PO$. ומאחר שהפירמידה $AB\Gamma H$ שווה לפירמידה $\Delta EZ\Theta$, והגוף $BHMA$ גדול פי שישה מן הפירמידה $AB\Gamma H$ והגוף $E\Theta PO$ גדול פי שישה מן הפירמידה $\Delta EZ\Theta$, הרי הגוף $BHMA$ שווה לגוף

$E\Theta\text{ΠO}$. ובמקבילונים שווים הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; לפיכך כפי שהבסיס BM אל הבסיס $E\text{Π}$, כך גובה הגוף $E\Theta\text{ΠO}$ אל גובה הגוף $BHMA$. אך כפי שהבסיס BM אל $E\text{Π}$, כך המשולש $AB\Gamma$ אל המשולש ΔEZ . לפיכך כפי שהמשולש $AB\Gamma$ אל המשולש ΔEZ , כך גובה הגוף $E\Theta\text{ΠO}$ אל גובה הגוף $BHMA$. וגובה הגוף $E\Theta\text{ΠO}$ זהה לגובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$, וגובה הגוף $BHMA$ זהה לגובה הפירמידה $AB\Gamma H$; לכן כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גובה הפירמידה $AB\Gamma H$. לפיכך בפירמידות $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים.

אך עתה יעמדו בסיסי הפירמידות $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ ביחס הפוך לגבהים, ויהי כפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ , כך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גובה הפירמידה $AB\Gamma H$. אומר אני שהפירמידה $AB\Gamma H$ שווה לפירמידה $\Delta EZ\Theta$.

לאחר שנעשו אותם מבנים, מאחר שכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ כך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גובה הפירמידה $AB\Gamma H$, וכפי שהבסיס $AB\Gamma$ אל הבסיס ΔEZ כך המקבילית BM אל המקבילית $E\text{Π}$, הרי כפי שהמקבילית BM אל המקבילית $E\text{Π}$, כך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ אל גובה הפירמידה $AB\Gamma H$. אך גובה הפירמידה $\Delta EZ\Theta$ זהה לגובה המקבילון $E\Theta\text{ΠO}$, וגובה הפירמידה $AB\Gamma H$ זהה לגובה המקבילון $BHMA$; לפיכך כפי שהבסיס BM אל הבסיס $E\text{Π}$, כך גובה המקבילון $E\Theta\text{ΠO}$ אל גובה המקבילון $BHMA$. ומקבילונים שבסיסיהם עומדים ביחס הפוך לגבהיהם שווים; לפיכך המקבילון $BHMA$ שווה למקבילון $E\Theta\text{ΠO}$. והפירמידה $AB\Gamma H$ היא שישית מן $BHMA$, והפירמידה $\Delta EZ\Theta$ היא שישית מן המקבילון $E\Theta\text{ΠO}$; לפיכך הפירמידה $AB\Gamma H$ שווה לפירמידה $\Delta EZ\Theta$.

לפיכך בפירמידות שוות שבסיסיהן משולשים הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; ופירמידות בעלות בסיסים משולשים שבסיסיהן עומדים ביחס הפוך לגבהיהן שוות; מש"ל.

כל חרוט הוא שליש מן הגליל שיש לו אותו בסיס וגובה שווה.

יהיו לחרוט ולגליל אותו בסיס, המעגל $AB\Gamma\Delta$, וגובה שווה. אומר אני שהחרוט הוא שליש מן הגליל; כלומר, שהגליל גדול פי שלושה מן החרוט.

שאם הגליל אינו גדול פי שלושה מן החרוט, הוא יהיה גדול מפי שלושה או קטן מפי שלושה. יהי תחילה גדול מפי שלושה. במעגל $AB\Gamma\Delta$ ייחסם הריבוע $AB\Gamma\Delta$; והריבוע $AB\Gamma\Delta$ גדול ממחצית המעגל $AB\Gamma\Delta$. ועל הריבוע $AB\Gamma\Delta$ תועמד מנסרה שוות־גובה לגליל. המנסרה המועמדת גדולה ממחצית הגליל; שהרי אם נחסום ריבוע סביב המעגל $AB\Gamma\Delta$, הריבוע החסום בתוך המעגל $AB\Gamma\Delta$ הוא מחצית הריבוע החסום; והמקבילונים, כלומר המנסרות, המועמדים עליהם שווי־גובה. ומקבילונים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסיהם; לפיכך המנסרה המועמדת על הריבוע $AB\Gamma\Delta$ היא מחצית המנסרה המועמדת על הריבוע החסום את המעגל $AB\Gamma\Delta$. והגליל קטן מן המנסרה המועמדת על הריבוע החסום את המעגל $AB\Gamma\Delta$; לכן המנסרה המועמדת על הריבוע $AB\Gamma\Delta$ ושוות־הגובה לגליל גדולה ממחצית הגליל. ייחצו הקשתות $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ בנקודות E, Z, H, Θ , ויחוברו $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta, \Theta A$. לפיכך כל אחד מן המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ גדול ממחצית קטע המעגל המתאים לו, כפי שהוכחנו קודם. על כל אחד מן המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ תועמד מנסרה שוות־גובה לגליל; וכל אחת מן המנסרות המועמדות גדולה ממחצית החלק המתאים לה בגליל. שהרי

אם דרך הנקודות E, Z, H, Θ נעביר קווים מקבילים ל- $AB, BF, \Gamma\Delta, \Delta A$, נשלים את המקבילות שעל הקווים $AB, BF, \Gamma\Delta, \Delta A$, ועליהן נעמיד מקבילונים שווֹי־גובה לגליל, המנסרות שעל המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ הן חצאי המקבילונים המועמדים המתאימים; וחלקי הגליל קטנים מן המקבילונים המועמדים. לכן גם המנסרות שעל המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ גדולות ממחצית חלקי הגליל המתאימים להן. אם נחצה את הקשתות הנותרות, נחבר קווים ישרים, נעמיד על כל משולש מנסרה שוות־גובה לגליל ונעשה זאת תמיד, נשאיר חלקים מן הגליל שסכומם קטן מן העודף שבו הגליל גדול מפי שלושה מן החרוט. יישארו אפוא, ויהיו אלה שעל $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta, \Theta A$. לפיכך המנסרה הנותרת, שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וגובהה שווה לגובה הגליל, גדולה מפי שלושה מן החרוט. אך המנסרה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וגובהה שווה לגובה הגליל גדולה פי שלושה מן הפירמידה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וקודקודה זהה לקודקוד החרוט; לפיכך הפירמידה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וקודקודה זהה לקודקוד החרוט גדולה מן החרוט שבסיסו המעגל $AB\Gamma\Delta$. אך היא גם קטנה ממנו, שהרי היא מוכלת בתוכו; וזה בלתי־אפשרי. לכן הגליל אינו גדול מפי שלושה מן החרוט.

אומר אני שגם הגליל אינו קטן מפי שלושה מן החרוט.

שאם אפשר, יהי הגליל קטן מפי שלושה מן החרוט; בהיפוך אפוא, החרוט גדול משליש הגליל. במעגל $AB\Gamma\Delta$ ייחסם הריבוע $AB\Gamma\Delta$; לפיכך הריבוע $AB\Gamma\Delta$ גדול ממחצית המעגל $AB\Gamma\Delta$. ועל הריבוע $AB\Gamma\Delta$ תועמד פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט; לכן הפירמידה המועמדת גדולה ממחצית החרוט. שהרי כפי שהוכחנו קודם, אם נחסום ריבוע סביב המעגל, יהיה

הריבוע $AB\Gamma\Delta$ מחצית הריבוע החוסם את המעגל; ואם נעמיד על הריבועים מקבילונים שווי־גובה לחרוט, הנקראים גם מנסרות, יהיה המקבילון המועמד על הריבוע $AB\Gamma\Delta$ מחצית המקבילון המועמד על הריבוע החוסם את המעגל, מפני שהם מתייחסים זה לזה כבסיסים. לכן גם שלישיהם עומדים באותו יחס; לפיכך הפירמידה שבסיסה הריבוע $AB\Gamma\Delta$ היא מחצית הפירמידה המועמדת על הריבוע החוסם את המעגל. והפירמידה המועמדת על הריבוע החוסם את המעגל גדולה מן החרוט, שהרי היא מכילה אותו. לכן הפירמידה שבסיסה הריבוע $AB\Gamma\Delta$ וקודקודה זהה לקודקוד החרוט גדולה ממחצית החרוט. ייחצו הקשתות $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ בנקודות E, Z, H, Θ , ויחברו $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta, \Theta A$. לפיכך כל אחד מן המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ גדול ממחצית קטע המעגל המתאים לו. ועל כל אחד מן המשולשים $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ תועמד פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט; וכל אחת מן הפירמידות המועמדות גדולה, באותו אופן, ממחצית חלק החרוט המתאים לה. אם נחצה את הקשתות הנותרות, נחבר קווים ישרים, נעמיד על כל משולש פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט ונעשה זאת תמיד, נשאיר חלקים מן החרוט שסכומם קטן מן העודף שבו החרוט גדול משליש הגליל. יישארו אפוא, ויהיו אלה שעל $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta, \Theta A$. לפיכך הפירמידה הנותרת, שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וקודקודה זהה לקודקוד החרוט, גדולה משליש הגליל. אך הפירמידה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וקודקודה זהה לקודקוד החרוט היא שליש מן המנסרה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וגובהה שווה לגובה הגליל; לפיכך המנסרה שבסיסה המצולע $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ וגובהה שווה לגובה הגליל גדולה מן הגליל שבסיסו המעגל $AB\Gamma\Delta$. אך היא גם קטנה ממנו, שהרי היא מוכלת בתוכו; וזה בלתי־אפשרי. לכן הגליל אינו קטן מפי שלושה מן

החרוט. והוכח שגם אינו גדול מפי שלושה; לפיכך הגליל גדול פי שלושה מן החרוט, ולכן החרוט הוא שליש מן הגליל.

לפיכך כל חרוט הוא שליש מן הגליל שיש לו אותו בסיס וגובה שווה; מש"ל.

חרוטים וגלילים הנמצאים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסיהם.

יהיו חרוטים וגלילים באותו גובה, שבסיסיהם המעגלים $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, ציריהם $K\Lambda$, MN , וקוטרי בסיסיהם AF , EH . אומר אני שכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל החרוט EN .

שאם לא, יהיה כפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA או אל גוף קטן מן החרוט EN או אל גוף גדול ממנו. יהי תחילה אל הגוף הקטן E ; ויהי הגוף Ψ שווה לעודף שבו הגוף E קטן מן החרוט EN . לפיכך החרוט EN שווה לשני הגופים Ψ , E . במעגל $EZH\Theta$ ייחסם הריבוע $EZH\Theta$; לכן הריבוע גדול ממחצית המעגל. על הריבוע $EZH\Theta$ תועמד פירמידה שוות־גובה לחרוט; לפיכך הפירמידה המועמדת גדולה ממחצית החרוט, שהרי אם נחסום ריבוע סביב המעגל ונעמיד עליו פירמידה שוות־גובה לחרוט, הפירמידה החסומה היא מחצית הפירמידה החוסמת, מפני שהן מתייחסות זו לזו כבסיסיהן; ואילו החרוט קטן מן הפירמידה החוסמת. ייחצו הקשתות EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE בנקודות O , Π , P , Σ , ויחברו OE , EP , ΠZ , ZP , PH , $H\Sigma$, $\Sigma\Theta$. לפיכך כל אחד מן המשולשים ΘOE , EPZ , ZPH , $H\Sigma\Theta$ גדול ממחצית קטע המעגל המתאים לו. על כל אחד מן המשולשים ΘOE , EPZ , ZPH , $H\Sigma\Theta$ תועמד פירמידה שוות־גובה לחרוט; ולפיכך כל אחת מן הפירמידות המועמדות גדולה ממחצית חלק החרוט המתאים לה. אם נחצה את הקשתות הנותרות, נחבר קווים ישרים, נעמיד על כל משולש פירמידה שוות־גובה לחרוט ונעשה זאת

תמיד, נשאיר חלקים מן החרוט שסכומם קטן מן הגוף Ψ . יישארו אפוא, ויהיו אלה שעל $\Theta OE, EPZ, ZPH, H\Theta$; לכן הפירמידה הנוותרת, שבסיסה המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$ וגובהה שווה לגובה החרוט, גדולה מן הגוף Ξ . ובמעגל $AB\Gamma\Delta$ יחסם המצולע $\Delta TAYB\Phi GX$, הדומה למצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$ ומונח באותו אופן, ועליו תועמד פירמידה שוות־גובה לחרוט AA . ומאחר שכפי שהריבוע שעל AG אל הריבוע שעל EH , כך המצולע $\Delta TAYB\Phi GX$ אל המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$; וכפי שהריבוע שעל AG אל הריבוע שעל EH , כך המעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$; לפיכך כפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך המצולע $\Delta TAYB\Phi GX$ אל המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$. וכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל הגוף Ξ ; וכפי שהמצולע $\Delta TAYB\Phi GX$ אל המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$, כך הפירמידה שבסיסה המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$ וקודקודה Λ אל הפירמידה שבסיסה המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$ וקודקודה N . לפיכך כפי שהחרוט AA אל הגוף Ξ , כך הפירמידה שבסיסה המצולע $\Delta TAYB\Phi GX$ וקודקודה Λ אל הפירמידה שבסיסה המצולע $\Theta OE\pi ZPH\varsigma$ וקודקודה N . ובחילוף, כפי שהחרוט AA אל הפירמידה שבתוכו, כך הגוף Ξ אל הפירמידה שבתוך החרוט EN . אך החרוט AA גדול מן הפירמידה שבתוכו; לפיכך גם הגוף Ξ גדול מן הפירמידה שבתוך החרוט EN . אך הוא גם קטן ממנה; וזה אבסורד. לכן אין זה שכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט EN . ובדומה נוכיח שאין זה שכפי שהמעגל $EZH\Theta$ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך החרוט EN אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט AA .

אומר אני שגם אין זה שכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל גוף כלשהו הגדול מן החרוט EN .

שאם אפשר, יהי אל הגוף הגדול Ξ . בהיפוך אפוא, כפי שהמעגל $EZH\Theta$ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך הגוף Ξ אל החרוט AA . אך כפי שהגוף Ξ אל החרוט AA , כך החרוט EN אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט AA ; לפיכך כפי שהמעגל $EZH\Theta$ אל המעגל $AB\Gamma\Delta$, כך החרוט EN אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט AA ; והוכח שזה בלתי־אפשרי. לכן אין זה שכפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל גוף כלשהו הגדול מן החרוט EN . והוכח שגם אינו מתייחס כך אל גוף קטן ממנו; לפיכך כפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך החרוט AA אל החרוט EN .

וכפי שהחרוט אל החרוט, כך הגליל אל הגליל, שהרי כל גליל גדול פי שלושה מן החרוט המתאים לו. לפיכך כפי שהמעגל $AB\Gamma\Delta$ אל המעגל $EZH\Theta$, כך הגלילים שווי־הגובה שעליהם.

לפיכך חרוטים וגלילים הנמצאים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסיהם; מש"ל.

חרוטים וגלילים דומים מתייחסים זה לזה ביחס המשולש של קוטרי בסיסיהם.

יהיו חרוטים וגלילים דומים, שבבסיסיהם המעגלים $EZH\Theta$, $AB\Gamma\Delta$, קוטרי בסיסיהם BA , $Z\Theta$, וצירי החרוטים והגלילים KA , MN . אומר אני שיחס החרוט שבבסיסו המעגל $AB\Gamma\Delta$ וקודקודו הנקודה A אל החרוט שבבסיסו המעגל $EZH\Theta$ וקודקודו הנקודה N הוא היחס המשולש של BA אל $Z\Theta$.

שאם יחס החרוט $AB\Gamma\Delta A$ אל החרוט $EZH\Theta N$ אינו היחס המשולש של BA אל $Z\Theta$, יהיה יחס החרוט $AB\Gamma\Delta A$ אל גוף קטן מן החרוט $EZH\Theta N$ או אל גוף גדול ממנו היחס המשולש הזה. יהי תחילה אל הגוף הקטן Ξ . במעגל $EZH\Theta$

ייחסם הריבוע EZHΘ; לפיכך הריבוע EZHΘ גדול ממחצית המעגל EZHΘ.
 ועל הריבוע EZHΘ תועמד פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט; לפיכך
 הפירמידה המועמדת גדולה ממחצית החרוט. ייחצו הקשתות HΘ, ZH, EZ,
 ΘE בנקודות Σ, P, Π, O, ויחברו EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE.
 לפיכך כל אחד מן המשולשים EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE גדול ממחצית קטע
 המעגל המתאים לו. ועל כל אחד מן המשולשים EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE
 תועמד פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט; וכל אחת מן הפירמידות
 המועמדות גדולה ממחצית חלק החרוט המתאים לה. אם נחצה את הקשתות
 הנותרות, נחבר קווים ישרים, נעמיד על כל משולש פירמידה שקודקודה זהה
 לקודקוד החרוט ונעשה זאת תמיד, נשאיר חלקים מן החרוט שסכומם קטן מן
 העודף שבו החרוט EZHΘN גדול מן הגוף E. יישארו אפוא, ויהיו אלה שעל
 EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE; לפיכך הפירמידה הנותרת שבסיסה
 המצולע EΘZΠHPΘΣ וקודקודה N גדולה מן הגוף E. ובמעגל ABΓΔ ייחסם
 המצולע ATBYΓΦΔX, הדומה למצולע EΘZΠHPΘΣ ומונח באותו אופן, ועל
 המצולע ATBYΓΦΔX תועמד פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט. יהי
 המשולש ABT אחד המשולשים המכילים את הפירמידה שבסיסה המצולע
 ATBYΓΦΔX וקודקודה Λ, ויהי המשולש NZO אחד המשולשים המכילים
 את הפירמידה שבסיסה המצולע EΘZΠHPΘΣ וקודקודה N; ויחברו KT,
 MO. ומאחר שהחרוט ABΓΔΛ דומה לחרוט EZHΘN, כפי ש־BA אל ZΘ,
 כך הציר KΛ אל הציר MN. וכפי ש־BA אל ZΘ, כך BK אל ZM; לפיכך כפי
 ש־BK אל ZM, כך KΛ אל MN. ובחילוף, כפי ש־BK אל KΛ, כך ZM אל
 MN. והצלעות סביב הזוויות השוות ZMN, BKA, פרופורציונליות; לפיכך
 המשולש BKA דומה למשולש ZMN. ושוב, כפי ש־BK אל KT, כך ZM אל
 MO, והצלעות סביב הזוויות השוות ZMO, BKT, פרופורציונליות; שהרי הזווית

BKT היא אותו חלק מארבע הזוויות הישרות סביב המרכז K שהזווית ZMO היא מארבע הזוויות הישרות סביב המרכז M. לפיכך המשולש BKT דומה למשולש ZMO. ושוב, מאחר שהוכח שכפי ש־BK אל KA כך ZM אל MN, ו־BK שווה ל־KT ו־ZM שווה ל־OM, הרי כפי ש־TK אל KA, כך OM אל MN. והצלעות סביב הזוויות השוות TKA, OMN — שהרי הן ישרות — פרופורציונליות; לפיכך המשולש AKT דומה למשולש NMO. ומאחר שמדמיון המשולשים AKB, NMZ מתקבל שכפי ש־AB אל BK כך NZ אל ZM, ומדמיון המשולשים BKT, ZMO מתקבל שכפי ש־KB אל BT כך MZ אל ZO, הרי בשוויון כפי ש־AB אל BT, כך NZ אל ZO. ושוב, מדמיון המשולשים ATK, NOM מתקבל שכפי ש־AT אל TK כך NO אל OM, ומדמיון המשולשים TKB, OMZ מתקבל שכפי ש־KT אל TB כך MO אל OZ; לפיכך בשוויון כפי ש־AT אל TB, כך NO אל OZ. והוכח גם שכפי ש־TB אל BA, כך OZ אל ZN; לפיכך בשוויון כפי ש־TA אל AB, כך ON אל NZ. לכן צלעות המשולשים ATB, NOZ פרופורציונליות; לפיכך המשולשים NOZ, שווי־זוויות, ולכן גם דומים. לפיכך גם הפירמידה שבסיסה המשולש BKT וקודקודה A דומה לפירמידה שבסיסה המשולש ZMO וקודקודה N, שהרי הן מופלות במספר שווה של פאות דומות. ופירמידות דומות שבסיסיהן משולשים מתייחסות ביחס המשולש של צלעותיהן המתאימות; לכן יחס הפירמידה BKTA אל הפירמידה ZMON הוא היחס המשולש של BK אל ZM. ובדומה, אם נחבר קווים מן A, X, Δ, Φ, Γ, Y אל K ומן E, Σ, Θ, P, H, ונעמיד על כל משולש פירמידה שקודקודה זהה לקודקוד החרוט המתאים, נוכיח שכל פירמידה מתאימה מתייחסת לפירמידה המתאימה לה ביחס המשולש של הצלע המתאימה BK אל הצלע המתאימה ZM, כלומר של BΔ אל ZΘ. וכפי שאחד מן הגדלים הקודמים אל אחד מן הבאים, כך כל

הקודמים יחד אל כל הבאים יחד; לפיכך כפי שהפירמידה $BKTA$ אל הפירמידה $ZMON$, כך הפירמידה השלמה שבסיסה המצולע $ATBYΓΦΔX$ וקודקודה Λ אל הפירמידה השלמה שבסיסה המצולע $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה N . לכן גם יחס הפירמידה שבסיסה $ATBYΓΦΔX$ וקודקודה Λ אל הפירמידה שבסיסה $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה N הוא היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$. וגם הונח שיחס החרוט שבסיסו המעגל $ABΓΔ$ וקודקודו Λ אל הגוף Ξ הוא היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$; לפיכך כפי שהחרוט שבסיסו המעגל $ABΓΔ$ וקודקודו Λ אל הגוף Ξ , כך הפירמידה שבסיסה $ATBYΓΦΔX$ וקודקודה Λ אל הפירמידה שבסיסה $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה N . ובחילוף, כפי שהחרוט שבסיסו המעגל $ABΓΔ$ וקודקודו Λ אל הפירמידה שבתוכו, שבסיסה $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה Λ , כך Ξ אל הפירמידה שבסיסה $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה N . אך החרוט האמור גדול מן הפירמידה שבתוכו, שהרי הוא מכיל אותה; לפיכך גם הגוף Ξ גדול מן הפירמידה שבסיסה $EOZΠHPΘΣ$ וקודקודה N . אך הוא גם קטן ממנה; וזה בלתי־אפשרי. לכן יחס החרוט שבסיסו המעגל $ABΓΔ$ וקודקודו Λ אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט שבסיסו המעגל $EZH\Theta$ וקודקודו N אינו היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$. ובדומה נוכיח שגם יחס החרוט $EZH\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט $ABΓΔ\Lambda$ אינו היחס המשולש של $Z\Theta$ אל $B\Delta$.

אומר אני שגם יחס החרוט $ABΓΔ\Lambda$ אל גוף כלשהו הגדול מן החרוט $EZH\Theta$ אינו היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$.

שאם אפשר, יהי יחסו אל הגוף הגדול Ξ היחס המשולש הזה. בהיפוך אפוא, יחס הגוף Ξ אל החרוט $ABΓΔ\Lambda$ הוא היחס המשולש של $Z\Theta$ אל $B\Delta$. אך כפי שהגוף Ξ אל החרוט $ABΓΔ\Lambda$, כך החרוט $EZH\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן

החרוט $AB\Gamma\Delta$. לפיכך יחס החרוט $EZH\Theta$ אל גוף כלשהו הקטן מן החרוט $AB\Gamma\Delta$ הוא היחס המשולש של $Z\Theta$ אל $B\Delta$; והוכח שזה בלתי־אפשרי. לכן יחס החרוט $AB\Gamma\Delta$ אל גוף כלשהו הגדול מן החרוט $EZH\Theta$ אינו היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$. והוכח שגם אינו מתייחס ביחס זה אל גוף קטן ממנו. לפיכך יחס החרוט $AB\Gamma\Delta$ אל החרוט $EZH\Theta$ הוא היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$.

וכפי שהחרוט אל החרוט, כך הגליל אל הגליל; שהרי גליל שעל אותו בסיס עם חרוט ושווה לו בגובה גדול פי שלושה מן החרוט. לפיכך גם יחס הגליל אל הגליל הוא היחס המשולש של $B\Delta$ אל $Z\Theta$.

לפיכך חרטים וגלילים דומים מתייחסים זה לזה ביחס המשולש של קוטרי בסיסיהם; מש"ל.

אם גליל נחתך על ידי מישור המקביל לפאותיו הנגדיות, כפי שהגליל אל הגליל כך הציר אל הציר.

ייחתך הגליל $A\Delta$ על ידי המישור $H\Theta$ המקביל לפאות הנגדיות $AB, \Gamma\Delta$, ויפגוש המישור $H\Theta$ את הציר בנקודה K . אומר אני שכפי שהגליל BH אל הגליל HA , כך הציר EK אל הציר KZ .

יוארך הציר EZ בשני הכיוונים אל הנקודות Λ, M ; יונחו כמה קטעים שיימצאו EN, NA שווים לציר EK , וכמה קטעים שיימצאו EM, ZE שווים ל־ ZK ; וייחשב הגליל OX שעל הציר ΛM , שבסיסיו המעגלים $\Phi X, \Omega\Pi$. דרך הנקודות N, E יועברו מישורים המקבילים ל־ $AB, \Gamma\Delta$ ולבסיסי הגליל OX , וייצרו את המעגלים $\Psi\Sigma, TY$ שמרכזיהם N, E . ומאחר שהצירים $\Lambda N, NE$

EK שווים זה לזה, הגלילים ΠP , PB , BH מתייחסים זה לזה כבסיסים. והבסיסים שווים; לפיכך גם הגלילים ΠP , PB , BH שווים זה לזה. ומאחר שהצירים ΠN , NE , EK שווים זה לזה, וגם הגלילים ΠP , PB , BH שווים זה לזה, ומספרם שווה, פי כמה שהציר $K\Lambda$ הוא מן הציר EK , פי אותו מספר הגליל ΠH הוא מן הגליל HB . מאותם טעמים, פי כמה שהציר MK הוא מן הציר KZ , פי אותו מספר הגליל XH הוא מן הגליל $H\Delta$. ואם הציר $K\Lambda$ שווה לציר KM , גם הגליל ΠH יהיה שווה לגליל HX ; ואם הציר האחד גדול מן האחר, גם הגליל האחד גדול מן האחר; ואם קטן, גם קטן. הנה מתוך ארבעה גדלים — הצירים EK , KZ והגלילים BH , $H\Delta$ — נלקחו כפולות שוות־מספר: הציר ΛK והגליל ΠH של הציר EK והגליל BH , והציר KM והגליל HX של הציר KZ והגליל $H\Delta$. והוכח שאם הציר $K\Lambda$ גדול מן הציר KM , גם הגליל ΠH גדול מן הגליל HX ; אם הוא שווה, גם הגליל שווה; ואם קטן, גם הגליל קטן. לפיכך כפי שהציר EK אל הציר KZ , כך הגליל BH אל הגליל $H\Delta$; מש"ל.

חרוטים וגלילים שעל בסיסים שווים מתייחסים זה לזה כגבהיהם.

יהיו הגלילים EB , $Z\Delta$ על הבסיסים השווים, המעגלים AB , ΓA . אומר אני שכפי שהגליל EB אל הגליל $Z\Delta$, כך הציר $H\Theta$ אל הציר $K\Lambda$.

יואך הציר $K\Lambda$ אל הנקודה N , ויונח ΛN שווה לציר $H\Theta$; וסביב הציר ΛN ייחשב הגליל ΓM . מאחר שהגלילים EB , ΓM באותו גובה, הם מתייחסים זה לזה כבסיסים. והבסיסים שווים זה לזה; לפיכך גם הגלילים EB , ΓM שווים. ומאחר שהגליל ZM נחתך על ידי המישור ΓA המקביל לפאות הנגדיות, כפי שהגליל ΓM אל הגליל $Z\Delta$, כך הציר ΛN אל הציר $K\Lambda$. והגליל ΓM שווה

לגליל EB, והציר AN שווה לציר HΘ; לפיכך כפי שהגליל EB אל הגליל ZΔ, כך הציר HΘ אל הציר KA. וכפי שהגליל EB אל הגליל ZΔ, כך החרוט ABH אל החרוט ΓΔK. לפיכך כפי שהציר HΘ אל הציר KA, כך החרוט ABH אל החרוט ΓΔK וכך הגליל EB אל הגליל ZΔ; מש"ל.

בחרוטים ובגלילים שווים הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים; וחרוטים וגלילים שבסיסיהם עומדים ביחס הפוך לגבהיהם שווים.

יהיו חרוטים וגלילים שווים, שבסיסיהם המעגלים EZHΘ, ABΓΔ, קוטריהם AΓ, EH, וציריהם MN, KA, שהם גם גובהי החרוטים או הגלילים; ויושלמו הגלילים AE, EO. אומר אני שבגלילים AE, EO הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים, ושכפי שהבסיס ABΓΔ אל הבסיס EZHΘ, כך הגובה MN אל הגובה KA.

שהרי הגובה AK שווה לגובה MN או אינו שווה לו. יהי תחילה שווה. וגם הגליל AE שווה לגליל EO. וחרוטים וגלילים באותו גובה מתייחסים זה לזה כבסיסיהם; לפיכך גם הבסיס ABΓΔ שווה לבסיס EZHΘ. ולכן מתקיים היחס ההפוך: כפי שהבסיס ABΓΔ אל הבסיס EZHΘ, כך הגובה MN אל הגובה KA. אך עתה לא יהי הגובה AK שווה ל-MN, אלא יהי MN גדול ממנו; מן הגובה MN ייגרע ΠN השווה ל-KA; דרך הנקודה Π יחתך הגליל EO על ידי המישור TYΣ המקביל למישורי המעגלים EZHΘ, PO; ועל הבסיס, המעגל EZHΘ, ובגובה NΠ ייחשב הגליל EΣ. ומאחר שהגליל AE שווה לגליל EO, כפי שהגליל AE אל הגליל EΣ, כך הגליל EO אל הגליל EΣ. אך כפי שהגליל AE אל הגליל EΣ, כך הבסיס ABΓΔ אל הבסיס EZHΘ, שהרי הגלילים AE, EΣ באותו גובה; וכפי שהגליל EO אל EΣ, כך הגובה MN אל הגובה ΠN,

שהרי הגליל EO נחתך על ידי מישור המקביל לפאות הנגדיות. לפיכך גם כפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$, כך הגובה MN אל הגובה $\Pi\Lambda$. והגובה $\Pi\Lambda$ שווה לגובה $K\Lambda$; לכן כפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$, כך הגובה MN אל הגובה $K\Lambda$. לפיכך בגלילים EO , AE הבסיסים עומדים ביחס הפוך לגבהים.

אך עתה יעמדו בסיסי הגלילים EO , AE ביחס הפוך לגבהים, ויהי כפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$, כך הגובה MN אל הגובה $K\Lambda$. אומר אני שהגליל AE שווה לגליל EO .

לאחר שנעשו אותם מבנים, מאחר שכפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$ כך הגובה MN אל הגובה $K\Lambda$, והגובה $K\Lambda$ שווה לגובה $\Pi\Lambda$, הרי כפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$, כך הגובה MN אל הגובה $\Pi\Lambda$. אך כפי שהבסיס $AB\Gamma\Delta$ אל הבסיס $EZH\Theta$, כך הגליל AE אל הגליל $E\Sigma$, שהרי הם באותו גובה; וכפי שהגובה MN אל $\Pi\Lambda$, כך הגליל EO אל הגליל $E\Sigma$. לפיכך כפי שהגליל AE אל הגליל $E\Sigma$, כך הגליל EO אל $E\Sigma$. לכן הגליל AE שווה לגליל EO . וכן הדבר גם בחרוטים; מש"ל.

בהינתן שני מעגלים בעלי אותו מרכז, לחסום במעגל הגדול מצולע שווה־צלעות ובעל מספר זוגי של צלעות, שאינו נוגע במעגל הקטן.

יהיו שני המעגלים הנתונים $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ בעלי אותו מרכז K . צריך אפוא לחסום במעגל הגדול $AB\Gamma\Delta$ מצולע שווה־צלעות ובעל מספר זוגי של צלעות, שאינו נוגע במעגל $EZH\Theta$.

יועבר דרך המרכז K הקו הישר $BK\Delta$; מן הנקודה H יועבר HA בניצב לקו BA ויוארך אל Γ . לפיכך AG משיק למעגל $EZH\Theta$. אם נחצה את הקשת BAA , ושוב את מחציתה, ונעשה זאת תמיד, נשאיר קשת קטנה מן $A\Delta$. תישאר אפוא, ותהי $\Delta\Lambda$. מן Λ יועבר AM מאונך אל BA ויוארך אל N ; ויחברו $\Delta\Lambda$, ΔN . לפיכך $\Delta\Lambda$ שווה ל- ΔN . ומאחר ש- ΔN מקביל ל- AG , ו- AG משיק למעגל $EZH\Theta$, הרי ΔN אינו נוגע במעגל $EZH\Theta$; על אחת כמה וכמה $\Delta\Lambda$, ΔN אינם נוגעים במעגל $EZH\Theta$. אם נתאים ברציפות במעגל $AB\Gamma\Delta$ קווים השווים לקו $\Delta\Lambda$, ייחסם במעגל $AB\Gamma\Delta$ מצולע שווה-צלעות ובעל מספר זוגי של צלעות, שאינו נוגע במעגל הקטן $EZH\Theta$; כנדרש לעשות.

בהינתן שני כדורים בעלי אותו מרכז, לחסום בכדור הגדול גוף רב-פאות שאינו נוגע בפני הכדור הקטן.

ייחשבו שני כדורים בעלי אותו מרכז A . צריך אפוא לחסום בכדור הגדול גוף רב-פאות שאינו נוגע בפני הכדור הקטן.

ייחתכו הכדורים על ידי מישור כלשהו העובר דרך המרכז; החתכים יהיו מעגלים. שהרי הכדור נוצר כאשר הקוטר נשאר במקומו וחצי-המעגל סובב; לכן בכל מצב שבו נחשוב את חצי-המעגל, המישור המועבר דרכו ייצור על פני הכדור מעגל. וברור שהוא גם מעגל גדול ביותר, מפני שקוטר הכדור, שהוא גם קוטר חצי-המעגל ולכן גם קוטר המעגל, גדול מכל הקווים המועברים בתוך המעגל או הכדור. יהי אפוא בכדור הגדול המעגל $B\Gamma\Delta E$, ובכדור הקטן המעגל $ZH\Theta$. יועברו במעגל הגדול שני קטרים ניצבים זה לזה, BD , ΓE . מתוך שני המעגלים בעלי אותו מרכז $B\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta$ ייחסם במעגל הגדול $B\Gamma\Delta E$ מצולע שווה-צלעות ובעל מספר זוגי של צלעות, שאינו נוגע במעגל הקטן $ZH\Theta$;

ותהיינה צלעותיו ברביע BE הקווים KA, ME, KL, BK. יחובר KA ויארך אל N. מן הנקודה A יועמד AE בניצב למישור המעגל BΓΔE ויפגוש את פני הכדור בנקודה E. ודרך AE וכל אחד מן BA, KN יועברו מישורים; מן האמור הם ייצרו על פני הכדור מעגלים גדולים. ייצרו אפוא, ויהיו חצאי־המעגלים שעל הקטרים BA, KN אלה BΕΔ, KEN. ומאחר ש־EΑ ניצב למישור המעגל BΓΔE, כל המישורים העוברים דרך EΑ ניצבים למישור המעגל BΓΔE; ולכן גם חצאי־המעגלים BΕΔ, KEN ניצבים למישור המעגל BΓΔE. ומאחר שחצאי־המעגלים BΕΔ, BΕΔ, KEN שווים, שהרי הם על הקטרים השווים BA, KN, גם הרביעים BE, BE, KE שווים זה לזה. לפיכך כמספר צלעות המצולע ברביע BE, כך מספר הצלעות ברביעים BE, KE, BE, והן שוות לקווים KA, ME, KL, BK. ייחסמו אפוא, ותהיינה BO, OP, PP, PE ויחברו O, Σ, TI, YP, YP, YP. הם ייפלו על החיתוכים המשותפים של המישורים BA, KN, מפני שגם מישורי חצאי־המעגלים BΕΔ, KEN ניצבים למישור המעגל BΓΔE. ייפלו אפוא, ויהיו OΦ, ΣX; ויחברו XΦ. ומאחר שבחצאי־המעגלים השווים BΕΔ, KEN נלקחו הקווים השווים BO, KΣ והועברו המאונכים OΦ, ΣX, הרי OΦ שווה ל־ΣX ו־BΦ שווה ל־KX. וגם BA כולו שווה ל־KA כולו; לפיכך השארית ΦA שווה לשארית XA. לכן כפי ש־BΦ אל ΦA, כך KX אל XA; ולפיכך XΦ מקביל ל־KB. ומאחר שכל אחד מן OΦ, ΣX ניצב למישור המעגל BΓΔE, הרי OΦ מקביל ל־ΣX; והוכח שהוא גם שווה לו. לפיכך ΣO, XΦ שווים ומקבילים. ומאחר ש־XΦ מקביל ל־ΣO וגם ל־KB, הרי ΣO מקביל ל־KB. והקווים BO, KΣ מחברים אותם; לפיכך המרובע KBOΣ נמצא במישור אחד, שהרי אם שני קווים ישרים מקבילים ונלקחו על כל אחד מהם נקודות מקריות, הקו המחבר את הנקודות נמצא באותו מישור

שבו המקבילים. מאותם טעמים גם כל אחד מן המרובעים ΣOPT , $TTPY$ נמצא במישור אחד; וגם המשולש YPE נמצא במישור אחד. אם אפוא נחשוב קווים ישרים המחברים את הנקודות O, Σ, Π, T, P, Y , אל A , ייבנה בין הקשתות BE, KE גוף רב־פאות המורכב מפירמידות שבסיסיהן המרובעים $KBO\Sigma, \Sigma OPT, TTPY$ והמשולש YPE , וקודקודן הנקודה A . ואם נעשה על כל אחת מן הצלעות $KA, \Lambda M, ME$ אותם מבנים שנעשו על BK , וכן בשלושת הרביעים האחרים, ייבנה גוף רב־פאות חסום בכדור, המוכל בפירמידות שבסיסיהן המרובעים האמורים, המשולש YPE והצורות המתאימות להם, וקודקודן הנקודה A .

אומר אני שהגוף רב־הפאות האמור לא ייגע בפני הכדור הקטן שעליו נמצא המעגל ZHO .

מן הנקודה A יועבר $A\Psi$ מאונך אל מישור המרובע $KBO\Sigma$ ויפגוש את המישור בנקודה Ψ ; ויחברו $\Psi B, \Psi K$. ומאחר ש־ $A\Psi$ ניצב למישור המרובע $KBO\Sigma$, הוא ניצב לכל הקווים הנוגעים בו ונמצאים במישור המרובע; לפיכך $A\Psi$ ניצב לכל אחד מן $\Psi B, \Psi K$. ומאחר ש־ AB שווה ל־ AK , גם ריבוע AB שווה לריבוע AK . ולריבוע AB שווה סכום ריבועי $\Psi B, \Psi A$, שהרי הזווית שב־ Ψ ישרה; ולריבוע AK שווה סכום ריבועי $\Psi K, \Psi A$. לפיכך סכום ריבועי $\Psi B, \Psi A$ שווה לסכום ריבועי $\Psi K, \Psi A$. יחוסר ריבוע ΨA המשותף; לכן הריבוע הנותר $B\Psi$ שווה לריבוע הנותר ΨK , ולפיכך $B\Psi$ שווה ל־ ΨK . ובדומה נוכיח שגם הקווים המחברים מן Ψ אל O, Σ שווים לכל אחד מן $\Psi B, \Psi K$. לכן המעגל שמרכזו Ψ ורדיוסו אחד מן $\Psi B, \Psi K$ יעבור גם דרך O, Σ , והמרובע $KBO\Sigma$ יהיה חסום במעגל.

ומאחר ש־ KB גדול מ־ $X\Phi$, ו־ $X\Phi$ שווה ל־ ΣO , הרי KB גדול מ־ ΣO .
שווה לכל אחד מן $K\Sigma$, BO ; לפיכך גם כל אחד מן $K\Sigma$, BO גדול מ־ ΣO .
ומאחר שהמרובע $KBO\Sigma$ חסום במעגל, והקווים KB , BO , $K\Sigma$ שווים ואילו
 $O\Sigma$ קטן מהם, ו־ $B\Psi$ הוא רדיוס המעגל, הרי ריבוע KB גדול מפי שניים
מריבוע $B\Psi$. מן K יועבר $K\Omega$ מאונך אל $B\Phi$. ומאחר ש־ BA קטן מפי שניים
מ־ $\Delta\Omega$, וכפי ש־ BA אל $\Delta\Omega$ כך המלבן הכלול ב־ $B\Omega$, ΔB אל המלבן הכלול
ב־ $\Delta\Omega$, ΩB — כפי שנראה אם נבנה ריבוע על $B\Omega$ ונשלים את המקבילית
שעל $\Delta\Omega$ — הרי המלבן הכלול ב־ $B\Omega$, ΔB קטן מפי שניים מן המלבן הכלול
ב־ $\Delta\Omega$, ΩB . וכאשר מחברים $K\Delta$, המלבן הכלול ב־ $B\Omega$, ΔB שווה לריבוע BK ,
והמלבן הכלול ב־ $\Delta\Omega$, ΩB שווה לריבוע $K\Omega$; לפיכך ריבוע KB קטן מפי שניים
מריבוע $K\Omega$. אך ריבוע KB גדול מפי שניים מריבוע $B\Psi$; לכן ריבוע $K\Omega$ גדול
מריבוע $B\Psi$. ומאחר ש־ BA שווה ל־ KA , ריבוע BA שווה לריבוע AK .
ולריבוע BA שווה סכום ריבועי ΨA , $B\Psi$, ולריבוע KA שווה סכום ריבועי $K\Omega$,
 ΩA . לפיכך סכום ריבועי ΨA , $B\Psi$ שווה לסכום ריבועי $K\Omega$, ΩA , ומביניהם
ריבוע $K\Omega$ גדול מריבוע $B\Psi$; לכן הריבוע הנותר ΩA קטן מן הריבוע הנותר
 ΨA . לפיכך $A\Psi$ גדול מ־ $A\Omega$; ועל אחת כמה וכמה $A\Psi$ גדול מ־ AH . והקו
מגיע אל אחד מבסיסי רב־הפאות, ואילו AH מגיע אל פני הכדור הקטן; לפיכך
רב־הפאות לא ייגע בפני הכדור הקטן.

לפיכך, בהינתן שני כדורים בעלי אותו מרכז, נחסם בכדור הגדול גוף רב־פאות
שאינו נוגע בפני הכדור הקטן; כנדרש לעשות.

מסקנה

ואם בכדור אחר ייחסם גוף רב־פאות הדומה לגוף רב־הפאות שבכדור $B\Gamma\Delta E$, יחס הגוף רב־הפאות שבכדור $B\Gamma\Delta E$ אל הגוף רב־הפאות שבכדור האחר יהיה היחס המשולש של קוטר הכדור $B\Gamma\Delta E$ אל קוטר הכדור האחר. שהרי לאחר שהגופים נחלקים לפירמידות שוות במספרן ומתאימות במיקומן, הפירמידות יהיו דומות. ופירמידות דומות מתייחסות זו לזו ביחס המשולש של צלעותיהן המתאימות. לפיכך יחס הפירמידה שבסיסה המרובע $KBO\Sigma$ וקודקודה הנקודה A אל הפירמידה המתאימה לה בכדור האחר הוא היחס המשולש של הצלע המתאימה אל הצלע המתאימה, כלומר של AB , רדיוס הכדור שמרכזו A , אל רדיוס הכדור האחר. ובדומה, יחס כל פירמידה שבכדור שמרכזו A אל כל פירמידה מתאימה בכדור האחר יהיה היחס המשולש של AB אל רדיוס הכדור האחר. וכפי שאחד מן הגדלים הקודמים אל אחד מן הבאים, כך כל הקודמים יחד אל כל הבאים יחד; לפיכך יחס הגוף רב־הפאות כולו שבכדור שמרכזו A אל הגוף רב־הפאות כולו שבכדור האחר יהיה היחס המשולש של AB אל רדיוס הכדור האחר, כלומר של הקוטר BA אל קוטר הכדור האחר; מש"ל.

כדורים מתייחסים זה לזה ביחס המשולש של קוטריהם.

ייחשבו הכדורים $AB\Gamma$, ΔEZ , וקוטריהם $B\Gamma$, EZ . אומר אני שיחס הכדור $AB\Gamma$ אל הכדור ΔEZ הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ .

שאם יחס הכדור $AB\Gamma$ אל הכדור ΔEZ אינו היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ , יהיה יחס הכדור $AB\Gamma$ אל כדור קטן מן הכדור ΔEZ או אל כדור גדול ממנו היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ . יהי תחילה אל הכדור הקטן $H\Theta K$. ייחשבו הכדורים ΔEZ , $H\Theta K$ בעלי אותו מרכז; בכדור הגדול ΔEZ ייחסם גוף רב־

פאות שאינו נוגע בפני הכדור הקטן HOK ; ובכדור $AB\Gamma$ ייחסם גוף רב־פאות הדומה לגוף רב־הפאות שבכדור ΔEZ . לפיכך יחס הגוף רב־הפאות שבכדור $AB\Gamma$ אל הגוף רב־הפאות שבכדור ΔEZ הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ . אך גם יחס הכדור $AB\Gamma$ אל הכדור HOK הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ ; לפיכך כפי שהכדור $AB\Gamma$ אל הכדור HOK , כך הגוף רב־הפאות שבכדור $AB\Gamma$ אל הגוף רב־הפאות שבכדור ΔEZ . ובחילוף, כפי שהכדור $AB\Gamma$ אל רב־הפאות שבתוכו, כך הכדור HOK אל הגוף רב־הפאות שבכדור ΔEZ . אך הכדור $AB\Gamma$ גדול מרב־הפאות שבתוכו; לפיכך גם הכדור HOK גדול מרב־הפאות שבכדור ΔEZ . אך הוא גם קטן ממנו, שהרי הוא מוכל בתוכו. לכן יחס הכדור $AB\Gamma$ אל כדור קטן מן הכדור ΔEZ אינו היחס המשולש של הקוטר $B\Gamma$ אל EZ . ובדומה נוכיח שגם יחס הכדור ΔEZ אל כדור קטן מן הכדור $AB\Gamma$ אינו היחס המשולש של EZ אל $B\Gamma$.

אומר אני שגם יחס הכדור $AB\Gamma$ אל כדור כלשהו הגדול מן הכדור ΔEZ אינו היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ .

שאם אפשר, יהי יחסו אל הכדור הגדול ΛMN היחס המשולש הזה. בהיפוך אפוא, יחס הכדור ΛMN אל הכדור $AB\Gamma$ הוא היחס המשולש של הקוטר EZ אל הקוטר $B\Gamma$. אך כפי שהכדור ΛMN אל הכדור $AB\Gamma$, כך הכדור ΔEZ אל כדור כלשהו הקטן מן הכדור $AB\Gamma$, מפני ש־ ΛMN גדול מ־ ΔEZ , כפי שהוכח קודם. לפיכך יחס הכדור ΔEZ אל כדור כלשהו הקטן מן הכדור $AB\Gamma$ הוא היחס המשולש של EZ אל $B\Gamma$; והוכח שזה בלתי־אפשרי. לכן יחס הכדור $AB\Gamma$ אל כדור כלשהו הגדול מן הכדור ΔEZ אינו היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ . והוכח שגם אינו מתייחס כך אל כדור קטן ממנו. לפיכך יחס הכדור $AB\Gamma$ אל הכדור ΔEZ הוא היחס המשולש של $B\Gamma$ אל EZ ; מש״ל.

ספר יג

אם קו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ריבוע הקו המורכב מן הקטע הגדול וממחצית הקו השלם גדול פי חמישה מן הריבוע שעל מחצית השלם.

ייחתך הקו הישר AB ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ויהי $A\Gamma$ הקטע הגדול; יוארך $\Delta\Delta$ בקו ישר עם ΓA , ויונח $\Delta\Delta$ מחצית AB . אומר אני שהריבוע שעל $\Gamma\Delta$ גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΔA .

ייבנו על AB , $\Delta\Gamma$ הריבועים ΔZ , AE ; בתוך ΔZ תצויר הצורה, ו ΓZ יוארך אל H . ומאחר ש AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , המלבן הכלול ב AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $A\Gamma$. והמלבן הכלול ב AB , $B\Gamma$ הוא ΓE , והריבוע שעל $A\Gamma$ הוא $Z\Theta$; לפיכך ΓE שווה ל $Z\Theta$. ומאחר ש BA כפול מ ΔA , ו BA שווה ל KA ו ΔA שווה ל $\Delta\Theta$, הרי גם KA כפול מ $\Delta\Theta$. וכפי ש KA אל $A\Theta$, כך ΓK אל $\Gamma\Theta$; לפיכך ΓK כפול מ $\Gamma\Theta$. וגם $\Theta\Gamma$, $\Lambda\Theta$ יחד כפולים מ $\Gamma\Theta$; לכן $K\Gamma$ שווה לסכום $\Lambda\Theta$, $\Theta\Gamma$. והוכח גם ש ΓE שווה ל ΘZ ; לפיכך הריבוע AE כולו שווה לגנומון MNE . ומאחר ש BA כפול מ ΔA , הריבוע שעל BA גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל ΔA , כלומר AE גדול פי ארבעה מ $\Delta\Theta$. אך AE שווה לגנומון MNE ; לכן גם הגנומון MNE גדול פי ארבעה מ $\Delta\Theta$. לפיכך ΔZ כולו גדול פי חמישה מ $\Delta\Theta$. ו ΔZ הוא הריבוע שעל $\Delta\Gamma$, ואילו AO הוא הריבוע שעל ΔA ; לכן הריבוע שעל $\Gamma\Delta$ גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΔA .

לפיכך, אם קו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ריבוע הקו המורכב מן הקטע הגדול וממחצית הקו השלם גדול פי חמישה מן הריבוע שעל מחצית השלם; מש"ל.

אם ריבועו של קו ישר גדול פי חמישה מריבועו של קטע ממנו, וכפל הקטע האמור נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול הוא החלק הנותר מן הקו המקורי.

יהי ריבוע הקו הישר AB גדול פי חמישה מריבוע הקטע AF שלו, ותהי $\Gamma\Delta$ כפולה מ־ AF . אומר אני שכאשר $\Gamma\Delta$ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול הוא ΓB .

ייבנו על כל אחד מן $\Gamma\Delta$, AB הריבועים ΓH , AZ ; בתוך AZ תצויר הצורה, ו־ BE יוארך. ומאחר שהריבוע שעל BA גדול פי חמישה מן הריבוע שעל AF , הרי AZ גדול פי חמישה מ־ AO . לפיכך הגנומון MNE גדול פי ארבעה מ־ AO . ומאחר ש־ $\Delta\Gamma$ כפולה מ־ ΓA , הריבוע שעל $\Delta\Gamma$ גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל ΓA , כלומר ΓH גדול פי ארבעה מ־ AO . והוכח שגם הגנומון MNE גדול פי ארבעה מ־ AO ; לפיכך הגנומון MNE שווה ל־ ΓH . ומאחר ש־ $\Delta\Gamma$ כפולה מ־ ΓA , ו־ $\Delta\Gamma$ שווה ל־ ΓK ו־ AF שווה ל־ $\Gamma\Theta$, הרי גם KB כפול מ־ BO . וגם $\Lambda\Theta$, ΘB יחד כפולים מ־ ΘB ; לכן KB שווה לסכום ΘB , $\Lambda\Theta$. והוכח גם שהגנומון MNE כולו שווה ל־ ΓH כולו; לפיכך השארית ΘZ שווה ל־ BH . ו־ BH הוא המלבן הכלול ב־ ΔB , $\Gamma\Delta$, שהרי $\Gamma\Delta$ שווה ל־ ΔH ; ואילו ΘZ הוא הריבוע שעל ΓB . לפיכך המלבן הכלול ב־ ΔB , $\Gamma\Delta$ שווה לריבוע שעל ΓB . לכן כפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓB , כך ΓB אל BA . ו־ $\Delta\Gamma$ גדול מ־ ΓB ; לפיכך גם ΓB גדול מ־ BA . לכן כאשר הקו $\Gamma\Delta$ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול הוא ΓB .

לפיכך, אם ריבועו של קו ישר גדול פי חמישה מריבועו של קטע ממנו, וכפל הקטע האמור נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול הוא החלק הנותר מן הקו המקורי; מש״ל.

ואת הדבר שכפל AF גדול מ־ BF יש להוכיח כך.

שאם לא, תהי, אם אפשר, BF כפולה מ־ FA . לפיכך הריבוע שעל BF גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל FA ; לכן סכום הריבועים שעל BF , FA גדול פי חמישה מן הריבוע שעל FA . אך גם הריבוע שעל BA הונח גדול פי חמישה מן הריבוע שעל FA ; לפיכך הריבוע שעל BA שווה לסכום הריבועים שעל BF , FA ; וזה בלתי־אפשרי. לכן FB אינה כפולה מ־ AF . ובדומה נוכיח שגם קו קטן מ־ FB אינו כפול מ־ FA ; שאז האבסורד גדול עוד יותר.

לפיכך כפל AF גדול מ־ FB ; מש״ל.

אם קו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ריבוע הקו המורכב מן הקטע הקטן וממחצית הקטע הגדול גדול פי חמישה מן הריבוע שעל מחצית הקטע הגדול.

ייחתך קו ישר כלשהו AB ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ויהי AF הקטע הגדול; וייחצה AF בנקודה Δ . אומר אני שהריבוע שעל BA גדול פי חמישה מן הריבוע שעל $\Delta\Gamma$.

ייבנה על AB הריבוע AE , ובתוכו תצויר הצורה הכפולה. מאחר ש־ AF כפול מ־ $\Delta\Gamma$, הריבוע שעל AF גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל $\Delta\Gamma$, כלומר $P\Sigma$ גדול פי ארבעה מ־ ZH . ומאחר שהמלבן הכלול ב־ BF , AB שווה לריבוע שעל AF , והמלבן הכלול ב־ BF , AB הוא ΓE , הרי ΓE שווה ל־ $P\Sigma$. ו־ $P\Sigma$ גדול פי ארבעה מ־ ZH ; לפיכך גם ΓE גדול פי ארבעה מ־ ZH . ושוב, מאחר ש־ AD שווה ל־ $\Delta\Gamma$, גם ΘK שווה ל־ KZ . לכן גם הריבוע HZ שווה לריבוע $\Theta\Lambda$. לפיכך HK שווה ל־ $K\Lambda$, כלומר MN שווה ל־ NE ; ולכן גם MZ שווה ל־ ZE . אך MZ שווה

ΓH^{-} ; לפיכך גם ΓH שווה ל- ZE . יתווסף ΓN המשותף; לכן הגנומון $EO\Pi$ שווה ל- ΓE . אך ΓE הוכח גדול פי ארבעה מ- HZ ; לפיכך גם הגנומון $EO\Pi$ גדול פי ארבעה מן הריבוע ZH . לכן הגנומון $EO\Pi$ יחד עם הריבוע ZH גדול פי חמישה מ- ZH . אך הגנומון $EO\Pi$ יחד עם הריבוע ZH הוא ΔN . ו- ΔN הוא הריבוע שעל ΔB , ואילו HZ הוא הריבוע שעל $\Delta \Gamma$. לפיכך הריבוע שעל ΔB גדול פי חמישה מן הריבוע שעל $\Delta \Gamma$; מש"ל.

אם קו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, סכום הריבועים שעל הקו השלם ועל הקטע הקטן גדול פי שלושה מן הריבוע שעל הקטע הגדול.

יהי AB קו ישר, ויחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ויהי $A\Gamma$ הקטע הגדול. אומר אני שסכום הריבועים שעל AB , $B\Gamma$ גדול פי שלושה מן הריבוע שעל ΓA .

ייבנה על AB הריבוע $A\Delta EB$, ובו תצויר הצורה. מאחר ש- AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ו- $A\Gamma$ הוא הקטע הגדול, המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $A\Gamma$. והמלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ הוא AK , ואילו הריבוע שעל $A\Gamma$ הוא ΘH ; לפיכך AK שווה ל- ΘH . ומאחר ש- AZ שווה ל- ZE , יתווסף ΓK המשותף; לפיכך AK כולו שווה ל- ΓE כולו, ולכן הסכום AK , ΓE כפול מ- AK . אך הסכום AK , ΓE הוא הגנומון ΛMN יחד עם הריבוע ΓK ; לפיכך הגנומון ΛMN יחד עם הריבוע ΓK כפולים מ- AK . והוכח גם ש- AK שווה ל- ΘH ; לפיכך הגנומון ΛMN יחד עם הריבועים ΘH , ΓK גדולים פי שלושה מן הריבוע ΘH . והגנומון ΛMN יחד עם הריבועים ΘH , ΓK הם AE כולו יחד עם ΓK , והם הריבועים שעל AB , $B\Gamma$; ואילו $H\Theta$ הוא הריבוע שעל

AF . לפיכך סכום הריבועים שעל AB , BF גדול פי שלושה מן הריבוע שעל AF ; מש"ל.

אם קו ישר נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ומתווסף אליו קו השווה לקטע הגדול, הקו השלם נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, והקו המקורי הוא הקטע הגדול.

ייחתך הקו הישר AB ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה F , ויהי AF הקטע הגדול, ותהי AD שווה ל- AF . אומר אני שהקו הישר AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה A , ושהקו המקורי AB הוא הקטע הגדול.

ייבנה על AB הריבוע AE , ובו תצויר הצורה. מאחר ש- AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה F , המלבן הכלול בין AB , BF שווה לריבוע שעל AF . והמלבן הכלול בין AB , BF הוא FE , ואילו הריבוע שעל AF הוא Θ ; לפיכך FE שווה ל- Θ . אך Θ שווה ל- FE , ו- $\Delta\Theta$ שווה ל- Θ ; לכן גם $\Delta\Theta$ שווה ל- Θ . לפיכך ΔK כולו שווה ל- AE כולו. ו- ΔK הוא המלבן הכלול בין ΔA , $B\Delta$, שהרי ΔA שווה ל- Δ ; ואילו AE הוא הריבוע שעל AB . לפיכך המלבן הכלול בין $B\Delta$, ΔA שווה לריבוע שעל AB . לכן כפי ש- ΔB אל BA , כך BA אל ΔA . אך ΔB גדול מ- BA ; לפיכך גם BA גדול מ- ΔA .

לפיכך ΔB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה A , והקטע הגדול הוא AB ; מש"ל.

אם קו ישר רציונלי נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, כל אחד משני הקטעים הוא קו אי־רציונלי הקרוי אפוטומה.

יהי AB קו ישר רציונלי, ויחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ויהי $A\Gamma$ הקטע הגדול. אומר אני שכל אחד מן הקווים $A\Gamma$, ΓB הוא קו אי־רציונלי הקרוי אפוטומה.

יואך BA , ותונח ΔA כמחצית BA . מאחר שהקו הישר AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Γ , ולצד הקטע הגדול $A\Gamma$ הונחה ΔA , שהיא מחצית AB , הריבוע שעל ΓA גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΔA . לכן לריבוע שעל ΓA אל הריבוע שעל ΔA יש יחס אשר למספר אל מספר; לפיכך הריבוע שעל ΓA בן־מידה עם הריבוע שעל ΔA . אך הריבוע שעל ΔA רציונלי, שהרי ΔA רציונלי בהיותו מחצית AB הרציונלי; לפיכך גם הריבוע שעל ΓA רציונלי, ולכן גם ΓA רציונלי. ומאחר שלריבוע שעל ΓA אל הריבוע שעל ΔA אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי, ΓA חסר־מידה באורך עם ΔA . לפיכך ΓA , ΔA הם קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד; לכן $A\Gamma$ הוא אפוטומה. ושוב, מאחר ש־ AB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי ו־ $A\Gamma$ הוא הקטע הגדול, המלבן הכלול בין AB , $B\Gamma$ שווה לריבוע שעל $A\Gamma$. לפיכך הריבוע שעל האפוטומה $A\Gamma$, כשהוא נבנה בצמוד לקו הרציונלי AB , יוצר כרוחב את $B\Gamma$. אך ריבוע שעל אפוטומה, כשהוא נבנה בצמוד לקו רציונלי, יוצר כרוחב אפוטומה ראשונה; לפיכך ΓB היא אפוטומה ראשונה. והוכח שגם ΓA היא אפוטומה.

לפיכך, אם קו ישר רציונלי נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, כל אחד משני הקטעים הוא קו אי־רציונלי הקרוי אפוטומה; מש"ל.

אם שלוש מזוויותיו של מחומש שווה־צלעות — בין שהן רצופות ובין שאינן רצופות — שוות, המחומש יהיה שווה־זוויות.

במחומש שווה־הצלעות $AB\Gamma\Delta E$ תהיינה תחילה שלוש הזוויות הרצופות שבנקודות A, B, Γ שוות זו לזו. אומר אני שהמחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה־זוויות.

יחברו $AG, BE, Z\Delta$. ומאחר ששני הקווים $\Gamma B, BA$ שווים בהתאמה לשני הקווים BA, AE , והזווית ΓBA שווה לזווית BAE , הבסיס AG שווה לבסיס BE , המשולש $AB\Gamma$ שווה למשולש ABE , והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שעליהן נשענות הצלעות השוות: הזווית $B\Gamma A$ שווה לזווית BEA , והזווית ABE שווה לזווית ΓAB . לכן גם הצלע AZ שווה לצלע BZ . והוכח גם שהקו AG כולו שווה לקו BE כולו; לפיכך גם השארית $Z\Gamma$ שווה לשארית ZE . וגם $\Gamma\Delta$ שווה ל־ ΔE . הנה אפוא שני הקווים $\Gamma\Delta, Z\Gamma$ שווים בהתאמה לשני הקווים $ZE, E\Delta$, ובסיסם $Z\Delta$ משותף; לפיכך הזווית $Z\Gamma\Delta$ שווה לזווית $Z\Delta E$. והוכח גם שהזווית $B\Gamma A$ שווה לזווית AEB ; לכן הזווית השלמה $B\Gamma\Delta$ שווה לזווית השלמה AED . אך הזווית $B\Gamma\Delta$ הונחה שווה לזווית שב־ A , B ; לפיכך גם הזווית AED שווה לזווית שב־ B, A . ובדומה נוכיח שגם הזווית $\Gamma\Delta E$ שווה לזווית שב־ A, B, Γ . לפיכך המחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה־זוויות.

עתה אל תהיינה הזוויות הרצופות שוות, אלא תהיינה הזוויות שבנקודות A, Γ, Δ שוות. אומר אני שגם כך המחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה־זוויות.

יחבר $B\Delta$. ומאחר ששני הקווים BA, AE שווים בהתאמה לשני הקווים $B\Gamma, \Gamma\Delta$ וכוללים זוויות שוות, הבסיס BE שווה לבסיס $B\Delta$, המשולש ABE שווה למשולש $B\Gamma\Delta$, והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שעליהן נשענות הצלעות השוות. לפיכך הזווית AEB שווה לזווית $\Gamma\Delta B$. וגם הזווית BEA שווה לזווית $B\Delta E$, מפני שהצלע BE שווה לצלע $B\Delta$. לכן הזווית השלמה AED שווה לזווית השלמה $\Gamma\Delta E$. אך הזווית $\Gamma\Delta E$ הונחה שווה לזווית שב־ A ,

Γ ; לפיכך גם הזווית $\angle AEA$ שווה לזווית שב- Γ, A . ומאותם הטעמים גם הזווית $\angle AB\Gamma$ שווה לזווית שב- Δ, Γ, A . לפיכך המחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה-זוויות; מש"ל.

אם קווים ישרים מונחים מול שתי זוויות רצופות של מחומש שווה-צלעות ושווה-זוויות, הם חותכים זה את זה ביחס קיצוני ואמצעי, וקטעיהם הגדולים שווים לצלע המחומש.

במחומש שווה-הצלעות ושווה-הזוויות $AB\Gamma\Delta E$ יהיו הקווים הישרים AE, BE מונחים מול שתי הזוויות הרצופות שב- B, A , ויחתכו זה את זה בנקודה Θ . אומר אני שכל אחד מהם נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Θ , ושקטעיהם הגדולים שווים לצלע המחומש.

יחוסם המעגל $AB\Gamma\Delta E$ סביב המחומש $AB\Gamma\Delta E$. ומאחר ששני הקווים EA, AB שווים בהתאמה לשני הקווים BE, AB , וכוללים זוויות שוות, הבסיס BE שווה לבסיס AB , המשולש ABE שווה למשולש $AB\Gamma$, והזוויות הנותרות שוות בהתאמה לזוויות הנותרות שעליהן נשענות הצלעות השוות. לפיכך הזווית $\angle BAE$ שווה לזווית $\angle ABE$; לכן הזווית $\angle A\Theta E$ כפולה מן הזווית $\angle BAE$. וגם הזווית $\angle EAE$ כפולה מן הזווית $\angle BAE$, מפני שהקשת $\angle EAE$ כפולה מן הקשת $\angle BAE$; לפיכך הזווית $\angle \Theta AE$ שווה לזווית $\angle A\Theta E$. מכאן שהקו הישר ΘE שווה ל- EA , כלומר ל- AB . ומאחר שהקו הישר BA שווה ל- AE , גם הזווית $\angle ABE$ שווה לזווית $\angle AEB$. אך הוכח שהזווית $\angle ABE$ שווה לזווית $\angle BAE$; לפיכך גם הזווית $\angle BEA$ שווה לזווית $\angle BAE$. ולשני המשולשים $ABE, AB\Theta$ משותפת הזווית $\angle ABE$; לכן הזווית הנותרת $\angle BAE$ שווה לזווית הנותרת $\angle A\Theta B$. לפיכך המשולש ABE שווה-זוויות לזוויות למשולש $AB\Theta$; לכן כפי ש- EB אל BA , כך AB אל ΘB . אך BA שווה ל- ΘE ; לפיכך כפי ש- BE אל ΘE , כך ΘE אל ΘB . ו- BE גדול מ- ΘE ; לכן גם

EO גדול מ- $B\Theta$. לפיכך BE נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Θ , והקטע הגדול ΘE שווה לצלע המחומש. ובדומה נוכיח שגם AF נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה Θ , ושקטעו הגדול $\Gamma\Theta$ שווה לצלע המחומש; מש"ל.

אם מצרפים את צלע המשושה ואת צלע המעושר החסומים באותו מעגל, הקו הישר השלם נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, והקטע הגדול שלו הוא צלע המשושה.

יהי המעגל $AB\Gamma$; מבין הצורות החסומות במעגל $AB\Gamma$, תהי $B\Gamma$ צלע מעושר ותהי $\Gamma\Delta$ צלע משושה, ויהיו על קו ישר אחד. אומר אני שהקו הישר השלם BD נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ושהקטע הגדול שלו הוא $\Gamma\Delta$.

תימצא מרכז המעגל בנקודה E , ויחברו EA , EB , EC , ED יוארך אל A . מאחר ש- $B\Gamma$ היא צלע מעושר שווה-צלעות, הקשת AGB גדולה פי חמישה מן הקשת $B\Gamma$; לפיכך הקשת AF גדולה פי ארבעה מן הקשת ΓB . וכפי שהקשת AF אל ΓB , כך הזווית $AE\Gamma$ אל הזווית ΓEB ; לכן הזווית $AE\Gamma$ גדולה פי ארבעה מן הזווית ΓEB . ומאחר שהזווית $EB\Gamma$ שווה לזווית ΓEB , הזווית $AE\Gamma$ כפולה מן הזווית ΓEB . ומאחר שהקו הישר EF שווה ל- $\Gamma\Delta$ — שהרי כל אחד מהם שווה לצלע המשושה החסום במעגל $AB\Gamma$ — גם הזווית ΓEA שווה לזווית ΓAE ; לפיכך הזווית ΓEB כפולה מן הזווית $EA\Gamma$. אך הוכח שהזווית $AE\Gamma$ כפולה מן הזווית ΓEB ; לכן הזווית $AE\Gamma$ גדולה פי ארבעה מן הזווית $EA\Gamma$. והוכח גם שהזווית $AE\Gamma$ גדולה פי ארבעה מן הזווית BEG ; לפיכך הזווית $EA\Gamma$ שווה לזווית BEG . ולשני המשולשים $BE\Gamma$, BEA משותפת הזווית EBA ; לכן הזווית הנותרת BEA שווה לזווית הנותרת ΓEB . לפיכך המשולש EBA שווה-זוויות למשולש $EB\Gamma$; לכן כפי ש- ΔB אל BE , כך EB אל $B\Gamma$. אך EB

שווה ל- $\Gamma\Delta$. לפיכך כפי ש- $B\Delta$ אל $\Delta\Gamma$, כך $\Delta\Gamma$ אל ΓB . ו- $B\Delta$ גדול מ- $\Delta\Gamma$; לכן גם $\Delta\Gamma$ גדול מ- ΓB . לפיכך הקו הישר BA נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, והקטע הגדול שלו הוא $\Delta\Gamma$; מש"ל.

אם מחומש שווה-צלעות נחסם במעגל, הריבוע שעל צלע המחומש שווה לסכום הריבועים שעל צלע המשושה ועל צלע המעושר החסומים באותו מעגל.

יהי המעגל $AB\Gamma\Delta E$, ובו ייחסם המחומש שווה-הצלעות $AB\Gamma\Delta E$. אומר אני שהריבוע שעל צלע המחומש $AB\Gamma\Delta E$ שווה לסכום הריבועים שעל צלע המשושה ועל צלע המעושר החסומים במעגל $AB\Gamma\Delta E$.

תימצא מרכז המעגל בנקודה Z ; יחובר AZ ויוארך אל הנקודה H , יחובר ZB , ומ- Z יורד אל AB האנך $Z\Theta$ ויוארך אל K ; יחוברו AK , KB , ושוב מ- Z יורד אל AK האנך $Z\Lambda$ ויוארך אל M , יחובר KN . מאחר שהקשת $AB\Gamma H$ שווה לקשת $AE\Delta H$, ומתוכן הקשת $AB\Gamma$ שווה לקשת $AE\Delta$, גם הקשת הנותרת ΓH שווה לקשת הנותרת $H\Delta$. הקשת $\Gamma\Delta$ מתאימה לצלע המחומש; לפיכך הקשת ΓH מתאימה לצלע המעושר. ומאחר ש- ZA שווה ל- ZB ו- $Z\Theta$ אנך, הזווית AZK שווה לזווית KZB . לכן גם הקשת AK שווה לקשת KB ; לפיכך הקשת AB כפולה מן הקשת BK , ולכן הקו הישר AK הוא צלע מעושר. ומאותם הטעמים גם הקשת AK כפולה מן הקשת KM . ומאחר שהקשת AB כפולה מן הקשת BK , והקשת $\Gamma\Delta$ שווה לקשת AB , גם הקשת $\Gamma\Delta$ כפולה מן הקשת BK . אך הקשת $\Gamma\Delta$ כפולה גם מן הקשת ΓH ; לפיכך הקשת ΓH שווה לקשת BK . והקשת BK כפולה מן הקשת KM , מפני שגם KA כפולה ממנה; לכן גם הקשת ΓH כפולה מן הקשת KM . וגם הקשת ΓB כפולה מן הקשת

BK, שהרי הקשת ΓB שווה לקשת BA. לפיכך הקשת HB כולה כפולה מן הקשת BM כולה; לכן גם הזווית HZB כפולה מן הזווית BZM. והזווית HZB כפולה גם מן הזווית ZAB, שהרי הזווית ZAB שווה לזווית ABZ. לפיכך הזווית BZN שווה לזווית ZAB. ולשני המשולשים ABZ, BZN משותפת הזווית ABZ; לכן הזווית הנותרת AZB שווה לזווית הנותרת BNZ. לפיכך המשולש ABZ שווה לזוויות למשולש BZN; לכן כפי שהקו הישר AB אל BZ, כך ZB אל BN. לפיכך המלבן הכלול בין AB, BN שווה לריבוע שעל BZ. ושוב, מאחר ש־AA שווה ל־AK, ו־AN משותף ומאונך, הבסיס KN שווה לבסיס AN; לכן הזווית AKN שווה לזווית LAN. אך הזווית LAN שווה לזווית KBN; לפיכך גם הזווית AKN שווה לזווית KBN. ולשני המשולשים AKB, KBN משותפת הזווית שב־A; לכן הזווית הנותרת AKB שווה לזווית הנותרת KNA. לפיכך המשולש KBA שווה לזוויות למשולש KNA; לכן כפי שהקו הישר BA אל AK, כך KA אל AN. לפיכך המלבן הכלול בין BA, AN שווה לריבוע שעל AK. והוכח גם שהמלבן הכלול בין AB, BN שווה לריבוע שעל BZ; לכן סכום המלבן הכלול בין AB, BN והמלבן הכלול בין BA, AN — שהוא הריבוע שעל BA — שווה לסכום הריבועים שעל BZ, AK. והנה BA היא צלע מחומש, BZ צלע משושה, ו־AK צלע מעושר.

לפיכך הריבוע שעל צלע המחומש שווה לסכום הריבועים שעל צלע המשושה ועל צלע המעושר החסומים באותו מעגל; מש״ל.

אם מחומש שווה־צלעות נחסם במעגל שקוטרו רציונלי, צלע המחומש היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן.

במעגל $AB\Gamma\Delta E$ שקוטרו רציונלי ייחסם המחומש שווה־הצלעות $AB\Gamma\Delta E$.
אומר אני שצלע המחומש היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן.

תימצא מרכז המעגל בנקודה Z ; יחוברו AZ , ZB ויוארכו אל הנקודות H , Θ ,
יחובר $A\Gamma$, ותונח ZK כרבע AZ . AZ רציונלי, ולכן גם ZK רציונלי. וגם BZ
רציונלי; לפיכך BK כולו רציונלי. ומאחר שהקשת $A\Gamma H$ שווה לקשת $A\Delta H$,
ומתוכן הקשת $AB\Gamma$ שווה לקשת AED , הקשת הנוותרת ΓH שווה לקשת
הנוותרת $H\Delta$. ואם נחבר את $A\Delta$, הזוויות שב־ Λ מתקבלות ישרות, ו־ $\Gamma\Delta$ כפול
מ־ $\Gamma\Lambda$. ומאותם הטעמים גם הזוויות שב־ M ישרות, ו־ $A\Gamma$ כפול מ־ ΓM . מאחר
שהזווית $A\Lambda\Gamma$ שווה לזווית AMZ , ולשני המשולשים $A\Gamma\Lambda$, AMZ ,
הזווית $\Lambda A\Gamma$, הזווית הנוותרת $A\Gamma\Lambda$ שווה לזווית הנוותרת MZA . לפיכך
המשולש $A\Gamma\Lambda$ שווה־זוויות למשולש AMZ ; לכן כפי ש־ $\Lambda\Gamma$ אל $\Gamma\Lambda$, כך MZ
אל ZA . ובכפל האיברים הראשונים: כפי שכפל $\Lambda\Gamma$ אל $\Gamma\Lambda$, כך כפל MZ אל
 ZA . אך כפי שכפל MZ אל ZA , כך MZ אל מחצית ZA ; לכן כפי שכפל $\Lambda\Gamma$
אל $\Gamma\Lambda$, כך MZ אל מחצית ZA . ובמחצית האיברים השניים: כפי שכפל $\Lambda\Gamma$
אל מחצית $\Gamma\Lambda$, כך MZ אל רבע ZA . והנה כפל $\Lambda\Gamma$ הוא $\Delta\Gamma$, מחצית $\Gamma\Lambda$ היא
 ΓM , ורבע ZA הוא ZK ; לפיכך כפי ש־ $\Delta\Gamma$ אל ΓM , כך MZ אל ZK .
ובהרכבה: כפי שהקו השלם $\Delta\Gamma M$ אל ΓM , כך MK אל KZ ; ולכן כפי
שהריבוע שעל הקו השלם $\Delta\Gamma M$ אל הריבוע שעל ΓM , כך הריבוע שעל MK
אל הריבוע שעל KZ . וכאשר הקו הישר המונח מול שתי צלעות של המחומש,
כגון $A\Gamma$, נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול שווה לצלע המחומש,
כלומר ל־ $\Delta\Gamma$; והקטע הגדול בצירוף מחצית השלם גדול בריבוע פי חמישה
ממחצית השלם. ומאחר ש־ ΓM היא מחצית $A\Gamma$ השלם, הריבוע שעל $\Delta\Gamma M$
כקו אחד גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΓM . אך הוכח שכפי שהריבוע שעל

$\Delta\Gamma M$ כקו אחד אל הריבוע שעל ΓM , כך הריבוע שעל MK אל הריבוע שעל KZ ; לפיכך הריבוע שעל MK גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KZ . והריבוע שעל KZ רציונלי, שהרי הקוטר רציונלי; לכן גם הריבוע שעל MK רציונלי, ומכאן MK רציונלי. ומאחר ש־ BZ גדול פי ארבעה מ־ ZK , הרי BK גדול פי חמישה מ־ KZ ; לכן הריבוע שעל BK גדול פי עשרים וחמישה מן הריבוע שעל KZ . אך הריבוע שעל MK גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KZ ; לפיכך הריבוע שעל BK גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KM . לכן לריבוע שעל BK אל הריבוע שעל KM אין יחס אשר למספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך BK חסר־מידה באורך עם KM . ושניהם רציונליים; לכן BK , KM הם קווים רציונליים בני־מידה בריבוע בלבד. ואם מקו רציונלי נגרע קו רציונלי שהוא בן־מידה עם השלם בריבוע בלבד, השארית היא האי־רציונלי הקרוי אפוטומה; לפיכך MB היא אפוטומה, והקו המצורף לה הוא MK . אומר אני שהיא גם אפוטומה רביעית. יהי הריבוע שעל N שווה לעודף שבו הריבוע שעל BK גדול מן הריבוע שעל KM ; לפיכך BK גדול בריבוע מ־ KM בריבוע שעל N . ומאחר ש־ KZ בן־מידה עם ZB , הרי בהרכבה גם KB בן־מידה עם ZB . אך BZ בן־מידה עם $B\theta$; לפיכך גם BK בן־מידה עם $B\theta$. ומאחר שהריבוע שעל BK גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KM , יחס הריבוע שעל BK אל הריבוע שעל KM הוא כיחס חמישה לאחד. בהמרה אפוא יחס הריבוע שעל BK אל הריבוע שעל N הוא כיחס חמישה לארבעה, ולא כיחס מספר ריבועי אל מספר ריבועי; לפיכך BK חסר־מידה עם N . לכן BK גדול בריבוע מ־ KM בריבוע שעל קו החסר־מידה עמו. ומאחר שהשלם BK גדול בריבוע מן הקו המצורף KM בריבוע שעל קו החסר־מידה עמו, והשלם BK בן־מידה עם הקו הרציונלי הנתון $B\theta$, הרי MB היא אפוטומה רביעית. המלבן הכלול בין קו רציונלי לאפוטומה רביעית הוא אי־רציונלי, וגם הקו שריבועו שווה לו אי־רציונלי

ונקרא הקו הקטן. אך ריבועו של AB שווה למלבן הכלול בין ΘB , BM , מפני שאם נחבר את $A\Theta$ יהיה המשולש $AB\Theta$ שווה־זוויות למשולש ABM , ויתקבל שכפי ש־ ΘB אל BA , כך AB אל BM .

לפיכך AB , צלע המחומש, היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן; מש״ל.

אם משולש שווה־צלעות נחסם במעגל, הריבוע שעל צלע המשולש גדול פי שלושה מן הריבוע שעל רדיוס המעגל.

יהי המעגל $AB\Gamma$, ובו ייחסם המשולש שווה־הצלעות $AB\Gamma$. אומר אני שהריבוע שעל צלע אחת של המשולש $AB\Gamma$ גדול פי שלושה מן הריבוע שעל רדיוס המעגל $AB\Gamma$.

תימצא מרכז המעגל $AB\Gamma$ בנקודה Δ ; יחובר $A\Delta$ ויוארך אל E , ויחובר BE . מאחר שהמשולש $AB\Gamma$ שווה־צלעות, הקשת $B\Gamma$ היא שליש מהיקף המעגל $AB\Gamma$. לפיכך הקשת BE היא שישית מהיקף המעגל, ולכן הקו הישר BE הוא צלע משושה; מכאן שהוא שווה לרדיוס ΔE . ומאחר ש־ AE כפול מ־ ΔE , הריבוע שעל AE גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל ΔE , כלומר מן הריבוע שעל BE . אך הריבוע שעל AE שווה לסכום הריבועים שעל AB , BE ; לפיכך סכום הריבועים שעל AB , BE גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל BE . בחיסור אפוא הריבוע שעל AB גדול פי שלושה מן הריבוע שעל BE . אך BE שווה ל־ ΔE ; לפיכך הריבוע שעל AB גדול פי שלושה מן הריבוע שעל ΔE .

לפיכך הריבוע שעל צלע המשולש גדול פי שלושה מן הריבוע שעל הרדיוס; מש״ל.

לבנות פירמידה ולחסום אותה בכדור הנתון, ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הפירמידה.

יונח AB , קוטר הכדור הנתון, ויחתך בנקודה Γ כך ש- ΓA יהיה כפול מ- ΓB ; על AB יתואר חצי המעגל $A\Delta B$, ומן הנקודה Γ יועלה $\Gamma\Delta$ מאונך ל- AB , ויחובר ΔA . ויונח המעגל EZH שרדיוסו שווה ל- $\Delta\Gamma$, ובמעגל EZH ייחסם המשולש שווה-הצלעות EZH ; תימצא מרכז המעגל בנקודה Θ , ויחברו ΘE , ΘZ , ΘH . מן הנקודה Θ יועמד ΘK מאונך למישור המעגל EZH , ועל הקרן ΘK ייחתך הקטע ΘK השווה לקו הישר $A\Gamma$; ויחברו KE , KZ , KH . ומאחר ש- ΘK מאונך למישור המעגל EZH , הוא יוצר זוויות ישרות עם כל הקווים הישרים הנפגשים בו ונמצאים במישור המעגל EZH . וכל אחד מן ΘE , ΘZ , ΘH נפגש בו; לפיכך ΘK מאונך לכל אחד מן ΘE , ΘZ , ΘH . ומאחר ש- ΓA שווה ל- $\Gamma\Delta$, ΘK שווה ל- ΘE , והם כוללים זוויות ישרות, הבסיס ΔA שווה לבסיס KE . ומאותם הטעמים גם כל אחד מן KZ , KH שווה ל- ΔA ; לפיכך שלושת הקווים KE , KZ , KH שווים זה לזה. ומאחר ש- ΓA כפול מ- AB , ΓB , גדול פי שלושה מ- $B\Gamma$. וכפי ש- AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ΔA אל הריבוע שעל $\Delta\Gamma$, כפי שיוכח להלן; לפיכך הריבוע שעל ΔA גדול פי שלושה מן הריבוע שעל $\Delta\Gamma$. וגם הריבוע שעל ZE גדול פי שלושה מן הריבוע שעל ΘE , ו- $\Delta\Gamma$ שווה ל- ΘE ; לפיכך גם ΔA שווה ל- EZ . אך הוכח ש- ΔA שווה לכל אחד מן KE , KZ , KH ; לפיכך גם כל אחד מן EZ , ZH , HE שווה לכל אחד מן KE , KZ , KH . לכן ארבעת המשולשים EZH , KEZ , KZH , KEH שווים-הצלעות. ובנתה אפוא פירמידה המורכבת מארבעה משולשים שווים-הצלעות, שבסיסה המשולש EZH וקודקודה הנקודה K .

עתה יש לחסום אותה בכדור הנתון ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הפירמידה.

יוארך $\Theta\Lambda$ בקו ישר עם $K\Theta$, ותונח $\Theta\Lambda$ שווה ל- ΓB . ומאחר שכפי ש- $\Lambda\Gamma$ אל $\Gamma\Delta$ כך $\Gamma\Delta$ אל ΓB , ו- $\Lambda\Gamma$ שווה ל- $\Gamma\Delta$, $K\Theta$ שווה ל- ΘE , ו- ΓB שווה ל- $\Theta\Lambda$, הרי כפי ש- $K\Theta$ אל ΘE כך $E\Theta$ אל $\Theta\Lambda$. לפיכך המלבן הכלול בין $\Theta\Lambda$, $K\Theta$ שווה לריבוע שעל $E\Theta$. וכל אחת מן הזוויות $K\Theta E$, $E\Theta\Lambda$ ישרה; לכן חצי המעגל שיתואר על $K\Lambda$ יעבור גם דרך E . ואם, בעוד $K\Lambda$ קבוע, יסובב חצי המעגל עד שישוב למקום שממנו החל לנוע, הוא יעבור גם דרך הנקודות Z , H , לאחר שיחזרו ΛH , $Z\Lambda$ והזוויות שב- Z , H יהיו ישרות באותו אופן; והפירמידה תהיה חסומה בכדור הנתון. שהרי $K\Lambda$ קוטר הכדור, שווה לקוטר הכדור הנתון AB , מפני ש- $K\Theta$ הונח שווה ל- $\Lambda\Gamma$ ו- $\Theta\Lambda$ ל- ΓB .

אומר אני שריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הפירמידה.

שהרי מאחר ש- $\Lambda\Gamma$ כפול מ- AB , ΓB גדול פי שלושה מ- $B\Gamma$; ובהמרה BA גדול פי אחד וחצי מ- $\Lambda\Gamma$. וכפי ש- BA אל $\Lambda\Gamma$, כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל $\Lambda\Delta$. לפיכך גם הריבוע שעל BA גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל $\Lambda\Delta$. והנה BA הוא קוטר הכדור הנתון, ו- $\Lambda\Delta$ שווה לצלע הפירמידה.

לפיכך ריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הפירמידה; מש"ל.

לְמָה

יש להוכיח שכפי ש- AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל $\Lambda\Delta$ אל הריבוע שעל $\Lambda\Gamma$.

תונח שרטוט חצי המעגל, ויחובר ΔB ; על $A\Gamma$ ייבנה הריבוע $E\Gamma$, ותושלם המקבילית ZB . מאחר שהמשולש ΔAB שווה־זוויות למשולש $\Delta A\Gamma$, כפי ש־ BA אל ΔA כך ΔA אל $A\Gamma$; לפיכך המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$ שולל ΔA . ומאחר שכפי ש־ AB אל $B\Gamma$ כך EB אל BZ , ו־ EB הוא המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$ — שהרי EA שווה ל־ $A\Gamma$ — ואילו BZ הוא המלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB , הרי כפי ש־ AB אל $B\Gamma$ כך המלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$ אל המלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB . והמלבן הכלול בין BA , $A\Gamma$ שווה לריבוע שעל ΔA , ואילו המלבן הכלול בין $A\Gamma$, ΓB שווה לריבוע שעל $\Delta\Gamma$; שהרי $\Delta\Gamma$, האנך, הוא ממצע פרופורציונלי בין קטעי הבסיס $A\Gamma$, ΓB , מפני שהזווית $\angle ADB$ ישרה. לפיכך כפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל ΔA אל הריבוע שעל $\Delta\Gamma$; מש״ל.

לבנות תמניון ולחסום אותו באותו כדור שבו נחסמו הגופים הקודמים, ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור כפול מן הריבוע שעל צלע התמניון.

יונח AB , קוטר הכדור הנתון, וייחצה בנקודה Γ ; על AB יתואר חצי המעגל ΔAB , ומן Γ יועלה $\Gamma\Delta$ מאונך ל־ AB , ויחובר ΔB . ויונח הריבוע $EZH\Theta$ שכל אחת מצלעותיו שווה ל־ ΔB , ויחברו ΘZ , EH . מן הנקודה K יועמד $K\Lambda$ מאונך למישור הריבוע $EZH\Theta$, ויוארך לצד האחר של המישור כ־ KM ; ועל כל אחד מן $K\Lambda$, KM ייחתך קטע השווה לאחד מן ΘK , HK , ZK , EK , כך שכל אחד מן $K\Lambda$, KM יהיה שווה להם; ויחברו ΛE , ΛZ , ΛH , $\Lambda\Theta$, ME , MZ , MH . ומאחר ש־ KE שווה ל־ $K\Theta$ והזווית $\angle EKO$ ישרה, הריבוע שעל ΘE כפול מן הריבוע שעל EK . ושוב, מאחר ש־ AK שווה ל־ KE והזווית $\angle AKE$ ישרה, הריבוע שעל EA כפול מן הריבוע שעל EK . והוכח שגם הריבוע שעל ΘE כפול מן הריבוע שעל EK ; לפיכך הריבוע שעל ΛE שווה לריבוע שעל $E\Theta$, ולכן ΛE שווה ל־ $E\Theta$. ומאותם הטעמים גם $\Lambda\Theta$ שווה ל־ $E\Theta$; לפיכך המשולש

$\Lambda E\Theta$ שווה־צלעות. ובדומה נוכיח שכל אחד מן המשולשים הנותרים, שבסיסיהם צלעות הריבוע $EZH\Theta$ וקודקודיהם הנקודות Λ, M , שווה־צלעות. נבנה אפוא תמניון התחום בשמונה משולשים שוו־צלעות.

עתה יש לחסום אותו בכדור הנתון ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור כפול מן הריבוע שעל צלע התמניון.

מאחר ששלושת הקווים $\Lambda K, KM, KE$ שווים זה לזה, חצי המעגל שיתואר על ΛM יעבור גם דרך E . ומאותם הטעמים, אם בעוד ΛM קבוע יסובב חצי המעגל עד שישוב למקום שממנו החל לנוע, הוא יעבור גם דרך הנקודות Z, H, Θ , והתמניון יהיה חסום בכדור. אומר אני שגם בכדור הנתון. שהרי מאחר ש־ ΛK שווה ל־ KE, KM משותף, והם כוללים זוויות ישרות, הבסיס ΛE שווה לבסיס EM . ומאחר שהזווית ΛEM ישרה — שהרי היא בחצי מעגל — הריבוע שעל ΛM כפול מן הריבוע שעל ΛE . ושוב, מאחר ש־ $\Lambda \Gamma$ שווה ל־ ΓB , AB כפול מ־ $B\Gamma$. וכפי ש־ AB אל $B\Gamma$, כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BA ; לפיכך הריבוע שעל AB כפול מן הריבוע שעל BA . והוכח שגם הריבוע שעל ΛM כפול מן הריבוע שעל ΛE . והריבוע שעל ΔB שווה לריבוע שעל ΛE , שהרי $E\Theta$ הונח שווה ל־ ΔB . לכן גם הריבוע שעל AB שווה לריבוע שעל ΛM , ולפיכך AB שווה ל־ ΛM . והנה AB הוא קוטר הכדור הנתון; לפיכך ΛM שווה לקוטר הכדור הנתון.

לכן התמניון חסום בכדור הנתון; ויחד עם זאת הוכח שריבוע קוטר הכדור כפול מן הריבוע שעל צלע התמניון; מש״ל.

לבנות קובייה ולחסום אותה באותו כדור שבו נחסמה הפירמידה, ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור גדול פי שלושה מן הריבוע שעל צלע הקובייה.

יונח AB, קוטר הכדור הנתון, וייחתך בנקודה Γ כך ש- $A\Gamma$ יהיה כפול מ- ΓB ; על AB יתואר חצי המעגל AAB, ומן Γ יועלה $\Gamma\Delta$ מאונך ל- AB , ויחובר AB. ויונח הריבוע EZHΘ שצלעו שווה ל- AB . מן הנקודות E, Z, H, Θ יועלו EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN מאונכים למישור הריבוע EZHΘ, ועל כל אחד מהם ייחתך קטע השווה לאחת מצלעות ΘE , $H\Theta$, ZH , EZ , כך שכל אחד מן EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN יהיה שווה להן; ויחברו KA , ΛM , MN , NK . נבנתה אפוא הקובייה ZN התחומה בשישה ריבועים שווים. עתה יש לחסום אותה בכדור הנתון ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור גדול פי שלושה מן הריבוע שעל צלע הקובייה.

יחברו KH , EH . ומאחר שהזווית KEH ישרה, מפני ש- KE מאונך למישור EH ולכן גם לקו הישר EH, חצי המעגל שיתואר על KH יעבור גם דרך הנקודה E. ושוב, מאחר ש- HZ מאונך לכל אחד מן $Z\Lambda$, ZE , הרי HZ מאונך גם למישור ZK; לכן אם נחבר את ZK, יהיה HZ מאונך גם ל- ZK , ומשעם זה חצי המעגל שיתואר על HK יעבור גם דרך Z. ובדומה יעבור דרך שאר נקודות הקובייה. לכן אם, בעוד KH קבוע, יסובב חצי המעגל עד שישוב למקום שממנו החל לנוע, תהיה הקובייה חסומה בכדור. אומר אני שגם בכדור הנתון. שהרי מאחר ש- HZ שווה ל- ZE והזווית שב- Z ישרה, הריבוע שעל EH כפול מן הריבוע שעל EZ. אך EZ שווה ל- EK ; לפיכך הריבוע שעל EH כפול מן הריבוע שעל EK. לכן סכום הריבועים שעל EK , HE , כלומר הריבוע שעל HK, גדול פי שלושה מן הריבוע שעל EK. ומאחר ש- AB גדול פי שלושה מ- $B\Gamma$, וכפי ש- AB אל $B\Gamma$ כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל $B\Delta$, הרי הריבוע שעל AB גדול פי שלושה מן הריבוע שעל BA. והוכח שגם הריבוע שעל HK גדול פי שלושה מן הריבוע שעל KE. ו- KE הונח שווה ל- AB ; לפיכך

KH שווה ל־AB. והנה AB הוא קוטר הכדור הנתון; לכן גם KH שווה לקוטר הכדור הנתון.

לפיכך הקובייה חסומה בכדור הנתון; ויחד עם זאת הוכח שריבוע קוטר הכדור גדול פי שלושה מן הריבוע שעל צלע הקובייה; מש״ל.

לבנות עשרימון ולחסום אותו באותו כדור שבו נחסמו הצורות האמורות לעיל, ולהוכיח שצלע העשרימון היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן.

יונה AB, קוטר הכדור הנתון, ויחתך בנקודה Γ כך ש־ AG יהיה גדול פי ארבעה מ־ GB ; על AB יתואר חצי המעגל $A\Delta B$, ומן Γ יועלה הקו הישר $\Gamma\Delta$ בזווית ישרות ל־AB, ויחבר ΔB . ויונה המעגל $EZH\Theta K$ שרדיוסו יהיה שווה ל־ ΔB ; במעגל $EZH\Theta K$ ייחסם המחומש שווה־הצלעות ושווה־הזוויות $EZH\Theta K$. הקשתות $EZ, ZH, H\Theta, \Theta K, KE$ ייחצו בנקודות Λ, M, N, Ξ, O , ויחברו $\Lambda M, MN, N\Xi, \Xi O, O\Lambda, EO$. לפיכך גם המחומש $\Lambda M N \Xi O$ שווה־צלעות, והקו הישר EO הוא צלע מעושר. מן הנקודות E, Z, H, Θ, K יועמדו הקווים הישרים $E\Pi, ZP, H\Sigma, \Theta T, KY$ בזווית ישרות למישור המעגל, ושווים לרדיוס המעגל $EZH\Theta K$; ויחברו $\Pi P, P\Sigma, \Sigma T, TY, Y\Pi, \Pi\Lambda, \Lambda P, PM, M\Sigma, \Sigma N$ ויחברו $E\Pi, KY$ מאונך לאותו מישור, ומהאחר שכל אחד מן $E\Pi, KY$ מאונך לאותו מישור, $NT, T\Xi, \Xi Y, YO, O\Pi$ מקביל ל־ KY . והוא גם שווה לו; והקווים הישרים המחברים באותו כיוון את קצותיהם של קווים שווים ומקבילים, שווים ומקבילים. לפיכך ΠY שווה ומקביל ל־ EK . אך EK היא צלע המחומש שווה־הצלעות החסום במעגל $EZH\Theta K$; לכן גם ΠY היא צלע אותו מחומש שווה־צלעות. ומאותם הטעמים כל אחד מן $\Pi P, P\Sigma, \Sigma T, TY$ הוא צלע המחומש שווה־הצלעות החסום במעגל $EZH\Theta K$; לפיכך המחומש $\Pi P \Sigma T Y$ שווה־צלעות. ומאחר ש־ ΠE היא צלע

משושה, EO צלע מעושר, והזווית PEO ישרה, PO היא צלע מחומש; שהרי הריבוע שעל צלע המחומש שווה לסכום הריבועים שעל צלע המשושה ועל צלע המעושר החסומים באותו מעגל. ומאותם הטעמים גם OY היא צלע מחומש. וגם PY היא צלע מחומש; לפיכך המשולש POY שווה-צלעות. ומאותם הטעמים כל אחד מן המשולשים PAB, PMΣ, ΣNT, TΕY שווה-צלעות. ומאחר שהוכח שכל אחד מן PO, ΠA, הוא צלע מחומש, וגם AO היא צלע מחומש, המשולש ΠAO שווה-צלעות. ומאותם הטעמים כל אחד מן המשולשים APM, MΣN, NTΕ, EYO שווה-צלעות. תימצא מרכז המעגל EZHΘK בנקודה Φ; מן Φ יועמד ΦΩ מאונך למישור המעגל, ויוארך לצד האחר כ-ΦΨ. ייתכן ΦX כצלע משושה, וכל אחד מן ΦΨ, XΩ כצלע מעושר; ויחברו ΦX, PE, ΠΩ, PX, YΩ, EΦ, AΦ, ΛΨ, ΨM מאונך למישור המעגל, ΦX מקביל ל-PE. והם גם שווים; לפיכך גם EΦ, PX שווים ומקבילים. אך EΦ היא צלע משושה; לכן גם PX צלע משושה. ומאחר ש-PX צלע משושה, XΩ צלע מעושר, והזווית PXΩ ישרה, ΠΩ היא צלע מחומש. ומאותם הטעמים גם YΩ צלע מחומש; שהרי אם נחבר את ΦK, XY, הם יהיו שווים ונגדיים, ו-ΦK, בהיותו רדיוס, הוא צלע משושה; לכן גם XY צלע משושה. ו-XΩ צלע מעושר והזווית YXΩ ישרה; לפיכך YΩ צלע מחומש. וגם PY צלע מחומש; לכן המשולש PYΩ שווה-צלעות. ומאותם הטעמים כל אחד מן המשולשים הנותרים, שבסיסיהם הקווים הישרים ΠP, PΣ, ΣT, TY וקודקודם הנקודה Ω, שווה-צלעות. ושוב, מאחר ש-ΦA צלע משושה, ΦΨ צלע מעושר, והזווית AΦΨ ישרה, ΛΨ היא צלע מחומש. ומאותם הטעמים, אם נחבר את MΦ שהיא צלע משושה, יתקבל שגם MΨ צלע מחומש. וגם AM צלע מחומש; לפיכך המשולש AMΨ שווה-צלעות. ובדומה יוכח שכל אחד מן המשולשים הנותרים, שבסיסיהם MN, NE, EO,

OA וקודקודם הנקודה Ψ , שווה־צלעות. נבנה אפוא עשרימון התחום בעשרים משולשים שווה־צלעות.

עתה יש לחסום אותו בכדור הנתון ולהוכיח שצלע העשרימון היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן.

מאחר ש־ ΦX היא צלע משושה ו־ $X\Omega$ צלע מעושר, $\Phi\Omega$ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה X , וקטעו הגדול הוא ΦX . לפיכך כפי ש־ $\Omega\Phi$ אל ΦX , כך ΦX אל $X\Omega$. אך ΦX שווה ל־ ΦE ו־ $X\Omega$ שווה ל־ $\Phi\Psi$; לכן כפי ש־ $\Omega\Phi$ אל ΦE , כך $E\Phi$ אל $\Phi\Psi$. והזוויות $\Omega\Phi E$, $E\Phi\Psi$ ישרות; לכן אם נחבר את הקו הישר $E\Omega$, הזווית $\Psi E\Omega$ תהיה ישרה מחמת דמיון המשולשים $\Phi E\Omega$, $\Psi E\Omega$. ומאותם הטעמים, מאחר שכפי ש־ $\Omega\Phi$ אל ΦX כך ΦX אל $X\Omega$, ו־ $\Omega\Phi$ שווה ל־ ΨX ו־ ΦX שווה ל־ $X\Pi$, הרי כפי ש־ ΨX אל $X\Pi$ כך $X\Pi$ אל $X\Omega$. ולכן שוב, אם נחבר את $\Pi\Psi$, תהיה הזווית שב־ Π ישרה; לפיכך חצי המעגל שיתואר על $\Psi\Omega$ יעבור גם דרך Π . ואם, בעוד $\Psi\Omega$ קבוע, יסובב חצי המעגל עד שישוב למקום שממנו החל לנוע, הוא יעבור דרך Π ודרך שאר נקודות העשרימון, והעשרימון יהיה חסום בכדור. אומר אני שגם בכדור הנתון. ייחצה ΦX בנקודה A . ומאחר שהקו הישר $\Phi\Omega$ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה X , ו־ ΩX הוא קטעו הקטן, הרי ΩX בצירוף מחצית הקטע הגדול, XA , גדול בריבוע פי חמישה ממחצית הקטע הגדול; לפיכך הריבוע שעל ΩA גדול פי חמישה מן הריבוע שעל $A'X$. והנה $\Psi\Omega$ כפול מ־ ΩA , ו־ ΦX כפול מ־ $A'X$; לכן הריבוע שעל $\Omega\Psi$ גדול פי חמישה מן הריבוע שעל $X\Phi$. ומאחר ש־ AG גדול פי ארבעה מ־ ΓB , AB גדול פי חמישה מ־ ΓB . וכפי ש־ AB אל ΓB , כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל ΔB ; לפיכך הריבוע שעל AB גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΔB . והוכח שגם הריבוע שעל $\Omega\Psi$ גדול פי חמישה מן הריבוע שעל ΦX . ו־ ΔB

שווה ל- ΦX , שהרי כל אחד מהם שווה לרדיוס המעגל $EZH\Theta K$; לפיכך גם AB שווה ל- $\Psi\Omega$. והנה AB הוא קוטר הכדור הנתון; לכן גם $\Psi\Omega$ שווה לקוטר הכדור הנתון. לפיכך העשרימון חסום בכדור הנתון.

אומר אני שצלע העשרימון היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן. שהרי קוטר הכדור רציונלי, וריבועו גדול פי חמישה מן הריבוע שעל רדיוס המעגל $EZH\Theta K$; לכן גם רדיוס המעגל $EZH\Theta K$ רציונלי, ומכאן שגם קוטרו רציונלי. ואם מחומש שווה־צלעות נחסם במעגל שקוטרו רציונלי, צלע המחומש היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן. וצלע המחומש $EZH\Theta K$ היא צלע העשרימון. לפיכך צלע העשרימון היא הקו האי־רציונלי הקרוי הקו הקטן.

מסקנה

מכאן ברור שריבוע קוטר הכדור גדול פי חמישה מן הריבוע שעל רדיוס המעגל שעל פיו נבנה העשרימון, ושקוטר הכדור מורכב מצלע המשושה ומפעמיים צלע המעושר החסומים באותו מעגל; מש"ל.

לבנות תריסרון ולחסום אותו באותו כדור שבו נחסמו הצורות האמורות לעיל, ולהוכיח שצלע התריסרון היא הקו האי־רציונלי הקרוי אפוטומה.

יונחו שני מישורים של הקובייה האמורה, $AB\Gamma\Delta$, ΓBEZ , המאונכים זה לזה; כל אחת מן הצלעות AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , EZ , EB , $Z\Gamma$ בנקודות H , Θ , K , Λ , M , N , Ξ ויחוברו HK , $\Theta\Lambda$, $M\Theta$, $N\Xi$. כל אחד מן NO , OE , $\Theta\Pi$ ייחתך ביחס קיצוני ואמצעי בהתאמה בנקודות P , Σ , T , ויהיו PO , OS , TI קטעיהם הגדולים. מן הנקודות P , Σ , T יועמדו PY , $\Sigma\Phi$, TX מאונכים למישורי הקובייה כלפי חוץ, ויונחו שווים ל- PO , OS , TI ; ויחוברו YB , BX

$X\Gamma$, $\Gamma\Phi$, ΦY אומר אני שהמחומש $YBX\Gamma\Phi$ שווה־צלעות, נמצא במישור אחד, וגם שווה־זוויות. יחוברו PB , ΣB , ΦB . ומאחר שהקו הישר NO נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה P ו־ PO הוא הקטע הגדול, סכום הריבועים שעל ON , NP גדול פי שלושה מן הריבוע שעל PO . אך ON שווה ל־ NB ו־ OP שווה ל־ PY ; לפיכך סכום הריבועים שעל BN , NP גדול פי שלושה מן הריבוע שעל PY . והריבוע שעל BP שווה לסכום הריבועים שעל BN , NP ; לכן הריבוע שעל BP גדול פי שלושה מן הריבוע שעל PY , ומכאן שסכום הריבועים שעל BP , PY גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל PY . אך הריבוע שעל BY שווה לסכום הריבועים שעל BP , PY ; לפיכך הריבוע שעל BY גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל YP , ולכן BY כפול מ־ PY . וגם ΦY כפול מ־ YP , מפני ש־ ΣP כפול מ־ OP , כלומר מ־ PY ; לפיכך BY שווה ל־ $Y\Phi$. ובדומה יוכח שכל אחד מן BX , $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$ שווה לכל אחד מן BY , $Y\Phi$. לכן המחומש $BY\Phi\Gamma X$ שווה־צלעות. אומר אני שהוא גם במישור אחד. מן O יועבר $O\psi$ מקביל לכל אחד מן PY , $\Sigma\Phi$, כלפי חוץ מן הקובייה, ויחוברו $\psi\Theta$, ΘX . אומר אני ש־ $\psi\Theta X$ הוא קו ישר. מאחר ש־ $\Theta\pi$ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה T ו־ πT הוא קטעו הגדול, כפי ש־ $\Theta\pi$ אל πT כך πT אל $T\Theta$. אך $\Theta\pi$ שווה ל־ ΘO , ו־ πT שווה לכל אחד מן TX , $O\psi$; לפיכך כפי ש־ ΘO אל $O\psi$, כך XT אל $T\Theta$. והנה ΘO מקביל ל־ TX , שהרי כל אחד מהם מאונך למישור BA ; ו־ $T\Theta$ מקביל ל־ $O\psi$, שהרי כל אחד מהם מאונך למישור BZ . ואם שני משולשים, כגון $\psi\Theta O$, ΘTX , ששתי צלעותיהם עומדות בפרופורציה לשתי צלעות, מוצבים יחד בזווית אחת כך שגם הצלעות המתאימות מקבילות, הקווים הישרים הנותרים יהיו על קו ישר אחד. לפיכך $\psi\Theta$ נמצא בקו ישר אחד עם ΘX . וכל קו ישר נמצא במישור אחד; לכן המחומש $YBX\Gamma\Phi$ נמצא במישור אחד.

אומר אני שהוא גם שווה־זוויות.

מאחר שהקו הישר NO נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה P ו־OP הוא הקטע הגדול, ו־OP שווה ל־OS, הרי NS נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה O ו־NO הוא הקטע הגדול. לפיכך סכום הריבועים שעל SO, NS גדול פי שלושה מן הריבוע שעל NO. אך NO שווה ל־NB ו־OS שווה ל־SF; לכן סכום הריבועים שעל SF, NS גדול פי שלושה מן הריבוע שעל NB, ומכאן שסכום הריבועים שעל NB, SF, $\Phi\Sigma$ גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל NB. והריבוע שעל SB שווה לסכום הריבועים שעל NB, SN; לפיכך סכום הריבועים שעל SF, BS, כלומר הריבוע שעל $B\Phi$, גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל NB. לכן ΦB כפול מ־BN. וגם $B\Gamma$ כפול מ־BN; לפיכך $B\Phi$ שווה ל־B Γ . ומאחר ששתי הצלעות BY, Y Φ שוות לשתי הצלעות BX, X Γ , והבסיס B Φ שווה לבסיס B Γ , הזווית BY Φ שווה לזווית BX Γ . ובדומה נוכיח שגם הזווית Y $\Phi\Gamma$ שווה לזווית BX Γ ; לפיכך שלוש הזוויות Y $\Phi\Gamma$, BY Φ , BX Γ שוות זו לזו. ואם שלוש מזוויותיו של מחומש שווה־צלעות שוות זו לזו, המחומש שווה־זוויות; לכן המחומש BY $\Phi\Gamma X$ שווה־זוויות. והוכח גם שהוא שווה־צלעות; לפיכך המחומש BY $\Phi\Gamma X$ שווה־צלעות ושווה־זוויות, והוא בנוי על הצלע B Γ של הקובייה. לכן אם נעשה אותה בנייה על כל אחת משתי־עשרה צלעות הקובייה, ייבנה גוף המוקף בשנים־עשר מחומשים שווי־צלעות ושווי־זוויות, והוא נקרא תריסרון.

עתה יש לחסום אותו בכדור הנתון ולהוכיח שצלע התריסרון היא הקו האי־רציונלי הקרוי אפוטומה.

יוארך ΨO אל Ω . לפיכך $O\Omega$ פוגש את קוטר הקובייה, והם חוצים זה את זה; שהרי הדבר הוכח במשפט שלפני האחרון בספר האחד־עשר. ייחתכו בנקודה

Ω. לכן Ω הוא מרכז הכדור החוסם את הקובייה, ו־ΩO היא מחצית צלע הקובייה. יחובר YΩ. ומאחר שהקו הישר NΣ נחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה O ו־NO הוא קטעו הגדול, סכום הריבועים שעל ΣO, NΣ גדול פי שלושה מן הריבוע שעל NO. אך NΣ שווה ל־ΨΩ, מפני שגם NO שווה ל־OΩ ו־ΨO שווה ל־OΣ. וגם OΣ שווה ל־ΨY, שהרי הוא שווה גם ל־PO; לפיכך סכום הריבועים שעל ΨY, ΩΨ גדול פי שלושה מן הריבוע שעל NO. והריבוע שעל YΩ שווה ל־סכום הריבועים שעל ΨY, ΩΨ; לכן הריבוע שעל YΩ גדול פי שלושה מן הריבוע שעל NO. וגם ריבוע רדיוס הכדור החוסם את הקובייה גדול פי שלושה מן הריבוע שעל מחצית צלע הקובייה; שהרי כבר הוכח כיצד לבנות קובייה ולחסום אותה בכדור, ולהוכיח שריבוע קוטר הכדור גדול פי שלושה מן הריבוע שעל צלע הקובייה. ואם השלם עומד כך אל השלם, גם המחצית אל המחצית; ו־NO היא מחצית צלע הקובייה. לפיכך YΩ שווה לרדיוס הכדור החוסם את הקובייה. ו־Ω הוא מרכז הכדור החוסם את הקובייה; לכן הנקודה Y נמצאת על פני הכדור. ובדומה נוכיח שכל אחד משאר קודקודי התריסרון נמצא על פני הכדור; לפיכך התריסרון חסום בכדור הנתון.

אומר אני שצלע התריסרון היא הקו האי־רציונלי הקרוי אפוטומה.

מאחר שכאשר NO נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, PO הוא הקטע הגדול, וכאשר OE נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, OΣ הוא הקטע הגדול, הרי כאשר NE השלם נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, PΣ הוא הקטע הגדול. שהרי כפי ש־NO אל OP, כך OP אל PN, והדבר נכון גם בכפלים, שכן לחלקים ולכפולותיהם השוות אותו יחס; לפיכך כפי ש־NE אל PΣ, כך PΣ אל NE הסכום ΣE, NP. אך NE גדול מ־PΣ; לכן גם PΣ גדול מן הסכום ΣE, NP. לפיכך NE נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, ו־PΣ הוא קטעו הגדול. אך PΣ שווה ל־YΦ; לכן כאשר NE נחתך

ביחס קיצוני ואמצעי, $Y\Phi$ הוא הקטע הגדול. ומאחר שקוטר הכדור רציונלי וריבועו גדול פי שלושה מן הריבוע שעל צלע הקובייה, NE , בהיותו צלע הקובייה, רציונלי. ואם קו רציונלי נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, כל אחד מקטעיו הוא אפוטומה אי־רציונלית.

לפיכך $Y\Phi$, בהיותו צלע התריסרון, הוא אפוטומה אי־רציונלית.

מסקנה

מכאן ברור שכאשר צלע הקובייה נחתכת ביחס קיצוני ואמצעי, הקטע הגדול הוא צלע התריסרון; מש"ל.

להציג את צלעות חמש הצורות ולהשוותן זו לזו.

יונה AB , קוטר הכדור הנתון; הוא ייחתך בנקודה Γ כך ש־ $A\Gamma$ יהיה שווה ל־ ΓB , ובנקודה Δ כך ש־ $A\Delta$ יהיה כפול מ־ AB . על AB יתואר חצי המעגל AEB ; מן Δ , Γ יעלו ΔZ , ΓE , מאונכים ל־ AB , ויחברו EB , ZB , AZ . ומאחר ש־ $A\Delta$ כפול מ־ AB , ΔB גדול פי שלושה מ־ BA . ובהמרה BA גדול פי אחד וחצי מ־ $A\Delta$. וכפי ש־ BA אל $A\Delta$, כך הריבוע שעל BA אל הריבוע שעל AZ , שהרי המשולש AZB שווה־זוויות למשולש AZA ; לפיכך הריבוע שעל BA גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל AZ . וגם ריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הפירמידה. והנה AB הוא קוטר הכדור; לפיכך AZ שווה לצלע הפירמידה.

ושוב, מאחר ש־ $A\Delta$ כפול מ־ AB , ΔB גדול פי שלושה מ־ BA . וכפי ש־ AB אל BA , כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BZ ; לפיכך הריבוע שעל AB גדול פי שלושה מן הריבוע שעל BZ . וגם ריבוע קוטר הכדור גדול פי שלושה מן

הריבוע שעל צלע הקובייה. והנה AB הוא קוטר הכדור; לפיכך BZ היא צלע הקובייה.

ומאחר ש- AG שווה ל- AB , GB כפול מ- BF . וכפי ש- AB אל BF , כך הריבוע שעל AB אל הריבוע שעל BE ; לפיכך הריבוע שעל AB כפול מן הריבוע שעל BE . וגם ריבוע קוטר הכדור כפול מן הריבוע שעל צלע התמניון. והנה AB הוא קוטר הכדור הנתון; לפיכך BE היא צלע התמניון.

מן הנקודה A יועלה AH מאונך לקו הישר AB, ויונח AH שווה ל- AB ; יחובר HF, ומן Θ יורד ΘK מאונך ל- AB . ומאחר ש- HA כפול מ- AG — שהרי HA שווה ל- AB — וכפי ש- HA אל AG כך ΘK אל KF , גם ΘK כפול מ- KF . לפיכך הריבוע שעל ΘK גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל KF ; ולכן סכום הריבועים שעל ΘK , KF , כלומר הריבוע שעל ΘF , גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KF . אך ΘF שווה ל- FB ; לפיכך הריבוע שעל BF גדול פי חמישה מן הריבוע שעל FK . ומאחר ש- AB כפול מ- FB , ומתוכם AD כפול מ- AB , השארית BD כפולה מן השארית DF . לכן BF גדול פי שלושה מ- FD , והריבוע שעל BF גדול פי תשעה מן הריבוע שעל FD . אך הריבוע שעל BF גדול פי חמישה מן הריבוע שעל FK ; לפיכך הריבוע שעל FK גדול מן הריבוע שעל FD , ולכן FK גדול מ- FD . תונח FA שווה ל- FK ; מן A יועלה AM מאונך ל- AB , ויחובר MB. ומאחר שהריבוע שעל BF גדול פי חמישה מן הריבוע שעל FK , ו- AB כפול מ- BF ו- KA כפול מ- FK , הריבוע שעל AB גדול פי חמישה מן הריבוע שעל KA . וגם ריבוע קוטר הכדור גדול פי חמישה מן הריבוע שעל רדיוס המעגל שעל פיו נבנה העשרימון. והנה AB הוא קוטר הכדור; לפיכך KA הוא רדיוס המעגל שעל פיו נבנה העשרימון, ולכן KA היא צלע משושה במעגל האמור. ומאחר שקוטר הכדור מורכב מצלע המשושה

ומפעמיים צלע המעושר החסומים במעגל האמור, AB° הוא קוטר הכדור, KA צלע משושה, AK° שווה ל- AB° , כל אחד מן AK , AB הוא צלע מעושר החסום במעגל שעל פיו נבנה העשרימון. ומאחר ש- AB° היא צלע מעושר MA° צלע משושה — שהרי היא שווה ל- KA , מפני שהיא שווה גם ל- OK° , בהיותם במרחק שווה מן המרכז, וכל אחד מן OK , KA כפול מ- KI° — הרי MB היא צלע מחומש. וצלע המחומש היא צלע העשרימון; לפיכך MB היא צלע העשרימון.

ומאחר ש- ZB° היא צלע הקובייה, תיחתך ביחס קיצוני ואמצעי בנקודה N , ויהי NB הקטע הגדול; לפיכך NB היא צלע התריסרון.

ומאחר שהוכח שריבוע קוטר הכדור גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל AZ , צלע הפירמידה; כפול מן הריבוע שעל BE , צלע התמניון; וגדול פי שלושה מן הריבוע שעל ZB , צלע הקובייה — הרי מאותם חלקים שריבוע קוטר הכדור מכיל שישה, הריבוע שעל צלע הפירמידה מכיל ארבעה, הריבוע שעל צלע התמניון שלושה, והריבוע שעל צלע הקובייה שניים. לפיכך הריבוע שעל צלע הפירמידה גדול פי ארבעה שלישים מן הריבוע שעל צלע התמניון, וכפול מן הריבוע שעל צלע הקובייה; והריבוע שעל צלע התמניון גדול פי אחד וחצי מן הריבוע שעל צלע הקובייה. לכן צלעות שלוש הצורות האמורות — הפירמידה, התמניון והקובייה — עומדות זו אל זו ביחסים רציונליים. אך השתיים הנותרות — צלע העשרימון וצלע התריסרון — אינן עומדות ביחסים רציונליים לא זו אל זו ולא אל הצלעות האמורות לעיל; שהרי הן אי־רציונליות, האחת הקו הקטן והאחרת אפוטומה.

שצלע העשרימון MB גדולה מצלע התריסרון NB נוכיח כך.

מאחר שהמשולש ZAB שווה־זוויות למשולש ZAB , כפי ש־ ΔB אל BZ כך BZ אל BA . ומאחר ששלושה קווים ישרים עומדים בפרופורציה, כפי שהראשון אל השלישי כך הריבוע שעל הראשון אל הריבוע שעל השני; לפיכך כפי ש־ ΔB אל BA כך הריבוע שעל ΔB אל הריבוע שעל BZ . ובהיפוך: כפי ש־ ΔB אל BA , כך הריבוע שעל ZB אל הריבוע שעל BA . אך AB גדול פי שלושה מ־ BA ; לפיכך הריבוע שעל ZB גדול פי שלושה מן הריבוע שעל BA . וגם הריבוע שעל ΔA גדול פי ארבעה מן הריבוע שעל ΔB , שהרי ΔA כפול מ־ ΔB ; לכן הריבוע שעל ΔA גדול מן הריבוע שעל ZB , ומכאן ΔA גדול מ־ ZB . לפיכך ΔA גדול מ־ ZB בהרבה. וכאשר ΔA נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, KA הוא הקטע הגדול, מפני ש־ AK היא צלע משושה ו־ KA צלע מעושר; וכאשר ZB נחתך ביחס קיצוני ואמצעי, NB הוא הקטע הגדול. לפיכך KA גדול מ־ NB . אך KA שווה ל־ AM ; לכן AM גדול מ־ NB . לפיכך MB , בהיותו צלע העשרימון, גדול בהרבה מ־ NB , שהוא צלע התריסרון; מש״ל.

אומר אני שמלבד חמש הצורות האמורות לא תיבנה צורה אחרת המוקפת בצורות שוות זו לזו, שוות־צלעות ושוות־זוויות.

שהרי משני משולשים, או בכלל משני מישורים, לא נוצרת זווית מרחבית. משלושה משולשים נוצרת זווית הפירמידה, מארבעה זווית התמניון, ומחמישה זווית העשרימון. אך משישה משולשים שווי־צלעות ושווי־זוויות הנפגשים בנקודה אחת לא תיווצר זווית מרחבית; שהרי זווית המשולש שווה־הצלעות היא שני שלישים מזווית ישרה, ולכן שש הזוויות תהיינה שוות לארבע זוויות ישרות. וזה בלתי־אפשרי, שהרי כל זווית מרחבית כלולה בזוויות שסכומן קטן מארבע זוויות ישרות. ומאותם הטעמים גם מיותר משש זוויות מישוריות לא תיווצר זווית מרחבית. זווית הקובייה כלולה בשלושה ריבועים; אך בלתי־

אפשרי שתיכלל בארבעה, שהרי שוב יהיו ארבע זוויות ישרות. משלושה מחומשים שווי-צלעות ושווי-זוויות נוצרת זווית התריסרון; אך בלתי-אפשרי שתיווצר מארבעה, שהרי זווית המחומש שווה-הצלעות היא זווית ישרה ועוד חמישית, ולכן ארבע הזוויות תהיינה גדולות מארבע זוויות ישרות. וזה בלתי-אפשרי. ואף מצורות מצולעות אחרות לא תיכלל זווית מרחבית, מחמת אותו אבסורד.

לפיכך מלבד חמש הצורות האמורות לא תיבנה צורה מרחבית אחרת המוקפת בצורות שוות-צלעות ושוות-זוויות; מש"ל.

לְמָה

ואת הדבר שזוויתו של מחומש שווה-צלעות ושווה-זוויות היא זווית ישרה ועוד חמישית יש להוכיח כך.

יהי $AB\Gamma\Delta E$ מחומש שווה-צלעות ושווה-זוויות; סביבו ייחסם המעגל $AB\Gamma\Delta E$, תימצא מרכזו בנקודה Z , ויחברו $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$. לפיכך הם חוצים את זוויות המחומש שב- A, B, Γ, Δ, E . ומאחר שחמש הזוויות שב- Z שוות לארבע זוויות ישרות והן שוות זו לזו, אחת מהן, כגון הזווית AZB , היא זווית ישרה פחות חמישית; לפיכך שתי הזוויות הנותרות ZAB, ABZ יחד הן זווית ישרה ועוד חמישית. אך הזווית ZAB שווה לזווית $ZB\Gamma$; לכן הזווית השלמה $AB\Gamma$ של המחומש היא זווית ישרה ועוד חמישית; מש"ל.